Παρασκευή 1 Μαρτίου

γραμμική vs μη γραμμικές

x_1 είναι λύση της διαφορικής

x_2 είναι λύση και διαφορικής

$\alpha x_1 + \beta x_2$ είναι επίσης λύση

εάν

$$\dot{x} = L x$$

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2)$$

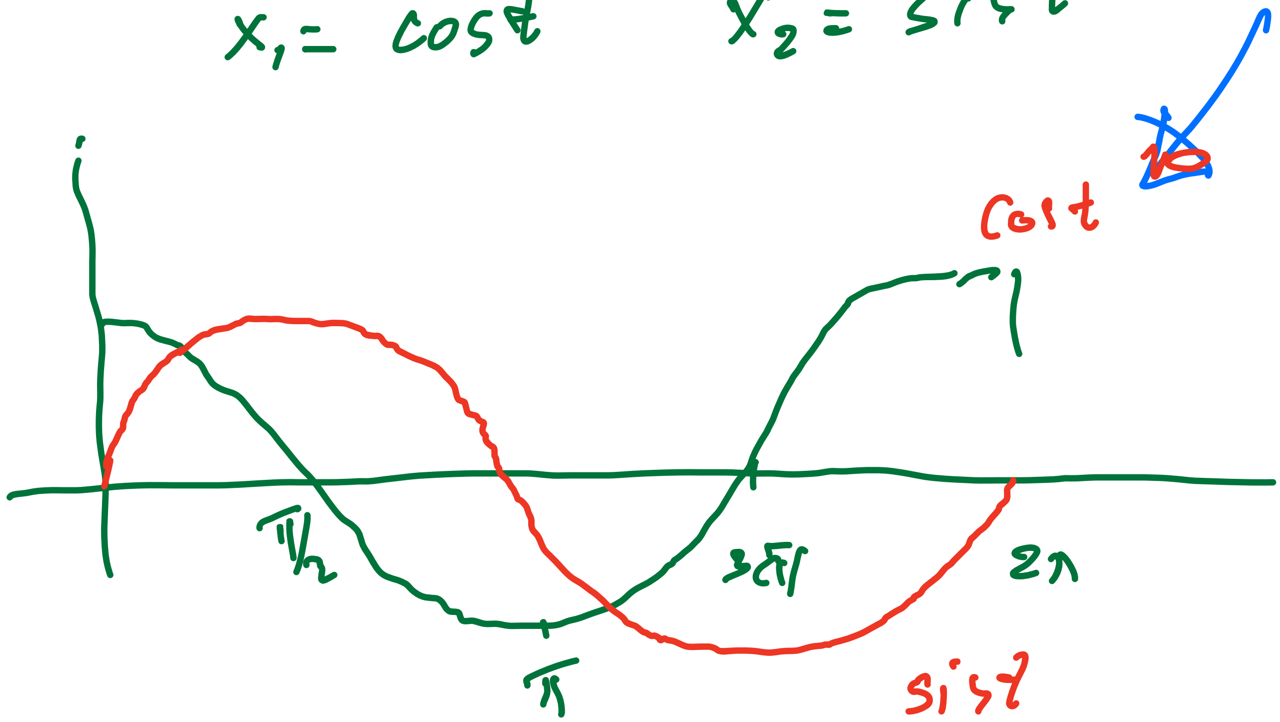
$$L(x_1) = 0$$

$$L(x_2) = 0$$

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = 0$$

$$\ddot{x} + x = 0$$

$x_1 = \cos t$ $\quad$ $x_2 = \sin t$



$T = 2\pi$
ανεξάρτητη
από την
ενέργεια

$\cos t + \sin t$
είναι και αυτή
λύση!

$$\cos t + \sin t = \frac{2}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \pi/4\right)$$

$$1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \cdots\cdots$$

$$\cancel{\partial^2 x}$$

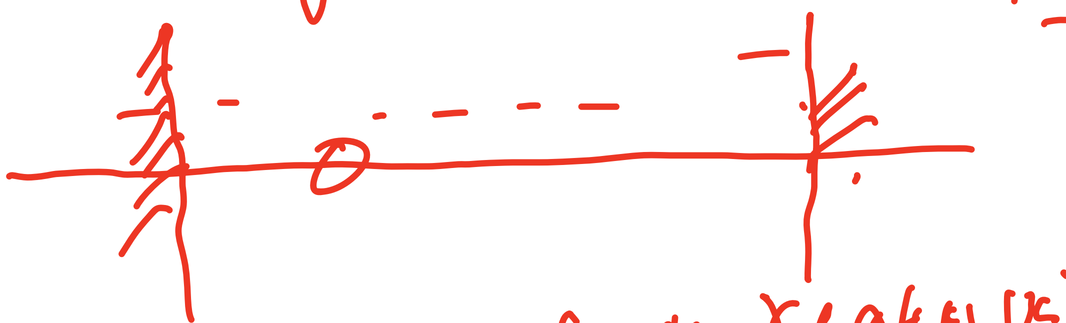
$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - 1\right)\dot{x} = 0$$

$$\underbrace{}_{L}$$

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2)$$

---

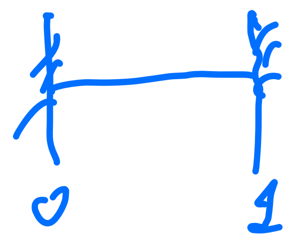
1 διάσταση



Ερώτηση: είναι γραμμικό?

Τι πρόβλημα?

$$T = \frac{L}{v} = \frac{L}{\sqrt{\frac{2E}{m}}}$$

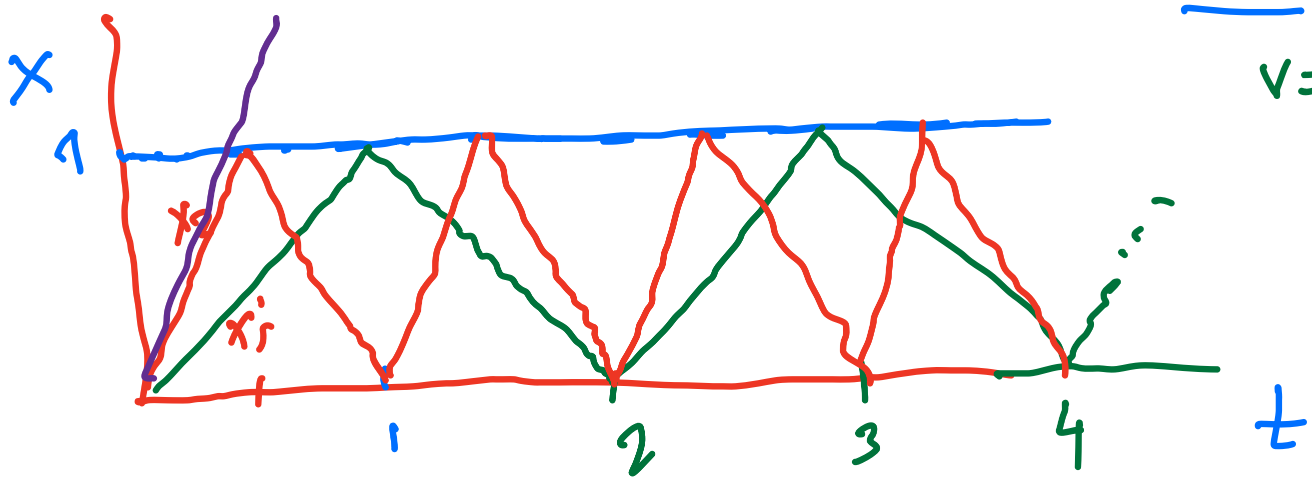


$$T(E) \sim \frac{1}{\sqrt{E}}$$

$L = 1$

$v = 1$

$v = 2$



χάος

$x_1 + x_2$ δεν είναι

$$\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \qquad x = [-1, 1]$$

$$\boxed{V = \lim_{n\to\infty} x^{2n}} \qquad n > 1$$

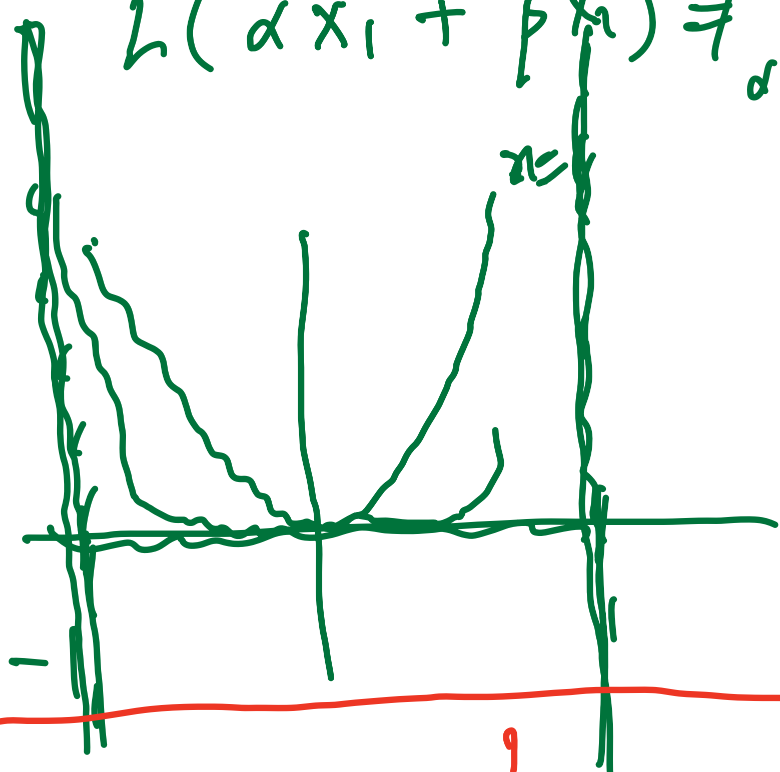
$$\underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2} + (2n-1)\,x^{2n-2}\right)}_{L} x = 0$$

$n > 1$

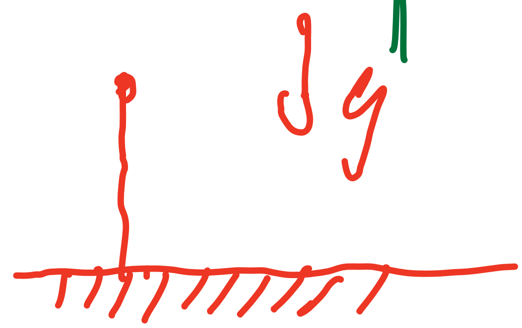
$n = 1$

$2n - 1 = 1$

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) \neq \alpha L(x_1) + \beta L(x_2)$$



Άρα.



Είναι πολύπλοκη; Τι συμβαίνει στο $x = 1$

$\ddot{x} + x = 0$

$y = x^2$

$\dot{x} = x^2$

$\dot{x} = y$

$\dot{y} = 27$

$\vdots$

$x^2 = y$

$\dot{y} = 2x\dot{x}$

$= 2x^3$

$z = x^3$

ανf. ρτ

δι ε.

γραφικη λύση !

$\cancel{\dot{x}} \cancel{=} \cancel{Ax}$

$\boxed{\dot{\psi} = A \cdot \psi}$

$(=A(x))$

$A = \frac{\partial}{\partial x}$

$\psi(t)$

$\psi(\vec{x}, t)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A \psi \qquad A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdots\right)$$

$$\psi(t) = e^{tA} \psi(0)$$

$$\boxed{e^{tA} = 1 + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots\cdots}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{tA}{n}\right)^n$$

$$\underline{e^{t\frac{\partial}{\partial x}}} = 1 + t\frac{\partial}{\partial x} + \cdots\cdots$$

$$\boxed{e^{t\frac{\partial}{\partial x}} f(x) \quad ?}$$

δείτε την άσκηση

e^{tA}

<u>ιδιότητες</u>

tA

$$\psi(0) \xrightarrow{e^{tA}} \psi(t)$$

Poincaré

$$\psi(t) = e^{tA}\psi(0)$$

$$\psi(0) \xrightarrow{e^{tA}} \psi(t)$$

$$\psi(0) \xrightarrow{g^{t}} \psi(t)$$

$$\boxed{g^{t_1+t_2} = g^{t_2}\, g^{t_1} = g^{t_1}\, g^{t_2}}$$

$$\psi(0) \xrightarrow{g^{t_1}} \psi(t_1) \xrightarrow{g^{t_2}} \psi(t_1+t_2)$$

$$\psi(0) \xrightarrow{g^{t_2}} \psi(t_1) \xrightarrow{g^{t_2}} \psi(t_1+t_2)$$

$$e^{t_1 A} e^{t_2 A} = e^{(t_1+t_2)A}$$

$$e^{t_1 A} e^{t_2 B} \neq e^{t_2 B} e^{t_1 A}$$

εκτός εάν $[A,B]=0$

Γραμμικά ικανά να πούμε
η λύση e^{tA} να
είναι ανεξάρτητη από
την αρχική κατάσταση!

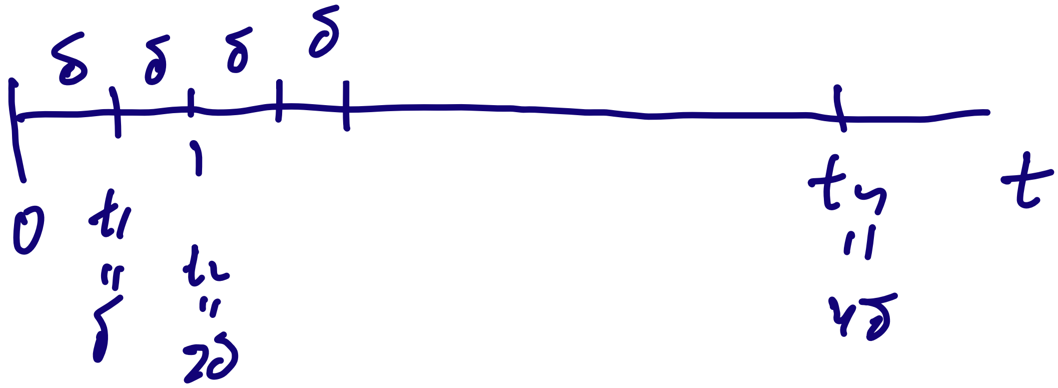
Στα μη γραμμικά όμως
η εξέλιξη εξαρτάται
από την κατάσταση!

ξ^t

$D\phi_0$

$$\dot{x} = x(1-x) \qquad x(0) = x_0$$

λογιστική
<u>εξίσωση</u>



$$\dot{x} = \underbrace{(1-x)}_{A(x)}\, x$$

για χρόνια
μικρό $\underline{\delta}$

$$x_1 = e^{\delta A(x_0)} x_0 = e^{\delta(1-x_0)} x_0$$

$$x_2 = e^{\delta A(x_1)} x_1 = e^{\delta(1-x_1)} e^{\delta(1-x_0)} x_0$$

$$x_4 = \underbrace{e^{\delta(1-x_{4-1})} \cdots\cdots e^{\delta(1-x_0)}}_{g^{t_4}} x_0$$

$$\dot{x} = \alpha x$$

$$x_4 = \underbrace{e^{4\delta\alpha}}_{g^{t_4}} x_0$$

$$\dot{x} = f(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right) x$$

Poincaré $\boxed{\text{1 - βαθμού ελευθερίας}}$

$\dot{x} = f(x)$ $\qquad \boxed{x \in \mathbb{R}}$

$\mathbb{R}$.

1 - βαθ. ελ. → στα σημεία ισορροπίας

2 - βαθμοί

Poincaré - Bendixson

$$\dot{x} = f(x,y)$$
$$\dot{y} = g(x,y)$$

αυτόνομη

εάν υπάρχει εξάρ. από ο χρόνο
μη αυτόνομη

x εξ ... μπορεί να γίνει αυτόνομα αν ...

$$\dot{x} = f(x,t) \qquad t = y$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = 1 \end{cases}}$$

$$\ddot{x} + x = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}}$$

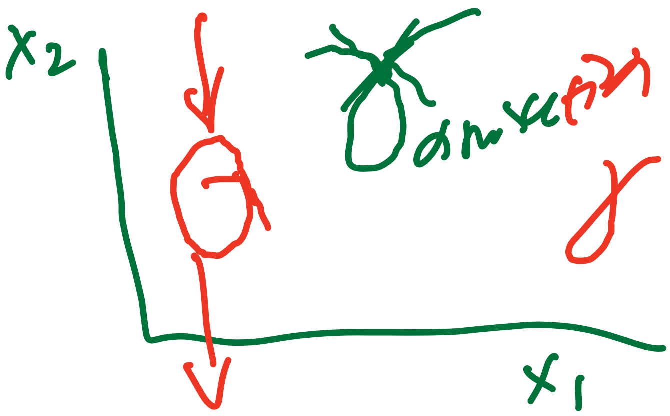
2-Βδ

περιοδική κίνηση ή σημεία ισορροπίας

δεν γίνεται αυτό

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f(x_1,x_2)}{g(x_1,x_2)}$$



found

$x=0$ Ταβάνι ακίνητη ή αργά.

$\downarrow$ $g = 1/2$

$x \downarrow$ $|x$

<u>Ενέργεια</u>

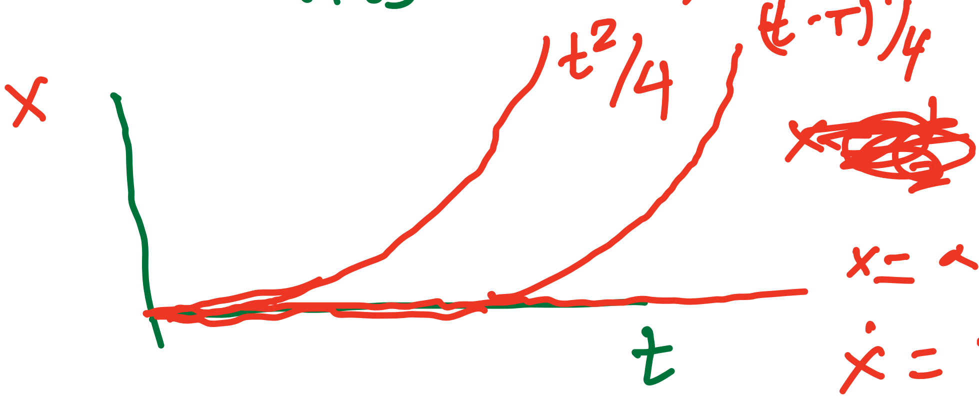
$$v^2 = 2gx = x$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x} = \sqrt{x}}$$

$x \geq 0$

$x(0) = 0$

$$x(t) = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 = \sqrt{0}$$ είναι <u>λύση</u>



$x = \alpha t^n$

$\dot{x} = n\alpha t^{n-1}$

$$n\alpha t^{n-1} = \sqrt{\alpha}\, t^{n/2}$$

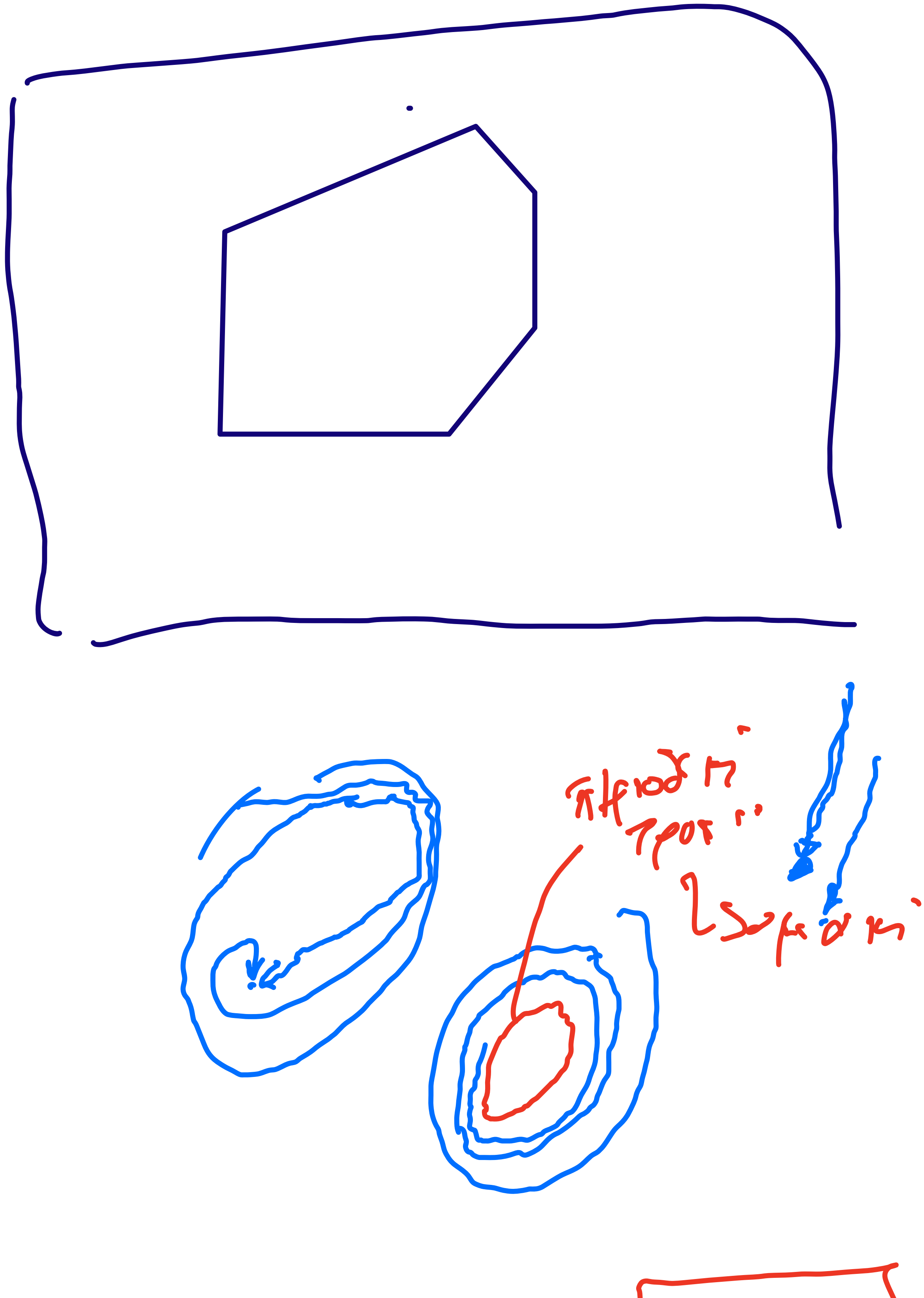
$$n - 1 = \frac{n}{2} \qquad \frac{n}{2} = 1 \qquad \underline{n = 2}$$

$$2\alpha = \sqrt{\alpha} = \quad \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}$$

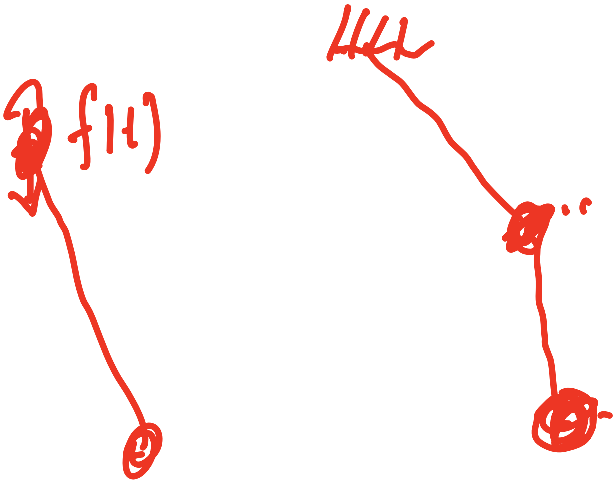
$$\alpha = \frac{1}{4} \qquad x = \frac{t^2}{4}$$

$$x(t) = t^2/4 \qquad \dot{x} = \frac{t}{2} = \sqrt{x} = \frac{t}{2}$$

$$
\left.\begin{aligned}
x(t) &= 0, \quad 0 \le t \le T \\
x(t) &= \frac{1}{4}(t-T)^2 \quad T < \infty
\end{aligned}\right\}
$$



3 - διαστάσεις → $\boxed{\text{χάος}}$



4

Χαρτης