

Σημειώσεις για τη συμπεριφορά της δυναμικής Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (KPP)

31 Μαΐου 2024

1 Γενικά χαρακτηριστικά της δυναμικής KPP

Η ελεύθερη KPP¹ δυναμική πεδίου $u(x, t)$ σε μία χωρική διάσταση, δηλαδή με το x να λαμβάνει τιμές σε όλη την πραγματική ευθεία χωρίς περιορισμό, διέπεται από την

$$u_t = v u_{xx} + r u(1 - u) .$$

Επιζητούμε τον προσδιορισμό της χρονικής εξέλιξης αρχικού πεδίου $u(x, 0)$. Ορίζοντας τις νέες μεταβλητές $t' = rt$, $x' = x\sqrt{r/v}$ η KPP μπορεί να τεθεί στην κανονική μορφή:

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u) , \tag{1}$$

έχοντας αφαιρέσει τους τόνους από τις νέες μεταβλητές για απλοποίηση της γραφής. Την δυναμική αυτή εξέτασε συγχρόνως με τους KPP και ο Fisher² (όλοι το 1937) και πολλές φορές αναφέρεται ως εξίσωση Fisher (ιδιαίτερα στους χώρους της οικολογίας) ή εξίσωση FKPP.

Τι περιγράφει αυτή εξίσωση; Θα μπορούσε να περιγράψει τη διάχυση κάποιας φυσικής ποσότητας, u , σε ένα περιβάλλον το οποίο εμφανίζει εισροή ή εκροή της ποσότητας αυτής, με την εισροή/εκροή να εξαρτάται από το u . Θα μπορούσε η εισροή/εκροή αυτή να περιγράφει τη λογιστική αύξηση/μείωση ενός πληθυσμού, ο οποίος όμως διαχέεται στις γειτονικές περιοχές, ή την χωροχρονική εξέλιξη μίας επιδημίας. Η εξίσωση αυτή περιγράφει επίσης τη διάδοση φλόγας, και εκρηξων. Γενικότερα, η χωρική διάσταση μπορεί να είναι οποιαδήποτε, οπότε η δράση της διάχυσης (που περιγράφει αδρομερώς κίνηση τυχαίου περιπάτου) επιτελείται με την Λαπλασιανή στην αντίστοιχη διάσταση. Σε παραπάνω από μία διαστάσεις παρουσιάζονται ενδιαφέρουσες χωρικές διαμορφώσεις (patterns) του πεδίου με διαφορετικές συμμετρίες.

Τι συμπεριφορά αναμένουμε; Αν $|u| \ll 1$ αναμένουμε το $|u|$ να αυξηθεί, λόγω της λογιστικής, και συγχρόνως εξάπλωση του πεδίου σε περιοχές χαμηλότερης τιμής του u λόγω της διάχυσης. Υπάρχουν δύο προφανείς ομογενείς καταστάσεις ισορροπίας: η $u = 0$, που αντιπροσωπεύει το κενό, και η $u = 1$.

Η αστάθεια του κενού $u(x, t) = 0$ φαίνεται αμέσως από τον έλεγχο της σταθερότητας της λύσης

¹A. Kolmogorov, I. Petrovsky & N. Piscounoff, 1937: Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de la quantité de matière et son application a un probleme biologique. *Bull. Univ. Moscou*, Set. Inter., Sec. A., pp. 1-25.

²R. A. Fisher, 1937: The advance of advantageous genes; *Ann. of Eugenics*, 7, pp. 355-369.

αυτής. Μικρές διαταραχές $u(x, t)$ του κενού διέπονται από την γραμμικοποιημένη (1) εξίσωση:

$$u_t = u_{xx} + u. \quad (2)$$

Η (2) μπορεί να αναλυθεί κατά Fourier και επειδή είναι ομογενής στον χώρο και γραμμική να εξετασθεί η εξέλιξη κάθε αρμονικής ξεχωριστά διότι υπό αυτές τις προϋποθέσεις δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ κυματαριθμών. Επιπλέον, επειδή είναι ομογενής στον χρόνο η διαταραχή κυματαριθμού k εξελίσσεται ως:

$$u = \hat{u}_k e^{ikx + \lambda t},$$

όπου \hat{u}_k το πλάτος της διαταραχής αυτής και

$$\lambda = 1 - k^2.$$

17 Αυτό συνιστά πλήρη περιγραφή της γραμμικής δυναμικής διότι κάθε λογική αρχική συνθήκη (π.χ.
18 φραγμένη και μη μηδενική σε πεπερασμένο εύρος της ευθείας) μπορεί να αναλυθεί κατά Fourier. Οι
19 διαταραχές με $k < 1$ έχουν $\lambda > 0$ και συνεπώς αυξάνονται εκθετικά με τον χρόνο και είναι ασταθείς.
20 Αντιθέτως διαταραχές με $k > 1$ είναι εκθετικά φθίνουσες και συνεπώς ευσταθείς. Η κατάσταση του
21 κενού συνεπώς είναι ασταθής σε διαταραχές με $k < 1$. Γιατί το $k = 1$ είναι ο κρίσιμος κυματαριθμός
22 που διαχωρίζει τις ευσταθείς από τις ασταθείς διαταραχές; Ο ρυθμός αύξησης από την εισροή είναι
23 ανάλογος του u και αυτό συνεπάγεται εκθετική αύξηση με εκθέτη 1, ενώ ο όρος της διάχυσης κύματος
24 με κυματαριθμό k συνεπάγεται εκθετική μείωση με ρυθμό k^2 και τελικά η διαταραχή εξελίσσεται με
25 ρυθμό $1 - k^2$. Αν δεν είχαμε προχωρήσει στην αδιαστατοποιημένη KPP θα προέκυπτε ότι $\lambda = r - vk^2$,
26 όπου φαίνεται αμέσως η προέλευση κάθε όρου.

27 Ασκήσεις:

28 α) Η κατάσταση $u(x, t) = 1$ είναι και αυτή λύση της KPP. Προσδιορίστε την ευστάθειά της.

29 β) Προσδιορίστε τη λύση $u(x, t)$ της KPP αν αρχικά $u(x, 0) = 1/3$.

30 Θα περιοριστούμε σε πεδία που λαμβάνουν θετικές τιμές ≥ 0 , κάτι που έτσι και αλλιώς απαιτείται
31 αν το u περιγράφει πληθυσμό ή κάποια πυκνότητα. Αυτός ο περιορισμός είναι λογικός διότι αν σε
32 κάποια περιοχή είναι $u < 0$ και η αρχική συνθήκη έχει προβολή σε διαταραχές με $k < 1$ τότε επειδή
33 δεν υπάρχουν όροι που μπορούν να ανασχέσουν την εκθετική αστάθεια το πεδίο θα απειριοσθεί.

34 **Ερώτηση:** Πως μπορείτε να τροποποιήσετε την KPP ώστε να έχει πεπερασμένες λύσεις και
35 για θετικές και αρνητικές τιμές του πεδίου;

Επιπλέον, εάν αρχικά $u(x, 0) \geq 0$ τότε $u(x, t) \geq 0, \forall t$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο από φυσικής πλευράς διότι η δράση της διάχυσης είναι να επαναφέρει ένα πεδίο στη μέση τιμή του. Αν το πεδίο κάποια χρονική στιγμή έχει στο x την τιμή $u(x)$ ενώ η μέση τιμή $\bar{u}(x) = (u_+ + u_-)/2$ των αμέσως γειτονικών τιμών της συνάρτησης $u_+ = u(x + h)$ και $u_- = u(x - h)$ είναι μεγαλύτερη από την τιμή στο $u(x)$ τότε θα είναι

$$\frac{d^2 u}{dx^2} > 0,$$

36 και η διάχυση θα προσπαθήσει να επαναφέρει την $u(x)$ προς τη μέση τιμή της. Εξ' άλλου αυτό φαίνεται
 37 και από την διακριτή έκφραση της δευτέρας παραγώγου που είναι

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + o(h^2), \\ &= \frac{\bar{u}(x) - u(x)}{h^2/2} + o(h^2). \end{aligned}$$

38 **Άσκηση:**

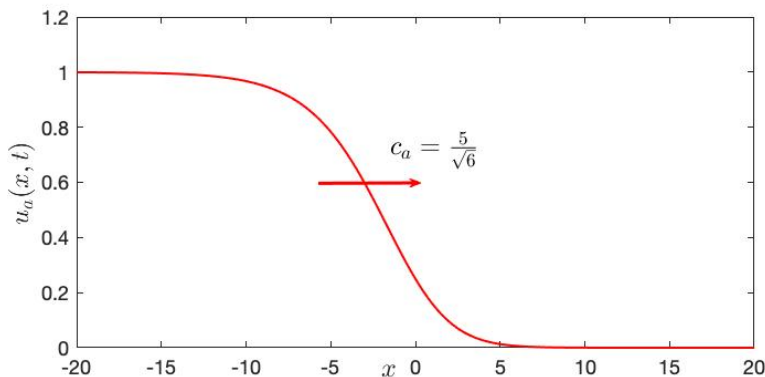
39 α) Μέσω του αναπτύγματος Taylor αποδείξτε την παραπάνω προσεγγιστική έκφραση της
 40 δευτέρας παραγώγου.

41 β) Δείξτε ομοίως ότι αν ορίσετε τη μέση τιμή ως $\bar{u}(x) = \int_{x-h/2}^{x+h/2} u(x') dx' / h$ τότε και πάλι όταν
 42 $\bar{u}(x) > u(x)$ θα είναι $d^2 u / dx^2 > 0$.

43 Συνεπώς είναι φυσικά αναμενόμενο αν αρχικά $1 \geq u(x, 0) \geq 0$ τότε να είναι πάντοτε $1 \geq u(x, t) \geq 0$.
 44 Η αυστηρή μαθηματική απόδειξη αυτής της πρότασης είναι κάπως τεχνική και παραπέμπουμε στη
 45 δημοσίευση των KPP που την αποδεικνύουν με λεπτομέρεια. Δεν την παραθέτουμε διότι η απόδειξη η
 46 ίδια δεν έχει πιστεύουμε πραγματικό ενδιαφέρον. Όμως η πρόταση αυτή αποτελεί θεμελιακή ιδιότητα
 47 που διέπει τις λύσεις της KPP.

48 **Θεώρημα:**

49 Αν αρχικά $1 \geq u(x, 0) \geq 0$ τότε $\forall t: 1 \geq u(x, t) \geq 0$.



Σχήμα 1: Η αναλυτική λύση της KPP μετατοπίζεται προς τα δεξιά με ταχύτητα $c_a = 5/\sqrt{6}$.

Υπάρχει μία αναλυτική λύση της KPP την οποία αξίζει να αναφέρουμε εξ' αρχής. Είναι η

$$u_a(x, t) = \frac{1}{\left[1 + \exp((x - c_a t)/\sqrt{6})\right]^2}, \quad c_a = 5/\sqrt{6}. \quad (3)$$

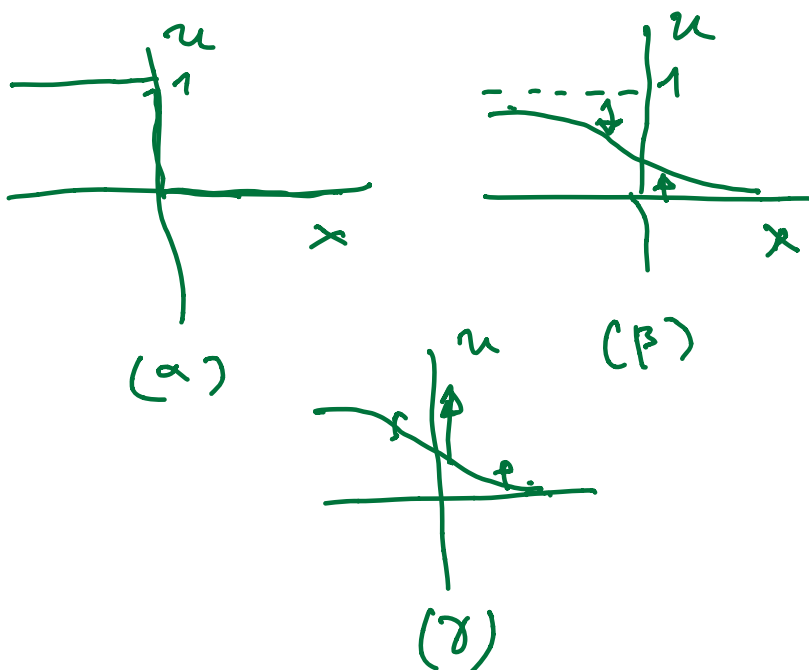
Η αναλυτική αυτή λύση αντιστοιχεί σε ένα σταθερής μορφής μέτωπο το οποίο μετατοπίζεται με τον χρόνο προς τα δεξιά (βλ. Σχ. 1). Θα δούμε ότι αυτή η συμπεριφορά κυματικής μετάδοσης και όχι εξάπλωσης χαρακτηρίζει γενικά τη δυναμική της KPP. Παρατηρήστε επίσης ότι λόγω της κατοπτρικής συμμετρίας της KPP $x \rightarrow -x$ αν η $u(x, t)$ ικανοποιεί την KPP τότε και η $u(-x, t)$ θα την ικανοποιεί.

Συνεπώς η

$$u_a(-x, t) = \frac{1}{\left[1 + \exp(-(x + c_a t)/\sqrt{6})\right]^2}, \quad c_a = 5/\sqrt{6}. \quad (4)$$

50 που αντιστοιχεί σε αυξανόμενο μέτωπο κινείται προς τα αριστερά.

51 Η ανακάλυψη των KPP συνίσταται στο ότι αντιλήφθηκαν ότι η δυναμική τους επιδέχεται μετατο-
52 πιζόμενες λύσεις όπως αυτής της αναλυτικής λύσης. Το ερώτημα είναι ποιά είναι η φυσική διαδικασία
53 που επιτρέπει αυτή τη μετάδοση. Αν ο όρος εισροής ήταν ανεξάρτητος από την κατάσταση δεν θα
54 είχαμε μετάδοση, απλά η εισρεόμενη ποσότητα θα εξαπλωνόταν (διαχεόταν). Προφανώς λοιπόν η με-
55 τάδοση οφείλεται στο ότι η εισροή εξαρτάται από την κατάσταση. Μπορούμε να αποδώσουμε όμως το
56 φαινόμενο αυτό στη μη γραμμικότητα της δυναμικής; Είναι δελεαστικό να υποστηρίξει κανείς το εξής
57 σενάριο: έστω ότι αρχικά είχαμε ένα απότομο μέτωπο (βλ. Σχ. 2α) με το πεδίο να μεταβαίνει απότομα
58 από το 1 στο 0. Η διάχυση θα εξομαλύνει συμμετρικά το μέτωπο (βλ. Σχ. 2β). Όμως η εισροή είναι μη
59 γραμμική συνάρτηση και η εισροή μεγιστοποιείται στην περιοχή που το πεδίο είναι $q = 0.5$ ενώ εισρέει
60 πολύ λιγότερο όταν το q είναι κοντά στο 1 και στο 0. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη σηκώνεται στην
περιοχή του $q = 0.5$ προκαλώντας διάδοση (βλ. Σχ. 2γ). Πειστήκατε;



Σχήμα 2

61

Θα υποστηρίξουμε ότι η διαδικασία μετάδοσης εξαρτάται από την πρόσθια περιοχή του μετώπου, από την περιοχή που το πεδίο τείνει να μηδενισθεί. Ας ελέγξουμε αυτήν την πρόταση. Αν είναι έτσι τότε επειδή $|u| \ll 1$ το πεδίο στη περιοχή αυτή διέπεται από την (2) που είναι η γραμμική εκδοχή της KPP. Αν δε ορμώμενοι από την μορφή της αναλυτικής λύσης για $x \gg 1$ διερευνήσουμε αν υπάρχουν

λύσεις της μορφής

$$u = Ae^{-\alpha(x-ct)}, \quad \alpha > 0. \quad (5)$$

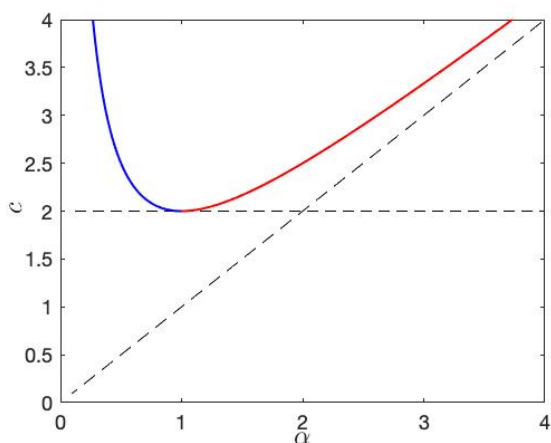
Δεν μας απασχολεί προς το παρόν ότι η λύση αυτή δεν είναι φραγμένη για $x \rightarrow -\infty$ και ότι δεν μπορεί να ισχύει για όλα τα x , την θεωρούμε τοπική προσέγγιση της δυναμικής στην εμπροσθοφυλακή του μετώπου. Αντικαθιστώντας την (5) στην (2) βρίσκουμε ότι

$$ac = \alpha^2 + 1,$$

και συνεπώς η ταχύτητα του μετώπου

$$c = \alpha + \frac{1}{\alpha}, \quad (6)$$

⁶² προσδιορίζεται αποκλειστικά από το α . Η συνάρτηση αυτή έχει για θετικά α ελάχιστο στο $\alpha = 1$ και
⁶³ συνεπώς σύμφωνα με αυτή την πρόβλεψη η ταχύτητα διάδοσης c δεν μπορεί να είναι μικρότερη του
⁶⁴ 2 (βλ. Σχ. 3). Δεδομένης δε μιας τιμής του c υπάρχουν δύο τιμές που οδηγούν σε αυτήν την ταχύτητα, με $\alpha < 1$ και $\alpha > 1$.



Σχήμα 3

⁶⁵ Ας εξετάσουμε την ακρίβεια αυτής της πρόβλεψης. Στην αναλυτική λύση (4) γνωρίζουμε και το α και το c . Από την (4) για $x \gg 1$ με t σταθερό έχουμε

$$u(x, t) \sim e^{-2x/\sqrt{6}},$$

άρα $\alpha = 2/\sqrt{6}$. Η δε προβλεπόμενη από τη γραμμική εξίσωση ταχύτητα

$$c = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{5}{\sqrt{6}},$$

⁶⁶ είναι πράγματι η ταχύτητα διάδοσης. Υπό αυτή την οπτική θα υποστηρίζαμε ότι η ταχύτητα διάδο-
⁶⁷ σης εξαρτάται από γραμμικές διαδικασίες στο πρόσθιο μέρος του μετώπου και η μη γραμμικότητα

68 εγγυάται λύσεις φραγμένες σε όλο το χώρο, δηλαδή μετατρέπει τη μη φραγμένη γραμμική λύση $u =$
69 $Ae^{-\alpha(x-ct)}$, που ισχύει στο πρόσθιο μέτωπο και δεν είναι φραγμένη για $x \rightarrow -\infty$, σε φραγμένη συνάρ-
70 τηση σε όλη την πραγματική ευθεία.

71 Τελικά αποδεικνύεται³ ότι αν $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\alpha x} u(x, 0) = K > 0$, με $\alpha < 1$ τότε ασυμπτωτικά προκύπτει
72 μέτωπο που κινείται με ταχύτητα που δίνεται από την (6) και αντιστοιχεί στον αριστερό κλάδο της
73 $c(\alpha)$ στο Σχ. 3. Θα εξηγήσουμε σε λίγο ότι τιμές με $\alpha > 1$ δεν είναι συμβατές με την ύπαρξη κυματικών
74 λύσεων τέτοιας μορφής. Σημειώνουμε επίσης ότι παρότι οι KPP υποστηρίζουν ρητά ότι κάθε αρχική
75 συνθήκη που είναι φθίνουσα και είναι $u(x, 0) = 1$ όταν $x < x_1$ και $u(x, 0) = 0$ όταν $x > x_2$ με $x_1 < x_2$
76 καταλήγει σε λύση σταθερής κυματομορφής με $c = 2$ (και με $c = -2$ για την $u(-x, 0)$), αυτό φυσικά
77 πρέπει να εκληφθεί ότι έχει ασυμπτωτική ισχύ δηλαδή η διαταραχή τείνει για $t \rightarrow \infty$ προς την κυματική
78 μορφή. Μάλιστα ο Larson υπολογίζει ακριβώς τον τρόπο που προσεγγίζουν οι αρχικές συνθήκες των
79 KPP τη μεταφερόμενη λύση σταθερής κυματομορφής.

³H. P. McKean, 1975: Application of Brownian Motion to the Equation of Kolomogorov-Petrovskii-Piskunov, *Comm. Pure Appl. Math.*, 28, pp. 323-331 και D.A. Larson, 1978: Transient bounds and time-asymptotic behavior of nonlinear equations of Fisher type, *SIAM J. Appl. Math.*, 34, pp. 93-103.

2 Αριθμητική επίλυση της KPP

Παραθέτουμε ένα πρόγραμμα με το οποίο μπορείτε να διερευνήσετε τη συμπεριφορά των λύσεων

```
82 clear all
83 %KPP  $u_t = \nu u_{xx} + r u(1-u)$ 
84
85
86 nu=1;r=1;
87 L=40;
88 N=1001;
89 x=linspace(-L,L,N);x=x';
90 dx=x(2)-x(1);
91
92 %no boundary conditions are imposed at L,-L
93 D2=zeros(N);
94 D2=diag(-2*ones(N,1))+diag(ones(N-1,1),1)+diag(ones(N-1,1),-1);
95 D2(1,1)=1;D2(1,2)=-2;D2(1,3)=1;
96 D2(N,N)=1;D2(N,N-1)=-2;D2(N,N-2)=1;
97 D2=(1/dx^2)*D2;
98
99 t=0;
100 xi=sqrt(1/6)*x-5/6*t;
101 va=1./(1+exp(xi)).^2;
102 v=0.4*exp(-(x/2).^2);
103 v0=va;
104 v=v0;
105 figure(2);
106 plot(x,v0,'r','Linewidth',2)
107 axis([-L L -1.5 1.5])
108 pause;
109
110
111 dt=0.001;
112 Tp=19;
113 Nt=floor(Tp/dt);
114 t=zeros(Nt,1);
115
116 v=v0;
117
118 for it=2:Nt;
119     t(it)=(it-1)*dt;
120     tn=t(it);
121     xi=sqrt(1/6)*x-5/6*tn;
```

```

122 va=1./(1+exp(xi)).^2;
123 v=v+dt*(nu*D2*v+r*v.*(1-v));
124
125 if min(v)<-20005;break;end;
126 if rem(it,10)==0;
127     figure(2);
128     plot(x,v,'r',x,va,'--b','Linewidth',2)
129     xlabel('$x$', 'Interpreter','latex','FontSize',24)
130     title(['$t = $',num2str(tn)], 'Interpreter','latex','FontSize',24)
131     axis([-L L -1.5 1.5])
132     drawnow
133 end;
134
135 end;
136

```

137 Ασκηση:

138 Τροποποιήστε τον τελεστή $D2$ στο παραπάνω πρόγραμμα ώστε το πεδίο να ικανοποιεί πε-
139 ριοδικές συνοριακές συνθήκες στα $\pm L$ δηλαδή να είναι $u(L) = u(-L)$ (ο χώρος δηλαδή να
140 είναι κυκλικός) και λάβετε $L = 40$. Αφού το επιτύχετε αυτό

141 α) προσδιορίστε τον μικρότερο κυματαριθμό k σε αυτό το χωρίο ώστε η διαταραχή $u(x, 0) =$
142 $0.1 \cos(kx)$ που ικανοποιεί τις περιοδικές συνθήκες να τείνει ασυμπτωτικά προς το κενό. Σχε-
143 διάστε το πλάτος της διαταραχής συναρτήσει του χρόνου και επιβεβαιώστε ότι το πλάτος
144 μειώνεται με τον αναλυτικά προβλεπόμενο εκθέτη.

145 β) Για την αρχική κατάσταση $u(x, 0) = 1/2$, προσδιορίστε το $u(x, t)$. Τώρα θεωρήστε διατα-
146 ραχές της προηγούμενης αρχικής κατάστασης της μορφής $u(x, 0) = 1/2 + \alpha \cos(2\pi x/L)$ με
147 $\alpha < 1/2$. Τι συμβαίνει; Το παράδειγμα αυτό τι αποδεικνύει ως προς τον ελκυστή των κυμα-
148 τικών λύσεων τύπου KPP;

149 γ) Πως εξελίσσεται η αρχική κατάσταση που είναι $u(x, 0) = 3/2$ για $|x| < 2$ και $u(x, 0) = 0$
150 για $|x| > 2$;

151 3 Προσδιορισμός κυματικών λύσεων σταθερής κυματομορφής

152 Εξετάζουμε την υπάρξη λύσεων της μορφής $u(z)$ όπου $z = x - ct$. Οι ειδικές λύσεις αυτές αντι-
153 στοιχούν σε σταθερές κυματομορφές οι οποίες μετατοπίζονται με τον χρόνο, προς τα δεξιά αν $c > 0$
154 και προς τα αριστερά αν $c < 0$. Προφανώς, λόγω της σταθερής μορφής των λύσεων αυτών η αρχική
155 κατάσταση που αντιστοιχεί σε αυτές τις λύσεις είναι η $u(x)$. Κεντρικό ερώτημα είναι κατά πόσον λύ-
156 σεις τέτοιας μορφής με αυτές τις ιδιότητες προκύπτουν από άλλες αρχικές συνθήκες. Αυτό απαιτεί
157 κατ'ελάχιστον ότι οι λύσεις αυτές είναι ευσταθείς σε διαταραχές. Αν αποδειχθεί η ευστάθεια των λύ-
158 σεων αυτών τότε οι λύσεις αυτές είναι πραγματοποιήσιμες όταν οι αρχικές συνθήκες κείνται εντός του
159 πεδίου έλξεως των ειδικών λύσεων αυτών. Πληρέστερη μελέτη απαιτεί τον προσδιορισμό ή τον γενικό
160 χαρακτηρισμό του πεδίου έλξεως αυτών των ειδικών λύσεων.

Η KPP απαιτεί οι ειδικές κυματικές λύσεις σταθερής κυματομορφής $u(z)$ να ικανοποιούν την

$$-c \frac{du}{dz} = \frac{d^2u}{dz^2} - u(1-u), \quad (7)$$

για κατάλληλο c . Η συνάρτηση u προσδιορίζει την σταθερή κυματομορφή. Θα δείξουμε ότι οι μόνες κυματομορφές που έχουν αυτές τις ιδιότητες είναι ή φθίνουσες συναρτήσεις με $\lim_{z \rightarrow -\infty} u(z) = 1$ και $\lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = 0$ που μεταδίδονται με θετική ταχύτητα $c \geq 2$ ή αύξουσες συναρτήσεις με $\lim_{z \rightarrow -\infty} u(z) = 0$ και $\lim_{z \rightarrow \infty} u(z) = 1$ που μεταδίδονται με αρνητική ταχύτητα $|c| \geq 2$.

Η δευτεροτάξια δυναμική είναι ισοδύναμη με την αυτόνομη πρωτοτάξια δυναμική στο επίπεδο (u, v) :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= -u(1-u) - cv. \end{aligned}$$

Η τελεία εδώ συμβολίζει παραγωγή ως προς τη μεταβλητή z .

Έχουμε δύο σημεία ισορροπίας (u_e, v_e) τα: $(0, 0)$ και $(1, 0)$. Ο Ιακωβιανός πίνακας που ελέγχει την γραμμική ευστάθεια στο $(1, 0)$ είναι

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix},$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που προσδιορίζει τις ιδιοτιμές του:

$$\lambda^2 + c\lambda - 1 = 0.$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι

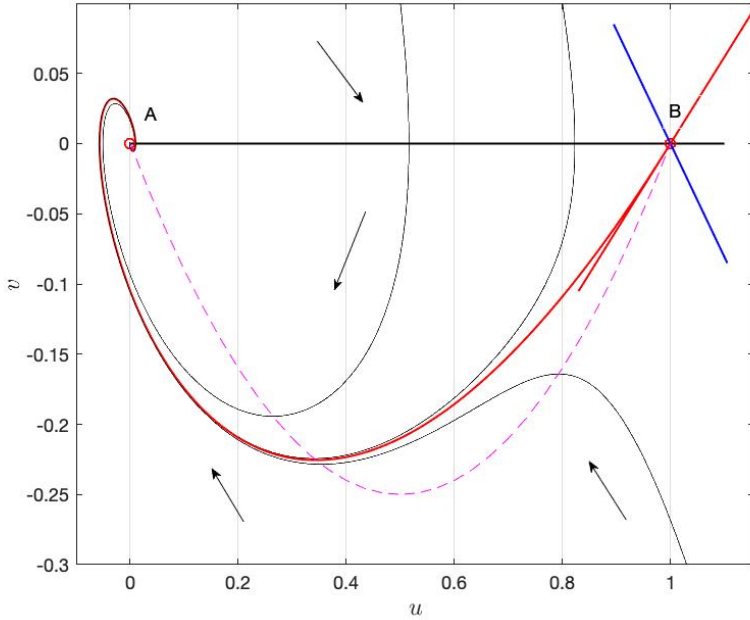
$$\lambda_{u,s} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + 1}, \quad (8)$$

και συνεπώς το $(1, 0)$ είναι σαγματικό σημείο δεδομένου ότι $\lambda_u > 0$ και $\lambda_s < 0$. Οι διευθύνσεις των αναλλοίωτων κατευθύνσεων στην προσέγγιση της γραμμικής δυναμικής είναι οι

$$\mathbf{e}_u = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_s = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_s \end{pmatrix},$$

και έχουν σχεδιασθεί στο Σχ. 4. Επειδή το σημείο αυτό είναι υπερβολικό η τοπολογία της ροής που προκύπτει από τη γραμμική δυναμική δεν μεταβάλλεται από τους μη γραμμικούς όρους. Επί της ασταθούς πολλαπλότητας η λύση που αρχικά ήταν κοντά στο 1 εξελίσσεται ως

$$u(z) \approx 1 + Ae^{\lambda_u z}. \quad (9)$$



Σχήμα 4: Τυπικές τροχιές όταν $c = 1$. Παρόμοια εικόνα προκύπτει για κάθε τιμή του c στο διάστημα $0 < c < 2$. Για όλες αυτές τις τιμές το $A = (0, 0)$ είναι ευσταθής σπείρα και η ροή στην περιοχή του σταθερού σημείου είναι όπως στο σχήμα. Για κάθε τιμή του c , το $B = (1, 0)$ είναι πάντοτε σάγμα, όπου με μπλε σημειώνουμε τις ευσταθείς πολλαπλότητες του, ενώ με κόκκινο τις ασταθείς. Η γραμμή $v = 0$ είναι καμπύλη μηδενικής κλίσης (nullcline) στην οποία είναι $\dot{u} = 0$ και συνεπώς οι τροχιές τέμνουν τον άξονα $v = 0$ κάθετως και μάλιστα όταν $0 < u < 1$ με αρνητική κλίση (δηλαδή $\dot{v} < 0$), όπως φαίνεται στο σχήμα. Συνεπώς όλες οι αρχικές συνθήκες που έχουν $0 < u < 1$ και $0 < v \ll 1$ θα εισχωρήσουν στην περιοχή $v < 0$, όπως φαίνεται πάλι στο σχήμα. Ομοίως η τροχιά που συνεχίζει την ασταθή πολλαπλότητα του σάγματος προς τον κόμβο (σημειωμένη με κόκκινο) καταλήγει με σπειροειδή τρόπο στο A , αναγκαστικά λαμβάνοντας αρνητικές τιμές. Η διάστικτη καμπύλη είναι τμήμα της καμπύλης μηδενικής κλίσης $\dot{v} = 0$ όπου το διανυσματικό πεδίο του δυναμικού συστήματος είναι οριζόντιο και είναι $\dot{v} < 0$ στα σημεία που βρίσκονται εντός αυτής και $\dot{v} > 0$ εκτός αυτής. Η ροή της δυναμικής στις διάφορες περιοχές σημειώνεται με βέλη. Τέτοιες τιμές του c που διαμορφώνουν τέτοια εικόνα ροής δεν ανταποκρίνονται σε πραγματοποιήσιμες λύσεις της KPP επειδή δεν επιτρέπεται η u να γίνει αρνητική αν αρχικά $u(x, 0) > 0$. Συνεπώς, το ansatz λύσεων της μορφής $u(z)$ δεν είναι συμβατό με την KPP αν $|c| < 2$.

Ο Ιακωβιανός πίνακας που ελέγχει την γραμμική ευστάθεια στο $(0, 0)$ είναι

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix},$$

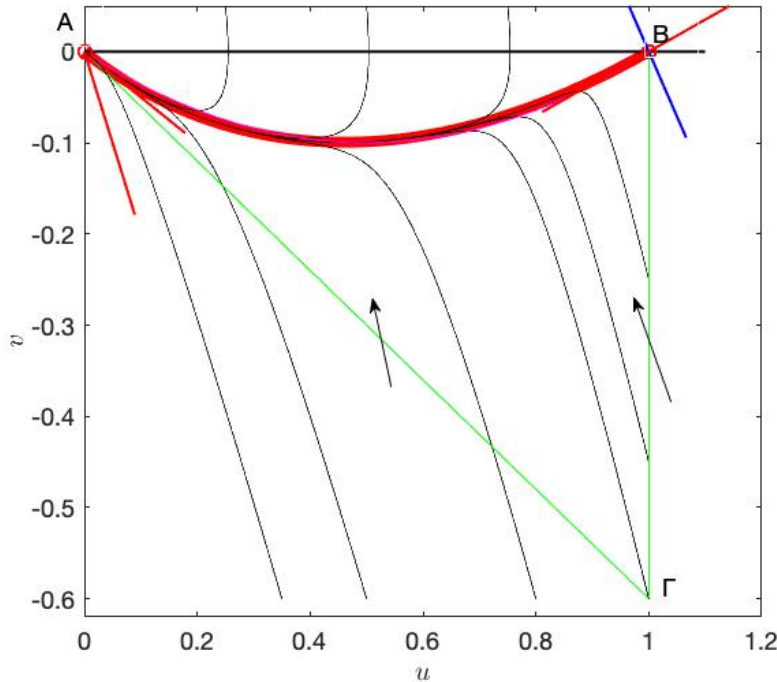
και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\lambda^2 + c\lambda + 1 = 0,$$

προσδιορίζει τις ιδιοτιμές

$$\lambda_{\pm} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1}, \quad (10)$$

168 και συνεπώς το $(0, 0)$ είναι ευσταθής σπείρα όταν $|c| < 2$ και δεν υπάρχουν αναλλοίωτες πραγματικές
 169 διευθύνσεις, όλο το επίπεδο είναι αναλλοίωτο, ενώ είναι ευσταθής κόμβος όταν $|c| > 2$ με τις αναλλοί-
 170 ωτες ευσταθείς πολλαπλότητες στις διευθύνσεις:



Σχήμα 5: Τυπικές τροχιές όταν $c = 2.5$. Παρόμοια εικόνα προκύπτει για $c \geq 2$. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις το $A = (0,0)$ είναι ευσταθής κόμβος και υπάρχει ετεροκλινική τροχιά η οποία αρχίζει κοντά από το B όπου $u(B) = 1$ και καταλήγει στο A όπου $u(A) = 0$ (χοντρή κόκκινη γραμμή). Η μετάβαση από το B στο A απαιτεί άπειρο διάστημα του z το οποίο, λόγω της χρονικής ομογενείας, μπορεί να ληφθεί και ως το διάστημα $(-\infty, \infty)$ που αναποκρίνεται στη φυσική ερμηνεία του z που λαμβάνει τιμές κάθε χρονική στιγμή σε όλη την πραγματική ευθεία. Στην ετεροκλινική τροχιά από το B στο A το πεδίο φθίνει μονότονα (είναι $du/dz = v < 0$ σε όλη την τροχιά) από το $u(-\infty) = 1$ στο $u(\infty) = 0$. Για να αντιληφθείτε τη λύση κρατήστε τον χρόνο t σταθερό στο $z = x - ct$, οπότε η κυματομορφή κάθε χρονική στιγμή μεταβαίνει από το $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$ στο $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$ και μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα c .

$$\mathbf{e}_1 = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή όλες οι τροχιές που έλκονται στο σταθερό σημείο $(0,0)$ για $t \rightarrow \infty$ καταλήγουν εφαπτόμενες στη διεύθυνση \mathbf{e}_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή με τη μικρότερη απόλυτη τιμή, όπως φαίνεται στο Σχ. 5. Δηλαδή όλες οι τροχιές που τείνουν στο 0 με $c \geq 2$ τείνουν με ρυθμό

$$u(z) \approx e^{\lambda_+ z} = e^{-\alpha z}, \quad (11)$$

171 με το α που είναι $\alpha < 1$ και αντιστοιχεί στον αριστερό κλάδο της $c = \alpha + 1/\alpha$ (βλ. Σχ. 5). Όλες οι
 172 λύσεις δηλαδή που καταλήγουν στο μηδέν όταν το $(0,0)$ είναι ευσταθής κόμβος θα πλησιάζουν το
 173 μηδέν με αυτόν τον εκθετικό τρόπο. Αυτό θα δούμε σε λίγο είναι το πρόσθιο μέρος της κυματομορφής
 174 και συνεπώς έτσι προσδιορίσαμε τον εκθέτη με τον οποίον μηδενίζεται το πεδίο στο πρόσθιο τμήμα
 175 του μετώπου αυτών των ειδικών λύσεων, και αποδείξαμε ότι δεν μπορεί οι ειδικές αυτές λύσεις να
 176 μηδενίζονται με εκθέτη $\alpha > 1$.

177 Η περίπτωση ειδικών λύσεων με $c < 2$ στις οποίες το A είναι ευσταθής σπείρα πρέπει αμέσως
 178 να αποκλειστεί. Διότι όλες οι τροχίες που είχαν αρχικά $u(x, 0) > 0$ και τείνουν να μηδενιστούν θα
 179 αποκτήσουν αρνητικές τιμές λόγω της σπειροειδούς προσέγγισης στο 0. Αλλά αυτό είναι αδύνατον,
 180 όπως αναλύθηκε στο πρώτο εδάφιο. Συνεπώς ειδικές λύσεις σταθερής κυματομορφής υπάρχουν μόνον
 181 εφόσον $c \geq 2$.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση αυτή πιο διεξοδικά. Θεωρούμε την περιοχή με σύνορο το τρίγωνο
 ABΓ στο Σχ. 5. Οι δύο κορυφές του A και B είναι σημεία ισορροπίας, και η κορυφή Γ έχει επιλεγεί
 κατάλληλα ώστε σε όλα τα σημεία των πλευρών του τριγώνου το εσωτερικό γινόμενο της προς τα έξω
 καθέτου σε κάθε πλευρά $\mathbf{n} = (n_u, n_v)$ με το διάνυσμα της ροής του δυναμικού συστήματος (\dot{u}, \dot{v}) να
 είναι αρνητικό, δηλαδή να ισχύει:

$$n_u \dot{u} + n_v \dot{v} < 0,$$

182 και στα μόνα σημεία που το εσωτερικό γινόμενο μηδενίζεται είναι τα A και B. Αυτό σημαίνει ότι δεδο-
 183 μένου η ταχύτητα δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο (εκτός από τα A και B) αν το δυναμικό σύστημα
 184 βρίσκεται αρχικά στις πλευρές του τριγώνου το δυναμικό σύστημα θα κινηθεί εντός του τριγώνου. Επί-
 185 σης αυτό σημαίνει ότι είναι αδύνατον τροχιά η οποία αρχικά βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου
 186 να εξέλθει από αυτό.

Ας θεωρήσουμε πρώτα σημεία της πλευράς AB. Η γραμμή αυτή είναι η καμπύλη μηδενικής κλίσης
 $\dot{u} = 0$ (nullcline) και συνεπώς η ροή στο τμήμα αυτό στο οποίο $v = 0$ είναι $(\dot{u}, \dot{v})_{AB} = (0, -u(1-u))$ ενώ
 η κάθετος στην πλευρά είναι η $(n_u, n_v)_{AB} = (0, 1)$ και

$$n_u \dot{u} + n_v \dot{v}|_{AB} = -u(1-u) < 0,$$

187 εφόσον $0 < u < 1$. Οπότε η ροή εισέρχεται στο τρίγωνο ABΓ όπως φαίνεται και στο Σχ. 5.

Επί της BΓ είναι $(\dot{u}, \dot{v})_{B\Gamma} = (v, -cv)$ και $(n_u, n_v)_{B\Gamma} = (1, 0)$. Συνεπώς

$$n_u \dot{u} + n_v \dot{v}|_{B\Gamma} = v < 0,$$

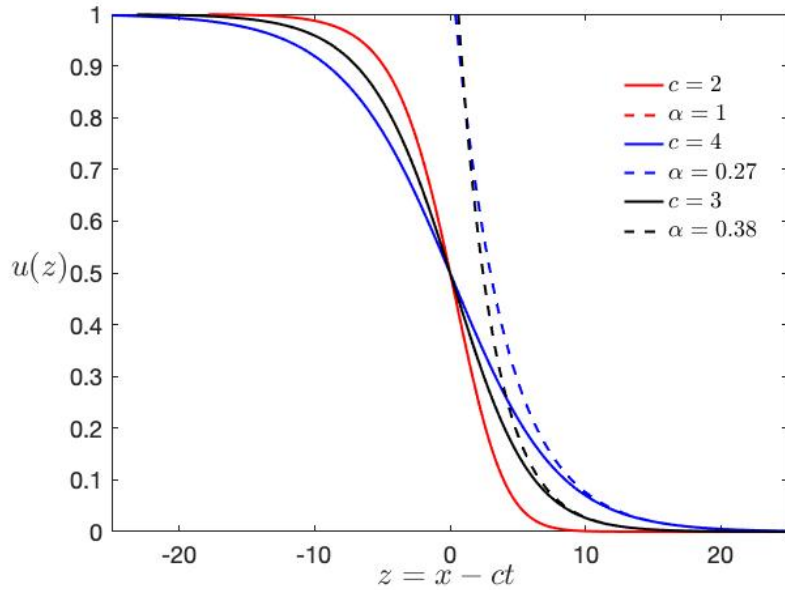
188 και η ροή εισέρχεται στο ABΓ και από αυτήν την πλευρά.

Τέλος, αν το Γ είναι το σημείο $(1, -m)$ ($m > 0$), η κάθετος στην AΓ είναι η $(n_u, n_v)_{A\Gamma} = -(m, 1)$ και
 επειδή $v = -mu$ επί της AΓ θα είναι $(\dot{u}, \dot{v})_{A\Gamma} = (-mu, cmu - u(1-u)) = u(-m, mc - (1-u))$. Άρα,

$$n_u \dot{u} + n_v \dot{v}|_{A\Gamma} = u(m^2 - cm + (1-u)) < u(m^2 - cm + 1) = u(m - m_+)(m - m_-).$$

189 όπου $m_{\pm} = c/2 \pm \sqrt{c^2/4 - 1}$, που είναι και οι δύο θετικές εφόσον $c > 2$ και ακριβώς αντίθετες με τις
 190 ιδιοτιμές λ_{\mp} του κόμβου (βλ. (10)). Άρα, αν επιλέξω τιμή m που είναι $m_+ > m > m_-$, τότε εξασφαλίζεται
 191 ότι η ροή εισέρχεται στο ABΓ και από την πλευρά AΓ. Αυτό σημαίνει ότι η πλευρά AΓ πρέπει να είναι
 192 εντός της γωνίας που σχηματίζεται από τις δύο ευσταθείς πολλαπλοότητες (όπως φαίνεται στο Σχ. 5).

193 Κατασκευάσαμε έτσι το χωρίο ABΓ στο οποίο η ροή εισέρχεται στο σύνορό του. Ο Poincaré έδειξε
 194 ότι σε αυτήν την περίπτωση η ροή θα συγκλίνει σε ευσταθή σημεία και σε οριακούς κύκλους εντός του
 195 χωρίου. Δηλαδή ασυμπτωτικά μία αρχική συνθήκη εισερχόμενη στο χωρίο ή θα καταλήξει σε κάποιο
 196 σημείο ισορροπίας, ή θα εκτελεί περιοδική κίνηση. Αλλά ευσταθή σημεία είναι μόνο το A που είναι στο



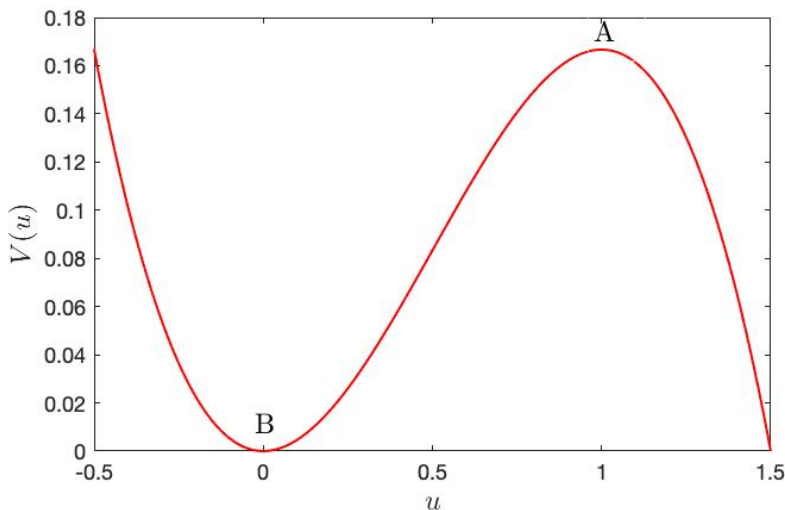
Σχήμα 6: Το προφίλ της κυματομορφής $u(z)$ που προκύπτει για $c = 2, 3, 4$. Προσέξτε ότι όλες οι καμπύλες ασυμπτωτικά για $z \gg 1$ τείνουν στον ευσταθή κόμβο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή με την μικρότερη απόσβεση ως $e^{\lambda_+ z}$ δηλαδή με $\alpha = -\lambda_+$ και ο εκθέτης αυτός είναι ακριβώς η ρίζα του $c = \alpha + 1/\alpha$ που ανήκει στον αριστερό κλάδο του Σχ. 3. Το άλλο όριο, το 1, από την άλλη πλευρά προσεγγίζεται όταν $z \rightarrow -\infty$ πάλι εκθετικά, $e^{\beta z}$, αλλά με εκθέτη $\beta \neq \alpha$ και ίσο με την ιδιοτιμή της ασταθούς πολλαπλότητας του σάγματος $\lambda_u = -c/2 + \sqrt{c^2/4 + 1}$. (Επιβεβαιώστε αυτές τις επισημάνσεις στην αναλυτική λύση (4)).

197 σύνορο και η ύπαρξη οριακού κύκλου μπορεί να αποκλειστεί αμέσως με πολλούς τρόπους. Το πλέον
 198 διαισθητικό επιχείρημα είναι το εξής: η ροή σε όλο το εσωτερικό του χωρίου έχει $\dot{u} = v < 0$, έτσι δεν
 199 μπορεί να υπάρχει κύκλος διότι αν υπήρχε θα υπήρχαν τμήματα του κύκλου στα οποία η ροή πρέπει
 200 να επιστρέψει σε μεγαλύτερες τιμές του u και σε αυτά τα τμήματα θα είναι $\dot{u} > 0$, όπερ άτοπο. Άλλο
 201 επιχείρημα βασίζεται στον υπολογισμό της απόκλισης του πεδίου ταχυτήτων του δυναμικού συστήμα-
 202 τος. Η απόκλιση είναι σταθερή και ίση με $-c$. Συνεπώς όχι μόνο δεν μπορεί να υπάρξει οριακός κύκλος
 203 εντός του ΑΒΓ, δεν μπορεί να υπάρξει οριακός κύκλος σε οποιαδήποτε άλλη περιοχή αυτού του δυνα-
 204 μικού συστήματος. Τέλος, μπορεί να επικαλεστούμε ένα άλλο θεώρημα του Poincaré που απαιτεί στο
 205 εσωτερικό του οριακού κύκλου να υπάρχει ένα ή περισσότερα σημεία ισορροπίας. Αλλά εδώ τα μόνα
 206 σημεία ισορροπίας είναι στο σύνορο του χωρίου και έτσι δεν μπορεί να υπάρξει και για αυτόν τον λόγο
 207 οριακός κύκλος εντός του ΑΒΓ.

208 Συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα του Poincaré όλες οι τροχιές που εισέρχονται στο ΑΒΓ καταλή-
 209 γουν ασυμπτωτικά στο Α. Συνεπώς και η τροχιά που αρχίζει από την ασταθή πολλαπλότητα του Β θα
 210 καταλήξει στο Α (η χοντρή κόκκινη τροχιά στο Σχ. 5). Σε όλη αυτή την τροχιά είναι $v < 0$, οπότε η u
 211 μονότονα φθίνει από την τιμή 1 στην τιμή 0, και έχει την μορφή μετώπου που σχεδιάζεται στο Σχ. 6.
 212 Αυτές είναι και οι μόνες κυματομορφές που μπορούν να εμφανιστούν σε αυτή τη δυναμική. Και αυτό
 213 διότι οποιαδήποτε άλλη τροχιά που καταλήγει στο 0 όταν $z \rightarrow \infty$, έρχεται από το άπειρο και δεν είναι
 214 φραγμένη καθώς $z \rightarrow -\infty$.

215 **3.1 Ένας Νευτώνειος τρόπος σκέψης**

216 Η αναλύση που παρατέθηκε για την εύρεση των κυματικών λύσεων της (7) είναι αυτή που ακολού-
 217 θησαν οι KPP η οποία είναι στο πνεύμα των μεθόδων γεωμετρικής ανάλυσης δυναμικών συστημάτων
 218 που εισήγαγε ο Poincaré. Άμεση διαίσθηση για τον χαρακτήρα των λύσεων της (7) μπορούμε όμως να
 219 αποκτήσουμε αμέσως σκεπτόμενοι "Νευτώνεια", δηλαδή με τον τρόπο που εντοπίζουμε στο μάθημα
 220 ειδικές λύσεις όπως αυτές των σολιτονίων.



Σχήμα 7: Το δυναμικό $V(u) = u^2/3 - u^3/3$ της δυναμικής KPP. Τα σημεία A και B είναι σημεία ισορροπίας, το B ασταθές, και το A ευσταθές.

Η (7) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -u(1-u) - c \frac{du}{dz},$$

ή

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{dV}{du} - c \frac{du}{dz}, \tag{12}$$

με το δυναμικό

$$V = \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3},$$

και να θεωρηθεί η δυναμική ως αυτή της κίνησης σωματιδίου ως προς τη μεταβλητή z του οποίου η "θέση" είναι η u , και η "ταχύτητά" του είναι du/dz , στο δυναμικό $V(u)$ με ενέργεια

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + V(u),$$

Το άγνωστο c εισάγει μία δύναμη τριβής ανάλογης της ταχύτητας όταν είναι $c > 0$, και αντιτριβής

όταν $c < 0$, όπως φαίνεται από τον "ρυθμό" μεταβολής της ενέργειας:

$$\frac{dE}{dz} = -c \left(\frac{du}{dz} \right)^2 .$$

221 Το δυναμικό $V(u)$ έχει ελάχιστο στο $u = 0$ (σημείο A του Σχ. 7) και αυτό αντιστοιχεί στη θέση ευσταθούς
222 ισορροπίας και το μέγιστο στο $u = 1$ αντιστοιχεί στη θέση ασταθούς ισορροπίας (σημείο B).

223 Η κύρια πληροφορία που μας χρειάζεται για την εξεύρεση ειδικών λύσεων είναι ότι πρέπει να πα-
224 ραμεινουμε στην περιοχή $u \geq 0$ αν αρχικά $u \geq 0$. Λύσεις που παραβιάζουν αυτή την ιδιότητα δεν
225 ανταποκρίνονται σε λύσεις της KPP και το ansatz (7) είναι κενού περιεχομένου. Το ερώτημα λοιπόν
226 είναι: μπορεί να βρεθεί κατάλληλο c ώστε κατάλληλη αρχική κατάσταση να οδηγήσει σε λύση φραγ-
227 μένη (επιζητούμε φραγμένα πεδία) και η λύση να παραμένει πάντα στην περιοχή $u \geq 0$;

Αν το c λάμβανε την τιμή $c = 0$ το u θα εκτελούσε ταλαντώσεις για χαμηλές τιμές της ενέργειας του "σωματιδίου" λαμβάνοντας και αρνητικές τιμές ή το u θα έτεινε στο άπειρο. Επειδή και τα δύο δεν είναι αποδεκτά, δεν είναι δυνατόν να βρούμε ειδικές λύσεις της (7) που να ανταποκρίνονται σε λύσεις της KPP με $c = 0$. Ομοίως αν το $c > 0$ είναι μικρό και το "σωματίδιο" βρεθεί στο πηγάδι του A τότε θα εκτελέσει τελικά φθίνουσες ταλαντώσεις περί το σημείο A (το σημείο A είναι ευσταθής σπείρα) και συνεπώς και πάλι θα αποκτήσει το u αρνητικές τιμές. Αν όμως $c \geq 2$ η ταλάντωση περί το A γίνεται υπερκρίσιμη και τότε το "σωματίδιο" θα τείνει όταν $z \rightarrow \infty$ στο $u = 0$ χωρίς καμμία ταλάντωση (έχει μετατραπεί η ευσταθής σπείρα στο A σε ευσταθή κόμβο). Συνεπώς λύσεις με $c \geq 2$ θα μπορούσαν να ανταποκρίνονται σε πραγματοποιήσιμες λύσεις της KPP αν ήταν φραγμένες για όλους του χρόνου, που σημαίνει ότι η μόνη τροχιά που είναι επιτρεπτή είναι αυτή για την οποία το "σωματίδιο" αρχίζει ασυμπτωτικά από το B όταν $z \rightarrow -\infty$, από τη θέση $u = 1$ και μονότονα φθίνει για να καταλήξει στο A για $z \rightarrow \infty$, στη θέση $u = 0$. Για να μπορεί να γίνει αυτό πρέπει το c να έχει την κατάλληλη τιμή έτσι ώστε η ενέργεια που αναλώνεται (ή εκλύεται αν $c < 0$ και η κίνηση είναι από το A στο B) να είναι ακριβώς ίση με τη διαφορά ενέργειας $E(B) - E(A) = 1/6$ σωματιδίων που βρίσκονται ακριβώς στα σημεία ισορροπίας, δηλαδή να είναι

$$\frac{1}{6} = c \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\frac{du}{dz} \right)^2 .$$

228 Αυτή η συνθήκη είναι αυτή που χαρακτηρίζει την ετεροκλινική τροχιά στο προηγούμενο εδάφιο και
229 αποτελεί την ειδική λύση της KPP για $c \geq 0$.

230 Βλέπουμε δηλαδή αμέσως με την ανάλυση αυτή ότι η μονότονη μετάβαση από το A, όπου $u = 0$,
231 στο B, όπου $u = 1$, με κατάλληλο $c > 2$ ή από το B στο A με κατάλληλο $c < -2$ είναι οι μόνες επιτρεπτές
232 λύσεις της KPP μορφής $u(x - ct)$.

233 4 Μελέτη της ευστάθειας κυματικών λύσεων σταθερής κυματο- 234 μορφής

235 Οι KPP, McKean και Larson έδειξαν ότι γενικές αρχικές μπορούν να διεγείρουν λύσεις σταθερής
236 κυματομορφής. Αυτό αποδεικνύει ότι οι ειδικές λύσεις του προηγούμενου εδαφίου δεν είναι απομο-
237 νωμένες λύσεις, αλλά είναι ελκυστές όλων αυτών των αρχικών συνθηκών. Επίσης η πρόταση αυτή

238 είναι σχεδόν απόδειξη ότι οι λύσεις αυτές είναι ευσταθείς.

239 **Ερώτηση:** Γιατί οι ασυμπτωτικές προτάσεις που απέδειξαν οι KPP, McKean και Larson δεν
240 αποτελούν πλήρη απόδειξη της ευστάθειας των ειδικών λύσεων της KPP;

Θα μελετήσουμε στο εδάφιο αυτό κατευθείαν την ευστάθεια κυματικών λύσεων σταθερής κυματομορφής, θεωρώντας ότι η $u_0(z)$ ικανοποιεί την (7) με $z = x - ct$ και το κατάλληλο c . Θεωρούμε τώρα λύσεις που αποτελούν διαταραχές της κυματικής λύσης της μορφής

$$u(x, t) = u_0(z) + u_1(z, t),$$

241 και υποθέτουμε ότι η διαταραχή $u_1(z, t)$ είναι μη μηδενική σε πεπερασμένο εύρος τιμών του z , δηλαδή
242 θεωρούμε διαταραχές που ενώ δεν έχουν σταθερή μορφή συνοδεύουν τη κυματική λύση. Θα εξετά-
243 σουμε την ευστάθεια αυτού του πιο περιορισμένου προβλήματος. Η ευστάθεια σε κάθε είδους αρχικές
244 συνθήκες, ακολουθεί τα ίδια βήματα και είναι παρόμοια, και επειδή είναι πιο περίπλοκη χωρίς ουσιώ-
245 δεις διαφορές δεν την παρουσιάζουμε.

Εισάγοντας τη διαταραγμένη λύση στην (1) έχουμε

$$-c\dot{u}_0 - c\dot{u}_1 + \partial_t u_1 = \ddot{u}_0 + \ddot{u}_1 - u_0 - u_1 + (u_0 + u_1)^2,$$

όπου και πάλι η τελεία συμβολίζει παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή z . Επειδή η u_0 ικανοποιεί την (7), δηλαδή είναι

$$\ddot{u}_0 + c\dot{u}_0 - u_0 + u_0^2 = 0,$$
 (13)

η u_1 ικανοποιεί την

$$\partial_t u_1 = \ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 - u_1 + 2u_0 u_1 + u_1^2,$$

και η ευστάθεια της u_1 κρίνεται από τη γραμμικοποίηση της παραπάνω εξίσωσης:

$$\partial_t u_1 = \ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 - u_1 + 2u_0 u_1.$$
 (14)

Δεδομένου ότι το δεξί μέλος της (14) είναι ομογενές ως προς το t θα έχω λύσεις της μορφής

$$u_1(z, t) = \hat{u}_1(z)e^{-\lambda t},$$

και επειδή έχω υποθέσει διαταραχές πεπερασμένου εύρους, θεωρώ ότι υπάρχει κάποιο L τέτοιο ώστε $\hat{u}_1(\pm L) = 0$. Το L μπορώ να το λάβω οσοδήποτε μεγάλο. Συνεπώς η \hat{u}_1 πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{d^2 \hat{u}_1}{dz^2} + c \frac{d \hat{u}_1}{dz} + (\lambda - 1 + 2u_0) \hat{u}_1 = 0, \quad \hat{u}_1(\pm L) = 0.$$
 (15)

Θετοντας $\hat{u}_1 = \phi(z)e^{-cz/2}$ καταληγουμε στην

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \left(\lambda - \left(\frac{c^2}{4} - 1 + 2u_0(z) \right) \right) \phi = 0 \quad , \quad \phi(\pm L) = 0$$

που ορίζει ένα προβλημα ιδιοτιμών για την ιδιοτιμή λ τύπου Sturm-Liouville. Ορίζοντας την

$$g(z) = \frac{c^2}{4} - 1 + 2u_0(z) \quad ,$$

θα είναι

$$g(z) \geq 2u_0(z) \geq 0 \quad ,$$

επειδή η $u_0(z)$ υπάρχει μόνον αν $|c| \geq 2$. Το Sturm-Liouville πρόβλημα μπορεί έτσι να γραφεί για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών λ που κρίνουν την ευστάθεια της $u_0(z)$ και των ιδιοσυναρτήσεων ϕ στη μορφή

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} - g(z)\phi = -\lambda\phi \quad , \quad \phi(\pm L) = 0 \quad . \quad (16)$$

Κλασική θεωρία αποδεικνύει ότι επειδή ο τελεστής

$$L = \frac{d^2}{dz^2} - g(z) \quad ,$$

είναι ερμιτιανός στην κλάση συναρτήσεων ϕ που μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος, $\phi(\pm L) = 0$ με εσωτερικό γινόμενο

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{-L}^L \phi_1^*(z)\phi_2(z)dz \quad ,$$

θα υπάρχει πλήρες φάσμα ορθογωνίων ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο ιδιοσυναρτήσεων με θετικές ιδιοτιμές (εδώ έχουμε απλά τη γενίκευση της γνώριμης πληρότητας του φάσματος ερμιτιανών τελεστών σε πεπερασμένες διαστάσεις που ανιπαρίστανται με πίνακες). Όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί μεγαλύτεροι του μηδενός. Αυτό προκύπτει ως εξής: πολλαπλασιάζουμε την (16) με την ϕ^* και ολοκληρώνουμε, οπότε:

$$\int_{-L}^L \phi^* \frac{d^2\phi}{dz^2} dz - \int_{-L}^L g(z)|\phi|^2 dz = -\lambda \int_{-L}^L |\phi|^2 dz \quad , \quad \phi(\pm L) = 0 \quad .$$

Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών μετά από παραγωγτική ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int_{-L}^L \phi^* \frac{d^2\phi}{dz^2} dz = - \int_{-L}^L \left| \frac{d\phi}{dz} \right|^2 dz \quad ,$$

οπότε

$$\lambda = \frac{\int_{-L}^L (|d\phi/dz|^2 + g(z)|\phi|^2) dz}{\int_{-L}^L |\phi|^2 dz} > 0. \quad (17)$$

246 Έτσι αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές λ είναι θετικές αλλά και πραγματικές και συνεπώς και οι ιδιοσυν-
 247 ναρτήσεις ϕ μπορούν να ληφθούν πραγματικές. Επιπλέον θα είναι $\lambda > 0$ και συνεπώς αποδείξαμε
 248 την ευστάθεια της $u_0(z)$ ως προς την κλάση διαταραχών της μορφής $u_1(z, t)$ που μηδενίζονται στα
 249 $z = \pm L$.

Μάλιστα, είναι

$$\lambda \geq \frac{\pi^2}{4L^2}. \quad (18)$$

Αυτή η ανισότητα προκύπτει από μία όμορφη και χρήσιμη ανισότητα στη Φυσική που απέδειξε πάλι ο Poincaré. Κάθε συνάρτηση ϕ που μηδενίζεται στα $\phi(\pm L) = 0$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi z}{2L}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2n\pi z}{2L}\right), \quad (19)$$

250 τότε επειδή οι συναρτήσεις είναι ορθογώνιες έχουμε προφανώς:

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-L}^L |d\phi/dz|^2 dz}{\int_{-L}^L |\phi|^2 dz} &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 + |\beta_n|^2 \left(\frac{2n\pi}{2L}\right)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2} \\ &\geq \frac{\pi^2}{4L^2}. \end{aligned}$$

251 Αυτή είναι η ανισότητα Poincaré που προσδιορίζει πόσο μεγαλύτερο μπορεί να είναι το ολοκλήρωμα
 252 του τετράγωνου της παραγώγου μίας συνάρτησης που μηδενίζεται στα άκρα από το ολοκλήρωμα του
 253 τετράγωνου της συνάρτησης. Εξ' αυτού προκύπτει δεδομένου ότι $g(z) \geq 0$ η εκτίμηση για τον αργότερο
 254 εκθέτη (18) ο οποίος σε μεγάλους χρόνους χαρακτηρίζει την εκθετική απόσβεση της διαταραχής και
 255 τη χρονική κλίμακα απόσβεσής της.

Τώρα υπάρχει μία ιδιαίτερη ιδιοσυνάρτηση, οποία είναι πιο εύκολο να συζητηθεί στα πλαίσια της (15). Είναι η

$$\hat{u}_1 = \frac{du_0}{dz}, \quad (20)$$

με προφανή ιδιοτιμή $\lambda = 0$! Τι διαταραχή όμως είναι η (20) και γιατί είναι προφανές, αν πράγματι ικανοποιεί την (15), ότι πρέπει να έχει ιδιοτιμή $\lambda = 0$; Λόγω της ομογένειας της (1) ως προς x , αν η $u(x, t)$ ικανοποιεί την (1) θα την ικανοποιεί και η $u(x + \varepsilon, t)$, $\forall \varepsilon$. Ομοίως αν η $u_0(z)$ ικανοποιεί την (13) τότε θα την ικανοποιεί και η μετατοπισμένη $u_0(z + \varepsilon)$. Υποθέστε τώρα ότι η διαταραχή που επιβάλλω είναι μία μικρή κατά ε μετατόπιση της κυματικής λύσης, $u_0(z + \varepsilon)$. Στην γραμμική προσέγγιση η διαταραχή

που επιβάλλω είναι η

$$u_1(z, t) = u_0(z + \varepsilon) - u_0(z) = \varepsilon \frac{du_0}{dz},$$

η οποία προφανώς δεν θα μεταβληθεί διότι ικανοποιεί ακριβώς την εξίσωση και συνεπώς δεν έχει εξάρτηση από τον χρόνο και έχει $\lambda = 0$. Ότι η (20) είναι ιδιοτιμή της (15) με ιδιοτιμή $\lambda = 0$ έχει κατ'ουσίαν ήδη αποδειχθεί. Αλλά ας το δούμε πάλι. Αν λάβουμε την παράγωγο της (13) ως προς z έχουμε

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{du_0}{dz} \right) + c \frac{d}{dz} \left(\frac{du_0}{dz} \right) + (-1 + 2u_0) \left(\frac{du_0}{dz} \right) = 0, \quad (21)$$

256 η οποία δίνει ότι η du_0/dz ικανοποιεί την (15) και τις συνοριακές συνθήκες με $\lambda = 0$ (είναι σίγουρα
257 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} du_0/dz = 0$).

258 **Άσκηση:** Από την (18) δημιουργείται η υποψία ότι ο ρυθμός απόσβεσης των διαταραχών
259 μικραίνει όσο μεγαλώνει το εύρος των διαταραχών. Εξετάστε αυτή την πρόταση με αριθμη-
260 τικά πειράματα.