Τρίτη 5 Μαΐου

$$\ddot{x} + x = 0$$

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x$$

$$\frac{d}{dt}\psi = A\psi$$

$$\psi = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = v(x, \alpha)}$$ δυναμικό σύστημα

$$x(0) = x_0$$

$$x(t, x_0, \alpha)$$

μοναδική δεδομένης της

$x_0 \longrightarrow$ να υπάρχει μία και μία λύση

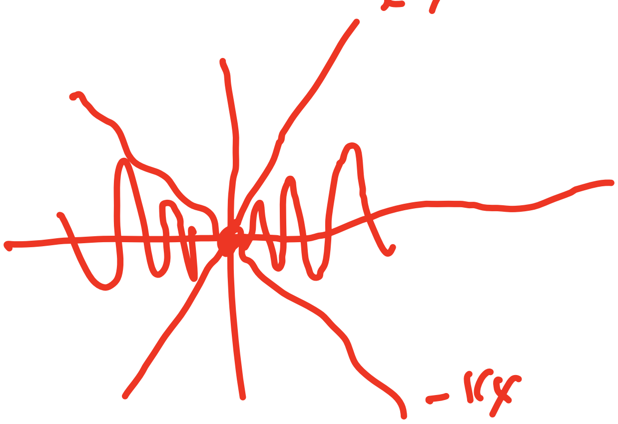
και να ισχύει για όλους τους χρόνους.

$\frac{\partial v}{\partial x}$ να υπάρχει παντού

άρα Lipschitz

$$|v(x) - v(y)| \leq K|x - y|$$

$\forall x$

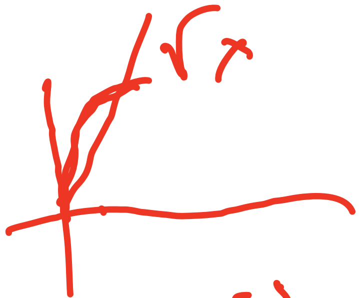


$\dot{x} = \sqrt{x}$

$x(0) = 0$

$|\sqrt{x} - \sqrt{0}|$

δεν ισχύει $K|x|$



δεν είναι

Lipschitz

δεν είναι φραγμένη

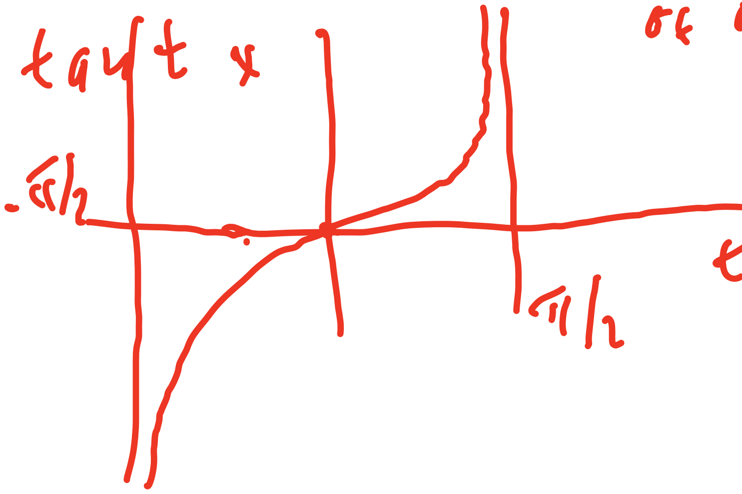
$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x} = 1 + x^2 \\ &x(0) = 0 \end{aligned}}$$

$\dot{x} = x^a \qquad a \neq 1$

$\dot{x} = x$

Γραμμικές εξισώσεις

$x(t) = \tan t$



σε πεπερασμένο t

$x(t) \to \infty$.

Peano ~ 1850

$\rightarrow \dot{x} = v(x) \qquad x(0) = x_0$

για να υπάρχει λύση

αρκεί η $v(x)$ να είναι συνεχής

Αν επιθυμεί να γράψει $x = x_0 + \int_0^t v(x(s))\,ds$

$\dot{x} = v(x) \qquad x(0) = x_0$

$$\frac{dx}{v(x)} = dt \qquad t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{v(x')} = F(x, x_0)$$

$v(x) \neq 0$ σε 1 διάσταση λύση $x(t, x_0)$

εάν $v(x) \neq 0$

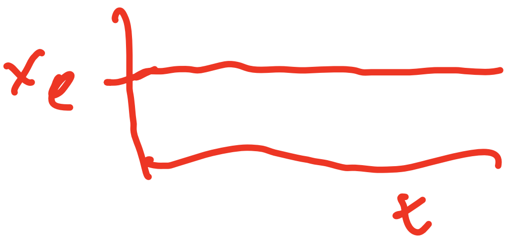
Όλο το πρόβλημα [illegible] όταν $v(x) = 0$

Τι είναι τα x αν κινεί [illegible]

$\dot{x} = v(x)$ $\qquad x(0) = x_e$

$v(x_e) = 0$

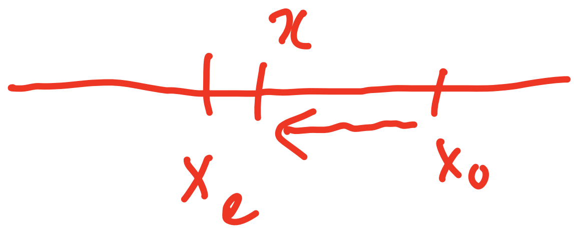
Τότε έχω λύση $\quad \underline{x(t) = x_e}$



$\dot{x} = \sqrt{x}$

$x(0) = 0$

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{v(x')}$$



$$\lim_{x \to x_e} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{v(x')} = \infty$$

ή λύση είναι μοναδ<u>ική</u>

υπάρχει μοναδική λύση

<u>όταν</u> ο χρόνος για να πάει στο σημείο x_e είναι άπειρος;

$$\int \frac{dx}{v} < \int \frac{dx}{x} = \infty$$

Text
Text

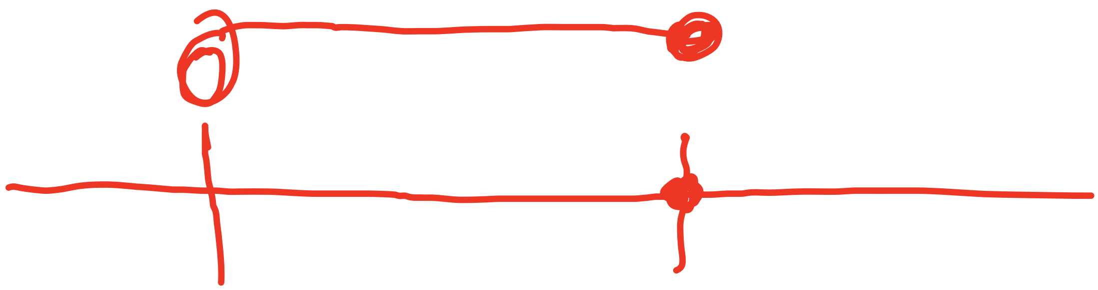
$\log x \to \infty$

$x \to 0$

διόρθωσις

η ανισότητα είναι από την άλλη μεριά

$x(0) = x_e$



$$\dot v = \begin{cases} -1 & v > 0 \\ 0 & v = 0 \\ 1 & v < 0 \end{cases}$$

$x(0) = x_0$

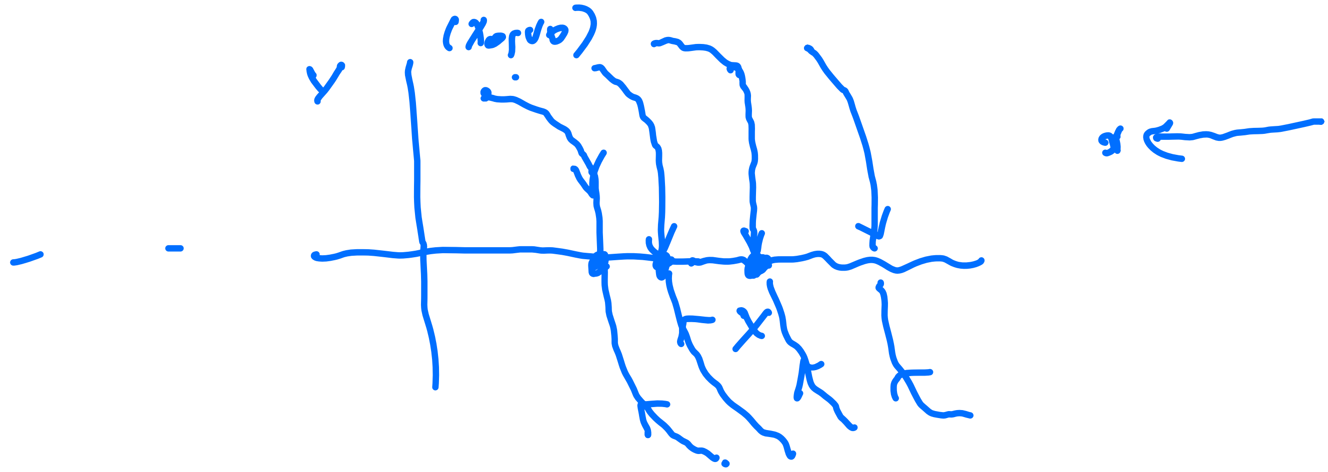
$v(0) = v_0$

$\dot x = v$

$v_0 > 0$ $\quad v = v_0 - t$ $\quad t \le v_0$

$\boxed{t = v_0}$

$x = x_0 + v_0 t - t^2/2$



$$\dot{x} = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$x(0) = 0$

~~Καραθεοδωρή~~

$\rightarrow \dot{x} = f(x)$

$$\rightarrow \boxed{x = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds}$$

weak solution

ασθενή λύση

$$\boxed{\dot{x} = v(x, \alpha)} \qquad x(0) = x_0$$

$x(t, x_0, \alpha)$

$\in \alpha$ Y έχει συνεχή [illegible]

[illegible] ως προς x, α

Τότε η $x(t, x_0, \alpha)$

Είναι συνεχής και απειροδιαφορίσιμη συνάρτηση των t, x_0, α!

$$\ddot{x} + \alpha x = 0 \qquad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

$\alpha > 0$ $\quad \boxed{\cos\sqrt{\alpha}t} \quad \boxed{\sin\sqrt{\alpha}t}$

$\alpha = 0$ $\quad 1 \quad t$

$\alpha < 0$ $\quad e^{\sqrt{\alpha}t} \quad e^{-\sqrt{\alpha}t}$

$$x = x_0 \cos(\sqrt{\alpha}t) + \frac{v_0}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha}t)$$

$\alpha > 0$

$\alpha \to 0$

$$x = x_0 + v_0 t$$

Picard $\quad x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_n(s))\,ds, \qquad x_1(0) = x_0,$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t f(x_1(s))\,ds$$

$$x_3(t) = x_0 + \int_0^t f(x_2(s))\,ds$$

$$\vdots$$

η ακολουθία συγκλίνει ο Picard–Lindelöf

εάν η f Lipschitz
τότε η συγκλίνει
η ακολουθία

$$\dot{x} = \alpha x \qquad x(0) = x_0$$

$$x_{n+1} = x_0 + \int_0^t \alpha\, x_n(s)\,ds \qquad \underline{x_1 = x_0}$$

$$x_2 = x_0 + \int_0^t \alpha x_0\, ds = \underline{x_0 + x_0 t\alpha}$$

$$x_3 = x_0 + \int_0^t \alpha\left(x_0 + \alpha x_0 s\right) ds$$

Born approximation

$$= x_0 + \alpha x_0 t + \alpha^2 \frac{x_0 t^2}{2}$$

$$x_4 = x_0 + \alpha x_0 t + \alpha^2 \frac{x_0 t^2}{2} + \alpha^3 \frac{x_0 t^3}{3!} \ldots$$

$$X = \left(1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} + \cdots\right) x_0$$

$$e^{\alpha t}$$

$$\boxed{x^2 - \varepsilon x - 1 = 0}$$

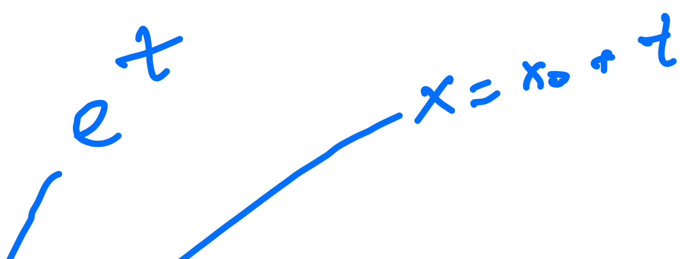
$$\to x^2 = 1 + \varepsilon x \qquad \varepsilon = 0 \qquad x = 1$$

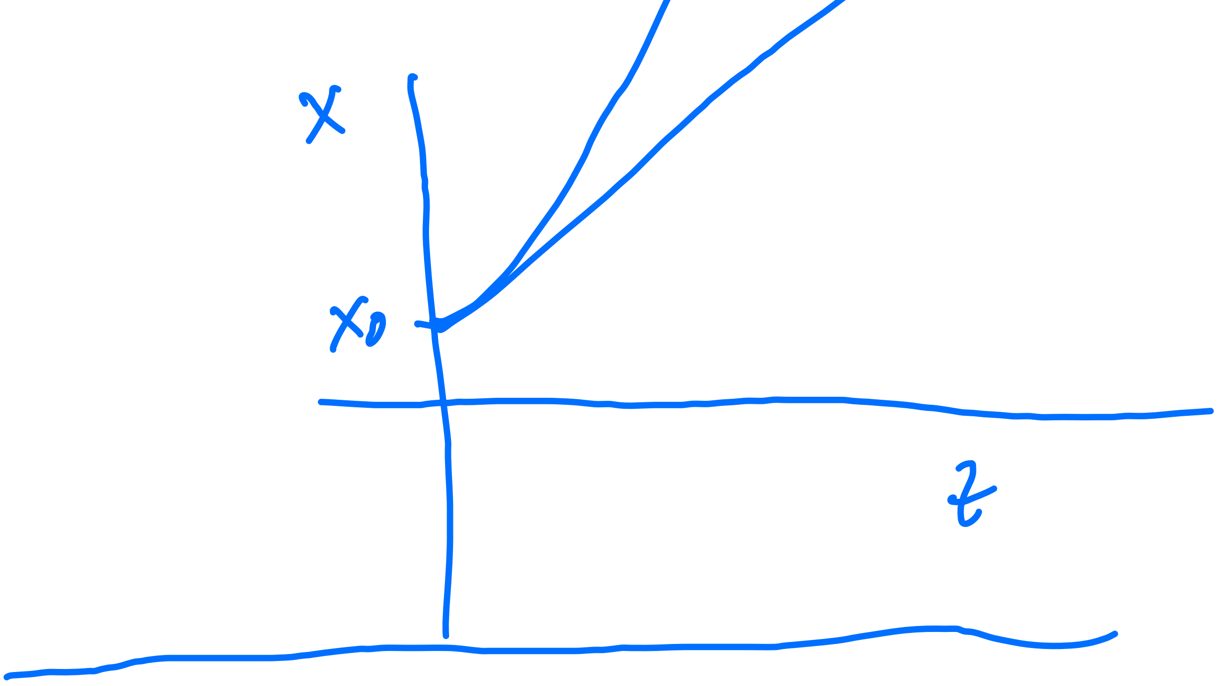
$$x_{n+1}^2 = 1 + \varepsilon x_n \qquad x_1 = 1$$

$$x_2 = \sqrt{1+\varepsilon}$$

$$x_3 = \sqrt{1+\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon}}$$

$$X = 1 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \cdots$$




x
x0
t