Παράρτημα

Μαθηματικά Εργαλεία

"...είχα ενδοιασμούς σχετικά με
τα πλεονεκτήματα των διάφορων συμβολισμών
και αυτό ήταν που με έκανε να αναβάλλω τη
δημοσίευση των αποτελεσμάτων της έρευνάς μου.
Δεν μπορούσα να προχωρήσω σε καμιά δημοσίευση...
Είχα μια έντονη αίσθηση ότι υπήρχε κάτι ακατέργαστο
στον τρόπο που χρησιμοποιούσα τα σύμβολα."
Josiah Willard Gibbs

"΄Εχω αποκτήσει πλέον μεγάλο σεβασμό για τα μαθηματικά,
τα λεπτότατα σημεία των οποίων, με το φτωχό μου μυαλό,
τα θεωρούσα έως τώρα καθαρή πολυτέλεια!"
Albert Einstein

Α-1 Δείκτες και αθροιστική σύμβαση

Στη φυσική χειριζόμαστε αντικείμενα, τα οποία προσδιορίζονται από μια πλειάδα αριθμών. Πρώτιστο παράδειγμα τέτοιων αντικειμένων είναι τα διανύσματα, τα οποία προσδιορίζονται από την τριάδα των συνιστωσών τους σε ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αξόνων $\vec{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$, όπου a_1 είναι η συνιστώσα στον πρώτο άξονα, a_2 στο δεύτερο και a_3 στον τρίτο. Το αντικείμενο, όμως, αυτό μπορεί απλά να συμβολισθεί με τη συντομογραφία a_i, όπου ο δείκτης i διατρέχει όλες τις δυνατές τιμές, που σε αυτή την περίπτωση είναι $i = 1, 2, 3$. Ενώ η συντομογραφία a_i αναφέρεται στη συγκεκριμένη i-οστή συνισταμένη του $\vec{a}$, επειδή η τιμή του i δεν έχει δηλωθεί (π.χ. $i = 1$), το a_i προσδιορίζει συγχρόνως ολόκληρο το αντικείμενο $\vec{a}$, δηλώνοντας άμεσα όλα τα στοιχεία του. Με αυτόν το συμβολισμό, αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι ίσα, αρκεί να γράψουμε $a_i = b_i$.

Θα γράφουμε a_i, αντί του $\vec{a}$

Χρησιμοποιώντας τους δείκτες, έχουμε τη δυνατότητα να χειριστούμε σύνθετα αντικείμενα με πολύ οικονομικό τρόπο. ΄Οταν γράφουμε $a_i b_j$, εννοούμε ένα από τα εννέα γινόμενα που σχηματίζονται από τις τρεις συνιστώσες του $\vec{a}$ και τις τρεις συνιστώσες του $\vec{b}$ και συγκεκριμένα το γινόμενο της i-οστής συνιστώσας του $\vec{a}$ με την j-οστή συνιστώσα του $\vec{b}$. Επειδή, όμως, και πάλι δεν καθορίζεται η ακριβής τιμή των i και j, το παραπάνω αντικείμενο προσδιορίζει και το γινόμενο κάθε i-οστής συνιστώσας του $\vec{a}$ με κάθε j-οστή συνιστώσα του $\vec{b}$, δηλώνοντας με τρόπο έμμεσο και τα εννέα στοιχεία του σύνθετου αυτού αντικειμένου. Όταν, όμως, γράφουμε το γενικό στοιχείο σύνθετων αντικειμένων με αυτό τον τρόπο, πρέπει να προσέχουμε να χρησιμοποιούμε διαφορετικό γράμμα για κάθε δείκτη· εδώ χρησιμοποιήσαμε τα i και j. Αν το αντικείμενο a έχει N στοιχεία και το b έχει M στοιχεία, τα $a_i b_j$, υπό την έννοια που αναφέραμε, συμβολίζουν τα $N \times M$ γινόμενα που σχηματίζονται από τα στοιχεία του a και του b. Στη συνέχεια, για λόγους απλούστευσης, θα θεωρήσουμε ότι οι δείκτες λαμβάνουν μόνο τρεις τιμές.

Με την ίδια λογική, όταν γράφουμε A_{ij}, εννοούμε το αντικείμενο $\mathbf{A}$ που αποτελείται από εννέα στοιχεία (θεωρώντας ότι αναφερόμαστε σε έναν τρισδιάστατο χώρο). Το αντικείμενο αυτό μπορεί να παρασταθεί και ως ένας πίνακας 3×3. Ομοίως, το $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ προσδιορίζει το αντικείμενο $\mathbf{A}$ που έχει 3^n στοιχεία.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της χρήσης των δεικτών στη φυσική είναι η συντόμευση της γραφής πολύπλοκων σχέσεων. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ένα γενικό γραμμικό μετασχηματισμό των τριών συντεταγμένων $x \to x'$, όπου με x εννοούμε τις τρεις συντεταγμένες x_i και με x' τις x'_i. Ο μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί διεξοδικά ως εξής:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ , \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ , \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ . \end{aligned}$$

Αυτός, όμως, ο τρόπος γραφής είναι εκτενής και επίπονος. Ο ίδιος μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί πιο σύντομα και κομψά με τη χρήση δεικτών ως ακολούθως:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \ . \tag{A-1}$$

Μία ακόμη μεγαλύτερη συντόμευση αυτής της έκφρασης μπορεί να επιτευχθεί με την παράλειψη του συμβόλου της άθροισης. Στην (A-1) παρατηρούμε ότι οι δείκτες j που εμφανίζονται δύο φορές είναι οι δείκτες στους οποίους γίνεται η άθροιση. Έτσι, στις περιπτώσεις επαναλαμβανόμενων δεικτών μπορούμε να παραλείψουμε το σύμβολο της άθροισης και να συμφωνήσουμε ότι, όταν εμφανίζονται ζευγάρια δεικτών σε γινόμενα αντικειμένων, οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες θα λαμβάνουν όλες τις δυνατές τιμές και τα αντικείμενα που προκύπτουν θα αθροίζονται. Αυτή είναι η *αθροιστική σύμβαση* που εισήχθη από τον Αϊνστάιν. Σύμφωνα, λοιπόν, με αυτή τη σύμβαση, τη σχέση (A-1) μπορούμε να τη γράψουμε ως

Η αθροιστική σύμβαση του Αϊνστάιν

$$x'_i = a_{ij} x_j \ . \tag{A-2}$$

Ο επαναλαμβανόμενος δείκτης j, επειδή λαμβάνει όλες τις δυνατές τιμές, μπορεί να αντικατασταθεί με κάποιο άλλο γράμμα, όπως συμβαίνει και με τις μεταβλητές ολοκλήρωσης, οι οποίες μπορούν να παρασταθούν με οποιοδήποτε γράμμα. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να γράψουμε την (Α-2) ισοδυνάμως ως $x'_i = a_{ik}x_k$. Γι' αυτόν το λόγο οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες ονομάζονται *εικονικοί δείκτες* (*dummy indices*).[1] Άλλο παράδειγμα σύντομης γραφής σχέσης με αθροιστική σύμβαση είναι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}\cdot\vec{b}$, που βάσει αυτής της σύμβασης γράφεται ως

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i \ .$$

Απαιτείται, βέβαια, προσοχή ώστε να μην επαναλαμβάνεται το ίδιο γράμμα δείκτη πάνω από δύο φορές, διότι τότε η έκφραση δεν έχει σαφές νόημα. Για παράδειγμα, η έκφραση $a_i b_i c_i d_i$ στερείται νοήματος στην αθροιστική σύμβαση· σημαίνει

Ποτέ πάνω από δύο φορές το ίδιο γράμμα!

$$a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_2 + a_3b_3c_3d_3 \ ,$$

ή μήπως

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3) \ ;$$

Συνεπώς, αν θέλουμε να γράψουμε την έκφραση $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\cdot\vec{d})$ με αθροιστική σύμβαση, πρέπει να τη γράψουμε ως

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\cdot\vec{d}) = a_i b_i c_j d_j \ ,$$

χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικά γράμματα για τα δύο ζευγάρια εικονικών δεικτών. Θα ήταν, τέλος, σκόπιμο να αναφέρουμε ότι, από τη στιγμή που τα αντικείμενα που χειριζόμαστε δεν είναι τίποτε άλλο από γινόμενα καθαρών αριθμών, δεν έχει σημασία με ποια σειρά παραθέτουμε τους διάφορους όρους. Έτσι, η παραπάνω έκφραση δεν διαφέρει από την έκφραση

$$b_j d_i c_i a_j \ .$$

Α-2 Οι αριθμοί δ_{ij}

Ορίζουμε τους αριθμούς δ_{ij} ως εξής:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } i = j \ , \\ 0, & \text{όταν } i \neq j \ . \end{cases} \tag{Α-3}$$

Παρατηρούμε ότι τα δ_{ij} είναι τα στοιχεία του μοναδιαίου πίνακα. Το δ_{ij} ονομάζεται και *δέλτα του Kronecker*.

Το δ του Kronecker

Κάνοντας χρήση του δ_{ij}, μπορούμε να γράψουμε τις συνιστώσες ενός διανύσματος ως

$$a_i \ = \ \delta_{ij} a_j \ ,$$

[1]Dummy index σημαίνει κατά λέξη βουβός δείκτης, αλλά η μετάφραση εικονικός δείκτης, που πρότεινε ένας φοιτητής του Φυσικού Τμήματος Αθηνών, πιστεύουμε ότι είναι καλύτερη και γι' αυτόν το λόγο την υιοθετούμε.

ενώ το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; \delta_{ij} a_i b_j \; .$$

Επίσης, επειδή οι δείκτες i και j του δ_{ij} λαμβάνουν εδώ 3 τιμές, το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του μοναδιαίου πίνακα (το ίχνος του), γραμμένο με αθροιστική σύμβαση, γράφεται ως

$$\delta_{ii} \;=\; 3 \; .$$

Μία πολύ χρήσιμη ταυτότητα που εμφανίζεται συχνά, όταν παραγωγίζουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών είναι η

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \; .$$

Ο τελεστής ανάδελτα με δείκτες

Θα εφαρμόσουμε στη συνέχεια την παραπάνω ταυτότητα στον υπολογισμό της βαθμίδας της ακτινικής απόστασης ενός σημείου από την αρχή των αξόνων $\vec{\nabla} r$, όπου $r = |\vec{x}| = \sqrt{x_k x_k}$. Επειδή η βαθμίδα είναι διάνυσμα με συνιστώσες $\partial / \partial x_i$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} r)_i = \frac{\partial r}{\partial x_i} \;&=\; \frac{\partial \sqrt{x_k x_k}}{\partial x_i} \\
&=\; \frac{1}{2\sqrt{x_j x_j}} \, \frac{\partial (x_k x_k)}{\partial x_i} \\
&=\; \frac{x_k}{r} \, \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \\
&=\; \frac{x_k}{r} \, \delta_{ik} \\
&=\; \frac{x_i}{r} \, ,
\end{aligned}$$

δηλαδή αποδεικνύουμε ότι η βαθμίδα της ακτινικής απόστασης είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \; .$$

Προσέξτε ότι στην παραπάνω μαθηματική ανάλυση, αν και δεν υπήρχε κίνδυνος σύγχυσης, σκοπίμως αποφύγαμε στο δεύτερο βήμα να χρησιμοποιήσουμε για δεύτερη φορά το ζεύγος των εικονικών δεικτών k και εισαγάγαμε ένα νέο ζεύγος εικονικών δεικτών j.

Ομοίως, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$. Η απόκλιση δίνεται, βάσει της αθροιστικής σύμβασης, από τον τύπο

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \; .$$

Επομένως, η απόκλιση του διανύσματος θέσεως $\vec{x}$ είναι

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{x} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii} = 3 \; .$$

Επίσης, ορίζουμε τη Λαπλασιανή ως τον τελεστή που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσματικών τελεστών παραγώγισης

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \,.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Α-1. *Δείξτε ότι*

$$\vec{\nabla} V(r) = \frac{dV}{dr} \frac{\vec{x}}{r} \,.$$

Άσκηση Α-2. *Δείξτε ότι για $r \neq 0$ ισχύει*

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \,.$$

Α-3 Οι αριθμοί ϵ_{ijk}

Ο αντισυμμετρικός τανυστής

Ορίζουμε τους 27 αριθμούς ϵ_{ijk} ως εξής: (i) Εάν δύο δείκτες από τους i,j,k είναι ίσοι, τότε $\epsilon_{ijk} = 0$. (ii) Αν όλοι οι δείκτες έχουν διαφορετικές τιμές και εμφανίζονται στη σειρά των άρτιων μεταθέσεων του 123, δηλαδή στη σειρά 123 ή 312 ή 231, τότε $\epsilon_{ijk} = 1$. (iii) Αν όλοι οι δείκτες έχουν διαφορετικές τιμές και εμφανίζονται στη σειρά των περιττών μεταθέσεων του 123, δηλαδή στη σειρά 213 ή 321 ή 132, τότε $\epsilon_{ijk} = -1$. Δηλαδή, τα στοιχεία του ϵ_{ijk} είναι

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} &= +1 \,, \\ \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} &= -1 \,, \\ \epsilon_{ijk} &= 0 \,, \text{για όλες τις άλλες τριάδες} \,. \end{aligned}$$

Άρτιες και περιττές μεταθέσεις

Οι όροι *άρτια* και *περιττή μετάθεση* αναφέρονται στον αριθμό εναλλαγών των θέσεων δύο δεικτών που απαιτείται για να προκύψει η συγκεκριμένη σειρά των δεικτών ξεκινώντας από τη σειρά 123. Αν ο αριθμός των εναλλαγών είναι άρτιος, η μετάθεση λέγεται άρτια, ειδάλλως περιττή. Για παράδειγμα, για να προκύψει το 312 από το 123, απαιτείται πρώτα εναλλαγή του 3 με το 1, οπότε $123 \to 321$ και έπειτα εναλλαγή του 2 με το 1, οπότε $321 \to 312$ και ως εκ τούτου το 312 είναι άρτια μετάθεση του 123. Ομοίως προκύπτει ότι το 213 είναι περιττή μετάθεση του 123.

Άμεση συνέπεια του ορισμού της άρτιας και περιττής μετάθεσης είναι η αλλαγή του προσήμου του αριθμού ϵ_{ijk} στην περίπτωση εναλλαγής δύο δεικτών του. Για παράδειγμα, αν εναλλάξουμε τα i και j, λαμβάνουμε

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \,,$$

διότι, εάν η τριάδα ijk ήταν άρτια (περιττή) μετάθεση των 123, η τριάδα jik θα είναι περιττή (άρτια) μετάθεση. Επομένως, σε κάθε περίπτωση αλλάζει το πρόσημο του ϵ_{ijk}. Στις παραπάνω ιδιότητες του αντικειμένου ϵ_{ijk}

οφείλεται και η πομπώδης ονομασία του: *πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής τρίτης τάξης*. Η πλήρης αντισυμμετρικότητα εκφράζει την αλλαγή προσήμου σε κάθε δυνατή επιλογή δεικτών, ενώ το γεγονός ότι το αντικείμενο αυτό είναι τανυστής οφείλεται στο ότι διατηρεί ακριβώς την ίδια μορφή σε μετασχηματισμούς στροφών. Κατ' αναλογίαν με τον ϵ_{ijk} μπορεί να κατασκευάσει κανείς έναν αντίστοιχο αντισυμμετρικό τανυστή για ένα διανυσματικό χώρο διάστασης N, μόνο που τότε ο τανυστής θα έχει N δείκτες.

Ας θεωρήσουμε τώρα το άθροισμα

$$\epsilon_{ijk} a_k \tag{A-4}$$

στο οποίο ο δείκτης k επαναλαμβάνεται. Από αυτό το άθροισμα ορίζονται οι εννέα αριθμοί A_{ij}, οι οποίοι σχηματίζουν έναν αντισυμμετρικό πίνακα. Πράγματι, λόγω της αντισυμμετρικής ιδιότητας των ϵ_{ijk} ισχύει ότι

Ένας αντισυμμετρικός πίνακας από διάνυσμα

$$A_{ij} = \epsilon_{ijk} a_k = -\epsilon_{jik} a_k = -A_{ji} \ .$$

Ο πίνακας A_{ij} έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{A-5}$$

Κάθε αντισυμμετρικός 3×3 πίνακας $\mathbf{A}$ έχει τρία μόνο ανεξάρτητα στοιχεία, οπότε από την (A-5), θέτοντας $a_1 = A_{23}$, $a_2 = A_{31}$ και $a_3 = A_{12}$, συνάγουμε ότι κάθε αντισυμμετρικός 3×3 πίνακας ορίζεται από ένα διάνυσμα μέσω της (A-4).

Ας θεωρήσουμε επίσης το άθροισμα

$$\epsilon_{ijk} a_j b_k \ , \tag{A-6}$$

στο οποίο οι δείκτες j και k επαναλαμβάνονται. Για κάθε τιμή του δείκτη i έχουμε ένα άθροισμα εννέα αριθμών. Οι όροι, όμως, του αθροίσματος που αντιστοιχούν σε τιμές των δεικτών για τους οποίους $j = i$, $k = i$, ή $j = k$, είναι μηδενικοί, διότι τότε $\epsilon_{ijk} = 0$. Επομένως, οι μόνοι μη μηδενικοί όροι είναι αυτοί για τους οποίους οι δείκτες λαμβάνουν διαφορετικές τιμές και συνεπώς για κάθε i το άθροισμα (A-6) έχει μόνο δύο μη μηδενικούς όρους. Για παράδειγμα, για $i = 1$ η (A-6) είναι η

$$\epsilon_{1jk} a_j b_k = \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \ .$$

Με κυκλική μετάθεση του παραπάνω αποτελέσματος βρίσκουμε ότι

$$\epsilon_{2jk} a_j b_k = a_3 b_1 - a_1 b_3 \ , \ \epsilon_{3jk} a_j b_k = a_1 b_2 - a_2 b_1 \ .$$

Το $\epsilon_{ijk} a_j b_k$ δίνει, λοιπόν, τις συνιστώσες του εξωτερικού γινομένου $\vec{a} \times \vec{b}$. Πράγματι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι

Το εξωτερικό γινόμενο μέσω του ϵ_{ijk}

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{e}_3 \ ,\end{aligned}$$

όπου $\hat{e}_i$ είναι τα τρία μοναδιαία διανύσματα στη διεύθυνση των τριών αξόνων.

Από τα παραπάνω προκύπτει η σχέση

$$\epsilon_{ijk}a_ja_k = 0 \ , \tag{A-7}$$

για οποιαδήποτε a_i (γνωρίζετε εξάλλου ότι $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$). Γενικότερα, αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι συμμετρικός, δηλαδή αν $A_{ij} = A_{ji}$, τότε ισχύει

Συμμετρικό επί αντισυμμετρικό $= 0$

$$\epsilon_{ijk}A_{jk} = 0 \ . \tag{A-8}$$

Η σχέση αυτή αποδεικνύεται ως εξής:

$$\epsilon_{ijk}A_{jk} = \epsilon_{ikj}A_{kj} = -\epsilon_{ijk}A_{jk} \ ,$$

και συνεπώς ισχύει η (A-8). Στο πρώτο βήμα της απόδειξης εναλλάξαμε τις ονομασίες των εικονικών δεικτών j, k, ενώ στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε την αντισυμμετρική ιδιότητα του ϵ_{ijk} και τη συμμετρική ιδιότητα του A_{jk} για να εναλλάξουμε τη θέση των δεικτών j, k.

Χρησιμοποιώντας τα ϵ_{ijk}, ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου, $\vec{a}(\vec{x})$, γράφεται ως εξής:

Ο στροβιλισμός μέσω του ϵ_{ijk}

$$(\vec{\nabla}\times\vec{a})_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}a_k = \epsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j} \ .$$

Τέλος, αν χρησιμοποιήσουμε τα ϵ_{ijk}, το τριπλό γινόμενο διανυσμάτων $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ γράφεται ως

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \epsilon_{ijk}a_ib_jc_k \ .$$

Αν γράψουμε, τώρα, το τριπλό γινόμενο στη μορφή ορίζουσας, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\epsilon_{ijk}a_ib_jc_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \ . \tag{A-9}$$

Η μορφή αυτή του τριπλού γινομένου υποδεικνύει την άμεση σχέση που έχει το ϵ_{ijk} με τον ορισμό των οριζουσών (βλ. Εδάφιο 5 του παρόντος Μαθηματικού Παραρτήματος), αφού, αν στη θέση του πίνακα $\mathbf{A}$ ορίσουμε τα διανύσματα–γραμμές του $\mathbf{A}$, $a_j = A_{1j}$, $b_j = A_{2j}$ και $c_j = A_{3j}$, τότε η ορίζουσα του πίνακα, $\det(\mathbf{A})$, προκύπτει από την έκφραση (A-9)

Ορίζουσα και ϵ_{ijk}

$$\det(\mathbf{A}) = \epsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} \ .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Α-3. *Η συνάρτηση – πρόσημο,* sgn, *ορίζεται ως εξής:*

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0\,, \\ 0, & x = 0\,, \\ -1, & x < 0\,. \end{cases} \quad .$$

Δείξτε ότι το ϵ_{ijk} μπορεί να οριστεί μέσω αυτής της συνάρτησης ως εξής:

$$\epsilon_{i_1 i_2 i_3} \;=\; \mathrm{sgn}\left(\prod_{\substack{a<b \\ a,b=1,2,3}} (i_b - i_a) \right) .$$

Άσκηση Α-4. *Υπολογίστε τις ποσότητες $\delta_{ij}\delta_{jk}$, $\delta_{ik}\epsilon_{ikm}$.*

Άσκηση Α-5. *Δείξτε ότι*

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}\;,\;\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6\;.$$

Άσκηση Α-6. *Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του ϵ_{ijk}, δείξτε ότι*

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\;.$$

Άσκηση Α-7. *Βασιζόμενοι στο αποτέλεσμα της Άσκησης Α-6 και των ιδιοτήτων του ϵ_{ijk}, δείξτε ότι*

$$\epsilon_{lmn}\det(\mathbf{A}) = \epsilon_{ijk}A_{li}A_{mj}A_{nk}\;.$$

Α-4 Το γινόμενο $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}$

Μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες των αριθμών ϵ_{ijk} είναι μια ταυτότητα που ικανοποιείται από τους 81 αριθμούς

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}\;.$$

Στην παραπάνω έκφραση αθροίζουμε μόνο τους δείκτες i. Εάν $j = k$ ή $l = m$, τότε $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = 0$. Εάν $j = l$, τότε μόνο αν και $k = m$ (αλλά διαφορετικό από τα j, l) το $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}$ είναι μη μηδενικό και μάλιστα τότε είναι ίσο με 1. Εάν $j = m$, η παραπάνω έκφραση λαμβάνει τη μη μηδενική τιμή $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = -1$ μόνον εφόσον $k = l$ (αλλά διαφορετικό από τα j, m), διότι το ϵ_{ijk} λαμβάνει μία από τις τιμές ± 1 και αντιστοίχως τό ϵ_{ilm} λαμβάνει το αντίθετο πρόσημο. Με αυτούς του συλλογισμούς συνάγουμε ότι οι αριθμοί $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}$ είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} &= 0\,, && \text{όταν } j = k \\ &= 0\,, && \text{όταν } l = m \\ &= +1\,, && \text{όταν } j = l \neq k = m \\ &= -1\,, && \text{όταν } j = m \neq k = l \\ &= 0\,, && \text{όταν } j \neq l \text{ και } m\;,\ \text{ή } k \neq l \text{ και } m\;. \end{aligned} \qquad \text{(Α-10)}$$

Αξίζει να επαληθεύσετε την τιμή της τελευταίας σειράς της (Α-10) με παραδείγματα.

Ας θεωρήσουμε τώρα τους 81 αριθμούς

$$\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \ .$$

Αυτοί οι αριθμοί, όπως μπορείτε να διαπιστώσετε, λαμβάνουν ακριβώς τις τιμές της (Α-10) και επομένως ισχύει η ταυτότητα

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \ . \tag{Α-11}$$

Η ταυτότητα αυτή είναι πάρα πολύ σημαντική και αξίζει να την απομνημονεύσετε. Ένας μνημονικός κανόνας μάλιστα που θα σας βοηθήσει να τη θυμάστε είναι ο εξής: γράφοντας τους μη κοινούς δείκτες των δύο ϵ σε δύο στήλες

$$\begin{array}{c} j \longleftrightarrow l \\ \boxtimes \\ k \longleftrightarrow m \end{array}$$

κατασκευάζουμε δύο γινόμενα από δ. Τα πρώτα δύο δ έχουν ως δείκτες τα αντίστοιχα ζευγάρια δεικτών των δύο στηλών (πρώτο με πρώτο και δεύτερο με δεύτερο), ενώ τα δύο άλλα δ έχουν ως δείκτες τα ζευγάρια που σχηματίζονται, αν λάβουμε τα στοιχεία των στηλών χιαστή (πρώτο με δεύτερο και δεύτερο με πρώτο). Το δεύτερο, μάλιστα, γινόμενο των δ έχει αρνητικό πρόσημο. Αυτός ο κανόνας έχει γενική ισχύ και μπορείτε να τον χρησιμοποιείτε ακόμη και αν ο επαναλαμβανόμενος (ο εικονικός) δείκτης δεν βρίσκεται στην ίδια θέση στα δύο ϵ, αφού πρώτα εκτελέσετε τόσες μεταθέσεις (άρα και τόσες αλλαγές προσήμου), όσες χρειάζονται για να φέρετε τους επαναλαμβανόμενους δείκτες στην ίδια θέση στα δύο ϵ. Για παράδειγμα, αξίζει να επαληθεύσετε ότι

$$\begin{aligned} \epsilon_{jik}\epsilon_{lmi} &= -\epsilon_{jik}\epsilon_{lim} \\ &= -\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl} \ . \end{aligned}$$

Αν γνωρίζετε αυτή την ταυτότητα, δεν χρειάζεται να απομνημονεύετε τις διάφορες πολύπλοκες ταυτότητες του διανυσματικού λογισμού. Ως παράδειγμα, θα υπολογίσουμε το $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Οι συνιστώσες αυτού του διανύσματος είναι

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}a_j(\vec{b} \times \vec{c})_k &= \epsilon_{ijk}a_j(\epsilon_{klm}b_lc_m) \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}a_jb_lc_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, a_jb_lc_m \\ &= a_jb_ic_j - a_jb_jc_i \\ &= b_i\,(a_jc_j) - c_i\,(a_jb_j) \ . \end{aligned}$$

Καταλήγουμε με αυτό τον τρόπο στη γνωστή ταυτότητα

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \ .$$

Η σχέση αυτή γενικεύεται αναλόγως στην περίπτωση που τα διανύσματα αντικατασταθούν από διανυσματικούς τελεστές (βλ. Πλαίσιο A-1). Ένας άλλος, καθαρά γεωμετρικός, τρόπος απόδειξης της παραπάνω διανυσματικής ταυτότητας παρατίθεται και αυτός στο Πλαίσιο A-1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πλαίσιο A-1. *Γεωμετρική απόδειξη της διανυσματικής ταυτότητας*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}\,.$$

Η ταυτότητα αυτή, όπως είδαμε, είναι εύκολο να αποδειχθεί με τη χρήση δεικτών. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια πιο μακροσκελή αλλά περισσότερο εποπτική απόδειξη, την οποία εύκολα μπορείτε να επαναλάβετε. Γι' αυτόν το λόγο θα "σπάσουμε" τα διανύσματα $\vec{b}$ *και* $\vec{c}$ *σε διανύσματα παράλληλα και κάθετα στο διάνυσμα* $\vec{a}$. *Δηλαδή,*

$$\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}$$

και

$$\vec{c} = \vec{c}_{\parallel} + \vec{c}_{\perp}\,,$$

με

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_{\perp} = \vec{a} \cdot \vec{c}_{\perp} = 0\,.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \times \left[(\vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}) \times (\vec{c}_{\parallel} + \vec{c}_{\perp})\right] \\ &= \vec{a} \times \left[\vec{b}_{\parallel} \times \vec{c}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp} \times \vec{c}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp} \times \vec{c}_{\perp} + \vec{b}_{\parallel} \times \vec{c}_{\perp}\right]\,.\end{aligned}$$

Από τους τέσσερις όρους μέσα στις αγκύλες μόνο οι τρεις τελευταίοι είναι, εν γένει, μη μηδενικοί· ο πρώτος είναι ταυτοτικά μηδέν. Συγχρόνως, ο τρίτος όρος είναι ένα διάνυσμα κάθετο στα $\vec{b}_{\perp}, \vec{c}_{\perp}$ *και επομένως παράλληλο στο* $\vec{a}$*· ως εκ τούτου, δεν συνεισφέρει καθόλου στο εξωτερικό γινόμενο με το* $\vec{a}$. *Ο δεύτερος όρος, αφού αποτελείται από δύο κάθετα διανύσματα, δημιουργεί ένα νέο διάνυσμα κάθετο σε αυτά με μέτρο όσο το γινόμενο των μέτρων τους. Είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι το εξωτερικό γινόμενο του* $\vec{a}$ *με το νέο αυτό διάνυσμα είναι ένα διάνυσμα παράλληλο με το* $\vec{b}_{\perp}$ *και έχει μέτρο όσο το γινόμενο των μέτρων των τριών διανυσμάτων, δηλαδή*

$$\vec{a} \times (\vec{b}_{\perp} \times \vec{c}_{\parallel}) = |\vec{a}|\,|\vec{c}_{\parallel}|\,\vec{b}_{\perp} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b}_{\perp}\,.$$

Η περίπτωση που το $\vec{c}_{\parallel}$ *έχει αντίθετη φορά με το* $\vec{a}$ *έχει ληφθεί ορθά στην τελική έκφραση με το εσωτερικό γινόμενο, ενώ η ενδιάμεση έκφραση με τα μέτρα απαιτεί τότε ένα πλην. Τέλος, ο τέταρτος όρος μοιάζει εκπληκτικά με το δεύτερο όρο και μάλιστα καθίσταται πανομοιότυπος, αν εναλλαχθεί η σειρά των* $\vec{b}$ *και* $\vec{c}$ *με φυσικό επακόλουθο την αλλαγή προσήμου. Το αρχικό, λοιπόν, διπλό εξωτερικό γινόμενο έχει απλοποιηθεί σε*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{b}_{\perp} \times \vec{c}_{\parallel} + \vec{b}_{\parallel} \times \vec{c}_{\perp}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b}_{\perp} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}_{\perp}\,. \tag{A-12}$$

Παρατηρούμε, μάλιστα, ότι

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}_{\parallel} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}_{\parallel} = \vec{0}\,,$$

αφού και τα δύο αυτά διανύσματα έχουν το ίδιο μέτρο

$$|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}})$$

και είναι παράλληλα στο $\vec{a}$. *Αν προσθέσουμε το τελευταίο αυτό ταυτοτικά μηδενικό διάνυσμα στην προηγούμενη σχέση (A-12) καταλήγουμε στην επιθυμητή ταυτότητα*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}\,. \tag{A-13}$$

Γνωρίζοντας αυτή τη διανυσματική ταυτότητα, είναι εύκολο να την εφαρμόσουμε, με την απαιτούμενη βέβαια προσοχή, ακόμη και στην περίπτωση που κάποιο από τα διανύσματα είναι διανυσματικός τελεστής. Ο τελεστής πρέπει να τοποθετηθεί σε τέτοια θέση ώστε να δρα αποκλειστικά και μόνο όπου δρούσε αρχικά. Έτσι, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το αντικείμενο $\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$, μπορούμε να το αναλύσουμε σύμφωνα με τη διανυσματική ταυτότητα ως

$$\vec{\nabla}_\star(\vec{V} \cdot \vec{A}_\star) - (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}\,, \tag{A-14}$$

αρκεί να προσέξουμε ο διαφορικός τελεστής του πρώτου όρου να δράσει μόνο στο $\vec{A}$ (αυτό το νόημα έχουν εξάλλου τα σημάδια $\star$ δίπλα στα εν λόγω μεγέθη). Η επισήμανση, βέβαια, αυτή είναι ανούσια, αν το διάνυσμα $\vec{V}$ δεν εξαρτάται από το $\vec{x}$. Αν το μέγεθος $\vec{V}$ εξαρτιόταν και αυτό από το $\vec{x}$ ώστε να δρα επάνω του ο $\vec{\nabla}$, δεν θα ήταν αυτόματη η μετάβαση από τη διανυσματική ταυτότητα (Α-13) στη διανυσματική ταυτότητα των τελεστών. Στην περίπτωση αυτή η ταυτότητα των τανυστών γραμμένη με δείκτες θα λάμβανε τη μορφή

$$\left[\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right]_i = V_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - V_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\,.$$

Η σχέση αυτή είναι διαφορετική από αυτό που θα έδινε η σχέση (Α-14) αν το $\vec{V}$ εξαρτιόταν από το $\vec{x}$ και ο διαφορικός τελεστής στον πρώτο όρο του δεξιού σκέλους της (Α-14) δρούσε και στο $\vec{V}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Α-8. *Κάνοντας χρήση δεικτών, αποδείξτε την ταυτότητα*

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{u} \times \vec{\omega}\,,$$

όπου $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$.

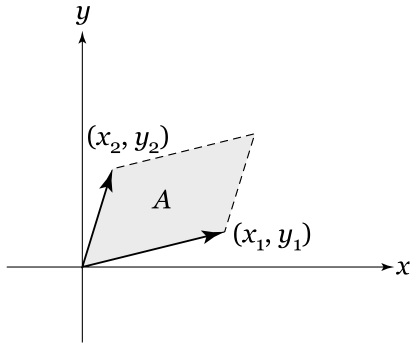
Άσκηση Α-9. *Δείξτε με απευθείας υπολογισμό ότι το διάνυσμα a_i που παράγει τον αντισυμμετρικό 3×3 πίνακα $A_{ij} = \epsilon_{ijk} a_k$ είναι το*

$$a_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} A_{jk}\,.$$

Α-5 Περί οριζουσών

Ας αρχίσουμε με έναν δισδιάστατο επίπεδο χώρο. Λαμβάνουμε δύο διανύσματα $\vec{X}_1 = (x_1, y_1)$ και $\vec{X}_2 = (x_2, y_2)$. Τα δύο αυτά διανύσματα ορίζουν ένα παραλληλόγραμμο (βλ. Σχήμα Α-1), το εμβαδόν του οποίου το συμβολίζουμε με $V(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι το εμβαδόν αυτού του παραλληλογράμμου, ίσως με αρνητικό πρόσημο,[2] δίνεται από

[2]Το πρόσημο εξαρτάται από τη σχετική θέση των διανυσμάτων. Αν το πρώτο διάνυσμα χρειάζεται να στραφεί αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού κατά γωνία μικρότερη από π για να φτάσει στο δεύτερο, το V είναι θετικό· αλλιώς είναι αρνητικό. Στο εξής, όταν αναφερόμαστε σε εμβαδά ή όγκους, θα αγνοούμε τα αρνητικά πρόσημα που πιθανώς να εμφανίζονται.



Σχήμα Α-1: Τα δύο διανύσματα $\vec{X}_1 = (x_1, y_1)$ και $\vec{X}_2 = (x_2, y_2)$ ορίζουν ένα παραλληλόγραμμο εμβαδού $V(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$.

τον τύπο

$$V(\vec{X}_1, \vec{X}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 \ ,$$

δηλαδή το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι η ορίζουσα του πίνακα που έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων που ορίζουν το παραλληλόγραμμο. Ο πίνακας όμως

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \ ,$$

ορίζει στο επίπεδο και ένα γραμμικό μετασχηματισμό. Ο μετασχηματισμός αυτός απεικονίζει το πρώτο διάνυσμα της κανονικής βάσης στο διάνυσμα που έχει ως συντεταγμένες τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \ ,$$

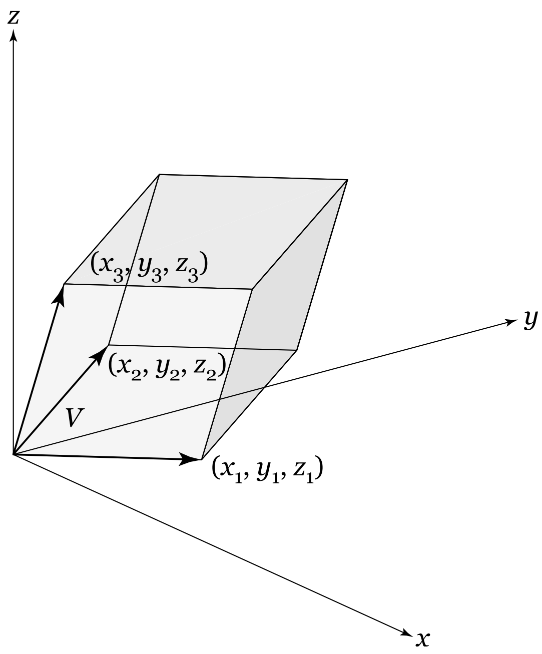
και ομοίως

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \ .$$

Τα αρχικά όμως διανύσματα της κανονικής βάσης $\hat{e}_1 = (1, 0)$ και $\hat{e}_2 = (0, 1)$ σχηματίζουν ένα τετράγωνο μοναδιαίου εμβαδού $V(\hat{e}_1, \hat{e}_2) = 1$. Ο μετασχηματισμός που περιγράφεται από τον πίνακα $\mathbf{A}$ μετασχηματίζει το τετράγωνο στο παραλληλόγραμμο του Σχήματος Α-1. Επομένως, η ορίζουσα του πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathbf{A}$ είναι ο λόγος του εμβαδού του παραλληλογράμμου που προκύπτει από το μετασχηματισμό του τετραγώνου που σχηματίζεται από την κανονική βάση προς το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού

$$\det(\mathbf{A}) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{V(\vec{X}_1, \vec{X}_2)}{V(\hat{e}_1, \hat{e}_2)} \ . \qquad \text{(A-15)}$$

Ας εξετάσουμε, τώρα, τι συμβαίνει στον τρισδιάστατο χώρο. Τρία διανύσματα $\vec{X}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{X}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ και $\vec{X}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο (βλ. Σχήμα Α-2), του οποίου ο όγκος συμβολίζεται με



Σχήμα Α-2: Τρία μη συγγραμμικά διανύσματα, τα $\vec{X}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{X}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ και $\vec{X}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, του τρισδιάστατου χώρου ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο όγκου $V(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$.

$V(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$. Γνωρίζουμε ότι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου ισούται με την απόλυτη τιμή του τριπλού γινομένου:

$$V(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3) = |\vec{X}_1 \cdot (\vec{X}_2 \times \vec{X}_3)| \,,$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα που έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των τριών διανυσμάτων:

$$V(X_1, X_2, X_3) = | \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} | \,,$$

Ο πίνακας αυτός, όμως, απεικονίζει τον κύβο που σχηματίζεται από την κανονική βάση $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ στο παραλληλεπίπεδο του Σχήματος Α-2 και συνεπώς η ορίζουσα κάθε 3×3 πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \,,$$

καθορίζει πόσο μεταβλήθηκε ο αρχικός μοναδιαίος όγκος.

Η ορίζουσα ως όγκος του μετασχηματισμού των διανυσμάτων βάσης

Γενικεύουμε τώρα το παράδειγμα στις n διαστάσεις. Ορίζουμε πάλι με n διανύσματα έναν n-διάστατο παραλληλόχωρο (το αντίστοιχο του παραλληλεπιπέδου στις n διαστάσεις), λαμβάνοντας ως βασικές ακμές του παραλληλοχώρου τα διανύσματα αυτά και συμπληρώνοντας το σχήμα, όπως ακριβώς κάναμε και προηγουμένως, κατασκευάζοντας παράλληλες υπερεπιφάνειες. Ποιος είναι ο όγκος ενός τέτοιου παραλληλοχώρου ; Σκεπτόμενοι κατ᾽ αναλογίαν με τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε ότι ο όγκος του παραλληλοχώρου θα πρέπει να δίνεται από την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα που έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων και ότι γενικότερα η ορίζουσα κάθε $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$ καθορίζει τη μεταβολή του μοναδιαίου όγκου, που σχηματίζεται από τα διανύσματα της κανονικής βάσης, ύστερα από τη δράση του γραμμικού μετασχηματισμού, που ορίζεται από τον πίνακα $\mathbf{A}$, σε αυτήν.

Τι είναι "όγκος";

Για να προβούμε, όμως, σε αυτή τη γενίκευση θα πρέπει να ορίσουμε τι είναι ο όγκος n-διάστατων παραλληλοχώρων. Συμβολίζουμε και πάλι τον όγκο που σχηματίζεται από τα n διανύσματα $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$, $\cdots$, $\vec{X}_n$ με $V(\vec{X}_1, \ldots \vec{X}_n)$ και απαιτούμε, οδηγούμενοι από γεωμετρική διαίσθηση, η συνάρτηση V να έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $V(\lambda\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots \vec{X}_n) = \lambda V(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n)$. Ο όγκος δηλαδή που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\lambda\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$, ..., $\vec{X}_n$ πρέπει να είναι λ φορές ο όγκος που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$, ..., $\vec{X}_n$.

2. $V(\vec{X}_1+\vec{Y}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n) = V(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, X_n)+V(\vec{Y}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n)$. Απαιτούμε η συνάρτηση-όγκος V να είναι γραμμική ως προς κάθε όρισμά της, δηλαδή η V να είναι μια πολυγραμμική (multilinear) συνάρτηση.

3. $V(\vec{X}_1, \vec{X}_1, \vec{X}_3, \ldots, \vec{X}_n) = 0$. Ο όγκος δηλαδή που σχηματίζεται όταν δύο από τα διανύσματα των ακμών του είναι ίσα, για παράδειγμα $\vec{X}_2 = \vec{X}_1$, είναι μηδενικός.

Υπάρχει, άραγε, συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες; Και αν υπάρχει, είναι μοναδική; Θα αποδείξουμε ότι οι παραπάνω συνθήκες εξασφαλίζουν στην ουσία την ύπαρξη μίας μοναδικής συνάρτησης του όγκου V, η οποία δεν είναι άλλη από την ορίζουσα του πίνακα που έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων που ορίζουν τον παραλληλόχωρο.

Προσδιορίζουμε πρώτα τη συνάρτηση V στις δύο διαστάσεις. Συμβολίζουμε την κανονική βάση με $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$. Αν γνωρίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $V(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$, $V(\hat{e}_2, \hat{e}_1)$, τότε γνωρίζουμε την τιμή της $V(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$ για κάθε $\vec{X}_1$ και $\vec{X}_2$. Πράγματι, επειδή

$$\vec{X}_1 = x_1\hat{e}_1 + y_1\hat{e}_2 \ , \ \vec{X}_2 = x_2\hat{e}_1 + y_2\hat{e}_2 \ ,$$

από τη γραμμικότητα της συνάρτησης V λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} V(\vec{X}_1, \vec{X}_2) &= V(x_1\hat{e}_1 + y_1\hat{e}_2, \vec{X}_2) \\ &= x_1V(\hat{e}_1, \vec{X}_2) + y_1V(\hat{e}_2, \vec{X}_2) \\ &= x_1V(\hat{e}_1, x_2\hat{e}_1 + y_2\hat{e}_2) + y_1V(\hat{e}_2, x_2\hat{e}_1 + y_2\hat{e}_2) \\ &= x_1y_2V(\hat{e}_1, \hat{e}_2) + y_1x_2V(\hat{e}_2, \hat{e}_1) \ , \end{aligned}$$

όπου για να καταλήξουμε στην τελευταία σειρά χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα (3): $V(\hat{e}_1, \hat{e}_1) = V(\hat{e}_2, \hat{e}_2) = 0$. Επομένως, αν γνωρίζουμε τα $V(\hat{e}_1,$

$\hat{e}_2)$ και $V(\hat{e}_2, \hat{e}_1)$, έχουμε προσδιορίσει πλήρως τη συνάρτηση V. Επειδή, όμως, επιπλέον ισχύει ότι $V(\hat{e}_1+\hat{e}_2, \hat{e}_1+\hat{e}_2)=0$, θα ισχύει και

$$V(\hat{e}_1, \hat{e}_2) = -V(\hat{e}_2, \hat{e}_1) \ ,$$

δηλαδή η V πρέπει να είναι αντισυμμετρική. Επομένως

$$V(\vec{X}_1, \vec{X}_2) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) V(\hat{e}_1, \hat{e}_2) \ . \tag{A-16}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, αν ορίσουμε τον όγκο που σχηματίζεται από την κανονική βάση $V(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$, υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση που προσδιορίζει τον όγκο στις δύο διαστάσεις. Ο λόγος των όγκων

$$\frac{V(\vec{X}_1, \vec{X}_2)}{V(\hat{e}_1, \hat{e}_2)}$$

είναι η ορίζουσα του πίνακα που έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $\vec{X}_1$ και $\vec{X}_2$. Η ορίζουσα αυτή μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{V(\vec{X}_1, \vec{X}_2)}{V(\hat{e}_1, \hat{e}_2)} = \epsilon_{ij} X_{1i} X_{2j} \ , \tag{A-17}$$

όπου X_{1i} είναι η i-οστή συντεταγμένη του $\vec{X}_1$ και X_{2j} είναι η j-οστή συντεταγμένη του $\vec{X}_2$, ενώ το ϵ_{ij} ορίζεται, όπως και στις τρεις διαστάσεις: (i) $\epsilon_{ij}=1$, όταν οι (i,j) είναι άρτια μετάθεση των $(1,2)$ (που εδώ συμβαίνει μόνο, όταν οι δείκτες είναι οι (12)), (ii) $\epsilon_{ij}=-1$ όταν (i,j) είναι περιττή μετάθεση των $(1,2)$ (που εδώ συμβαίνει μόνο όταν οι δείκτες είναι οι (21)) και (iii) $\epsilon_{ij}=0$ όταν $i=j$. Η σχέση (Α-17) προκύπτει από την παρατήρηση ότι λόγω της πολυγραμμικότητας της V θα είναι

$$V(\vec{X}_1, \vec{X}_2) = X_{1i} X_{2j} V(\hat{e}_i, \hat{e}_j) \ ,$$

αλλά

$$V(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \epsilon_{ij} V(\hat{e}_1, \hat{e}_2) \ , \tag{A-18}$$

επειδή η V αλλάζει πρόσημο, όταν γίνεται εναλλαγή των στοιχείων της, ενώ, όταν $i=j$, είναι $V(\hat{e}_i, \hat{e}_j)=0$.

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι στις n διαστάσεις η συνάρτηση

$$V(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n)$$

προσδιορίζεται μοναδικά, αν δοθεί η τιμή του όγκου του υπερκύβου που σχηματίζει η κανονική βάση $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$V(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} X_{1i_1} X_{2i_2} \cdots X_{ni_n} V(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n) \ , \tag{A-19}$$

όπου $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}=1$, όταν οι αριθμοί $(i_1, \cdots, i_n)$ είναι άρτια μετάθεση των $(1, \ldots, n)$, $\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}=-1$, όταν οι αριθμοί $(i_1, \ldots, i_n)$ είναι περιττή μετάθεση των $(1, \ldots, n)$ και $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}=0$ όταν δύο οποιοιδήποτε δείκτες είναι ίσοι. Πράγματι, η πολυγραμμικότητα της V συνεπάγεται

$$V(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n) = X_{1i_1} X_{2i_2} \cdots X_{ni_n} V(\hat{e}_{i_1}, \hat{e}_{i_2}, \ldots, \hat{e}_{i_n}) \ ,$$

και κάθε

$$V(\hat{e}_{i_1}, \hat{e}_{i_2}, \ldots, \hat{e}_{i_n}) = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} V(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n) ,$$

διότι σε κάθε εναλλαγή των δεικτών η V αλλάζει πρόσημο και, εάν απαιτείται άρτιος αριθμός εναλλαγών για να μετατεθούν οι αριθμοί $(i_1, \ldots, i_n)$ στους $(1, 2, \ldots, n)$, τότε

$$V(\hat{e}_{i_1}, \ldots, \hat{e}_{i_n}) = V(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) .$$

Ομοίως, όταν οι αριθμοί $(i_1, \ldots, i_n)$ προκύπτουν από περιττή μετάθεση των $(1, 2, \ldots, n)$, τότε

$$V(\hat{e}_{i_1}, \ldots, \hat{e}_{i_n}) = -V(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) .$$

Αν δύο από τους αριθμούς i_k είναι ίσοι, τότε $V(\hat{e}_{i_1}, \ldots, \hat{e}_{i_n}) = 0$. Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στην (Α-19).

Επομένως, η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{A}$ με στοιχεία X_{ij} ορίζεται ως ο λόγος των όγκων

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{V(\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n)}{V(\hat{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)} ,$$

ή ισοδυνάμως ως

$$\det(\mathbf{A}) = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} X_{1 i_1} X_{2 i_2} \cdots X_{n i_n} .$$

Α-6 Ιδιότητες των οριζουσών

Όπως δείξαμε στο προηγούμενο εδάφιο, η ορίζουσα ενός πίνακα $\mathbf{A}$ δίνεται από την έκφραση

$$\det(\mathbf{A}) \ = \ \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} , \qquad \text{(Α-20)}$$

όπου a_{ij} είναι τα στοιχεία του πίνακα. Το ανάπτυγμα αυτό ισούται με το άθροισμα όλων των γινομένων $a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$ που μπορούν να σχηματιστούν από n στοιχεία, ένα από κάθε γραμμή του $\mathbf{A}$, με τον κάθε όρο του αθροίσματος πολλαπλασιασμένο επί το πρόσημο της μετάθεσης των $(1, 2, \ldots, n)$ προκειμένου να προκύψει ο $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Από αυτό τον ορισμό της ορίζουσας μπορεί να αποδειχθεί ότι ο ανάστροφος πίνακας του $\mathbf{A}$ έχει την ίδια ορίζουσα με τον $\mathbf{A}$, δηλαδή

Ο ανάστροφος πίνακα έχει ίδια ορίζουσα με τον πίνακα

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}) .$$

Αυτό το διαπιστώνουμε παρατηρώντας ότι η ορίζουσα

$$\det(\mathbf{A}^T) = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} , \qquad \text{(Α-21)}$$

είναι ίση με το άθροισμα των γινομένων $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ όπου το κάθε μέλος του αθροίσματος έχει πολλαπλασιαστεί επί το πρόσημο της μετάθεσης που δίνει τη σειρά των πρώτων δεικτών $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ των στοιχείων. Αλλά η μετάθεση είναι μία απεικόνιση σ

$$\sigma : \ (1, 2, \ldots, n) \to (i_1, i_2, \ldots, i_n) ,$$

η οποία αντιστοιχίζει τον εκάστοτε φυσικό αριθμό k (με $k \leq n$) στον $\sigma(k) = i_k$. Μπορούμε να γράψουμε την (Α-21) ισοδυνάμως ως

$$\det(\mathbf{A}^T) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \ , \tag{Α-22}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνάρτηση – πρόσημο (βλ. Άσκηση Α-3) της μετάθεσης

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\epsilon_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)}) = \epsilon_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)} \ .$$

Επαναδιατάσσοντας, όμως, τα γινόμενα στην (Α-22) ως προς τους δεύτερους δείκτες και κάνοντας χρήση της αντίστροφης απεικόνισης

$$\sigma^{-1} : \ (i_1, i_2, \ldots, i_n) \to (1, 2, \ldots, n) \ ,$$

λαμβάνουμε το ίδιο άθροισμα, διότι ισχύει

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}^T) &= \sum_{\sigma^{-1}} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \ldots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} \\
&= \det(\mathbf{A}) \ ,
\end{aligned}$$

επειδή το πρόσημο της μετάθεσης σ^{-1} είναι το ίδιο με το πρόσημο της σ, αφού το πλήθος των εναλλαγών δεικτών που απαιτούνται ώστε να προκύψει είτε η μετάθεση σ είτε η σ^{-1} είναι ίδιο.

Η ορίζουσα ισούται, επίσης, με την ορίζουσα των διανυσμάτων που ορίζονται από τις στήλες του $\mathbf{A}$, δηλαδή

$$\det(\mathbf{A}) = \det[a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

όπου a_i η i-οστή στήλη του πίνακα.

Εάν εναλλάξουμε δύο στήλες του πίνακα $\mathbf{A}$, για παράδειγμα, την πρώτη με τη δεύτερη, η ορίζουσα του νέου πίνακα $\mathbf{A}'$ θα είναι

Εναλλάσσοντας γραμμές ή στήλες η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}') &= \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a'_{1i_1} a'_{2i_2} \ldots a'_{ni_n} \\
&= \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{2i_1} a_{1i_2} \ldots a_{ni_n} \\
&= -\epsilon_{i_2 i_1 \ldots i_n} a_{1i_2} a_{2i_1} \ldots a_{ni_n} \\
&= -\det(\mathbf{A}) \ ,
\end{aligned}$$

οπότε η εναλλαγή δύο στηλών του πίνακα οδηγεί σε αλλαγή προσήμου της ορίζουσας του πίνακα, δηλαδή

$$\det[a_1, a_2, \ldots, a_n] = -\det[a_2, a_1, \ldots, a_n] \ .$$

Λόγω των ιδιοτήτων του $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$,το ίδιο θα ίσχυε αν εναλλάσσαμε δύο οποιεσδήποτε γραμμές. Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται άμεσα ότι, αν δύο στήλες του πίνακα είναι ίσες (ή ακόμη και πολλαπλάσιες η μία της άλλης), τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι μηδενική. Λόγω του αναλλοιώτου της ορίζουσας σε αναστροφή του πίνακα, το ίδιο ισχύει και όταν εναλλάσσονται οι γραμμές του πίνακα.

Ας θεωρήσουμε τώρα την ορίζουσα του πίνακα

$$\det[a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_n}]$$

όπου $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ κάποια μετάθεση των αριθμών $(1, 2, \ldots, n)$. Λάβαμε τα m_i διαφορετικά, διότι, αν έστω δύο στήλες είναι ίσες, τότε η ορίζουσα είναι μηδενική. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι όλοι οι δείκτες είναι διαφορετικοί. Μπορούμε τώρα να μετασχηματίσουμε τον πίνακα

$$[a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_n}]$$

στον αρχικό

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

με μία σειρά εναλλαγών των στηλών. Σε κάθε εναλλαγή η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται όπως είδαμε με -1. Ο αριθμός των βημάτων που απαιτείται για να καταλήξουμε στην αρχική διάταξη είναι ίσος με τον αριθμό των εναλλαγών που απαιτούνται για να μετασχηματιστούν οι αριθμοί $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ στους $(1, 2, \ldots, n)$. Αν ο αριθμός αυτός είναι άρτιος, τότε η μετάθεση είναι άρτια και η ορίζουσα παραμένει η ίδια, ενώ, αν είναι περιττός, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Σε κάθε περίπτωση, επειδή το πρόσημο της μετάθεσης δίνεται από τον $\epsilon_{m_1 m_2 \ldots m_n}$, θα είναι

$$\det[a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_n}] = \epsilon_{m_1 m_2 \ldots m_n} \det(\mathbf{A}) \,.$$

Η παραπάνω έκφραση περιλαμβάνει και την περίπτωση στην οποία δύο δείκτες είναι ίσοι και η παραπάνω ισότητα μπορεί να γραφεί και ως

$$\epsilon_{m_1 m_2 \ldots m_n} \det(\mathbf{A}) = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{m_1 i_1} a_{m_2 i_2} \ldots a_{m_n i_n} \,. \tag{A-23}$$

Ορίζουσα γινομένου = γινόμενο οριζουσών

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την (A-23) για να αποδείξουμε τη βασική ιδιότητα των οριζουσών

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{BA}) \,. \tag{A-24}$$

Η σχέση αυτή αποδείχθηκε για πρώτη φορά το 1812 από τους γάλλους μαθηματικούς Jacques Binet [1786-1856] και Augustin-Louis Cauchy [1789-1857]. Χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση λαμβάνουμε διαδοχικά τις εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{AB}) &= \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1k_1} b_{k_1 i_1} a_{2k_2} b_{k_2 i_2} \ldots a_{nk_n} b_{k_n i_n} \\
&= (a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}) \, \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} b_{k_1 i_1} b_{k_2 i_2} \ldots b_{k_n i_n} \\
&= (a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}) \, \epsilon_{k_1 k_2 \ldots k_n} \det(\mathbf{B}) \\
&= (\epsilon_{k_1 k_2 \ldots k_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}) \det(\mathbf{B}) \\
&= \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \,.
\end{aligned}$$

Παρομοίως αποδεικνύεται ότι $\det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

Άσκηση Α-10. *Δείξτε με τη βοήθεια της (Α-24) ότι* ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \; .$$

Η (Α-24) μάς επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα $\mathbf{A}$ μέσω των ιδιοτιμών του λ_i. Διαγωνιοποιούμε τον $\mathbf{A}$ αναλύοντας τον ως

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^{-1} \; ,$$

όπου $\boldsymbol{\Lambda}$ ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$, λ_i, και $\mathbf{S}$ ο πίνακας του οποίου οι στήλες αποτελούν τα διανύσματα βάσης του συστήματος συντεταγμένων στις οποίες ο $\mathbf{A}$ καθίσταται διαγώνιος. Τότε

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}) = \det(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}) = \det(\boldsymbol{\Lambda}) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \; ,$$

δεδομένου ότι η ορίζουσα ενός διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του.

Περαιτέρω, επειδή για κάθε πίνακα που μπορεί να διαγωνιοποιηθεί ισχύει ότι (βλ. Άσκηση Α-11)

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{S}\exp(\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{S}^{-1} \; ,$$

όπου $\exp(\boldsymbol{\Lambda})$ διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τα e^{λ_i} και λ_i οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$, θα είναι

Ορίζουσα και ίχνος

$$\begin{aligned}\det(\exp(\mathbf{A})) &= e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\ldots e^{\lambda_n} \\ &= \exp(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n) \\ &= \exp(\mathrm{trace}(\mathbf{A})) \; , \end{aligned} \qquad (\text{Α-25})$$

δεδομένου ότι το ίχνος ενός πίνακα ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του (βλ. Άσκηση Α-12)

$$\mathrm{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n \; .$$

Άσκηση Α-11. *Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης, δείξτε ότι, αν ο πίνακας* $\mathbf{A}$ *διαγωνιοποιείται, δηλαδή, αν είναι* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$*, τότε* ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{S}\exp(\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{S}^{-1} \; ,$$

όπου $\exp(\boldsymbol{\Lambda})$ *είναι διαγώνιος πίνακας με στοιχεία* e^{λ_i}*, όπου* λ_i *οι ιδιοτιμές του* $\mathbf{A}$*. [Υπόδειξη: Γράψτε το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης.]*

Άσκηση A-12. *Το ίχνος (*trace*) ενός πίνακα* $\mathbf{A}$ *ορίζεται ως το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του, ή με αθροιστική σύμβαση ως*

$$\mathrm{trace}(\mathbf{A}) = A_{ii} \ .$$

Δείξτε κάνοντας χρήση της αθροιστικής σύμβασης ότι

$$\mathrm{trace}(\mathbf{AB}) = \mathrm{trace}(\mathbf{BA}) \ .$$

Ως συνέπεια αυτής της σχέσης δείξτε ότι, αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ *διαγωνιοποιείται, δηλαδή αν είναι* $\mathbf{A} = \mathbf{S\Lambda S}^{-1}$*, τότε*

$$\mathrm{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \ ,$$

όπου λ_i *οι ιδιοτιμές του* $\mathbf{A}$.

Επειδή κάθε στοιχείο a_{ij} του πίνακα $\mathbf{A}$ εμφανίζεται μόνο μία φορά στο ανάπτυγμα της ορίζουσας, είναι χρήσιμο να προσδιορίσουμε τον παράγοντα M_{ji} που το πολλαπλασιάζει (προσέξτε την αναστροφή των δεικτών). Ο παράγοντας αυτός M_{ji} ονομάζεται *συμπαράγοντας* (*cofactor*) του στοιχείου a_{ij}. Από την (A-20) έχουμε

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \ , \\ &= a_{1k} M_{k1} \ , \end{aligned} \tag{A-26}$$

οπότε ο συμπαράγοντας του a_{1k} είναι

$$M_{k1} = \epsilon_{k i_2 \ldots i_n} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \ . \tag{A-27}$$

Αν ο δείκτης k μεταφερθεί με $k-1$ εναλλαγές διαδοχικών δεικτών στην k-οστή θέση (εναλλάσσουμε πρώτα τον δείκτη k με τον i_2, έπειτα με τον i_3, κοκ), έχουμε:

$$M_{k1} = (-1)^{k-1} \epsilon_{i_2 \ldots k \ldots i_n} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \ ,$$

που ισούται με $(-1)^{k-1}$ φορές την τιμή της ορίζουσας του $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα $\mathbf{A}^{(k1)}$ που σχηματίζεται αν διαγράψουμε από τον πίνακα $\mathbf{A}$ την k-οστή στήλη και την πρώτη γραμμή. Με ανάλογες εναλλαγές δεικτών των γραμμών, μεταφέροντας τη j γραμμή στην πρώτη γραμμή, βρίσκουμε με τον ίδιο τρόπο ότι ο συμπαράγοντας του a_{jk} είναι ο

$$M_{kj} = (-1)^{j+k-2} \det(\mathbf{A}^{(kj)}) \ , \tag{A-28}$$

όπου $\mathbf{A}^{(kj)}$ ο πίνακας που σχηματίζεται, αν διαγραφεί από τον πίνακα $\mathbf{A}$ η k-οστή στήλη και η j-οστή γραμμή. Έτσι προκύπτει το ανάπτυγμα

Η ορίζουσα ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων μιας γραμμής

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} M_{kj} \ , \tag{A-29}$$

χωρίς να γίνεται άθροιση στον επαναλαμβανόμενο δείκτη j (βλ. σχέση A-26). Η παραπάνω έκφραση της ορίζουσας είναι το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της j-οστής γραμμής του $\mathbf{A}$ με τους αντίστοιχους συμπαράγοντές τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Α-13. *Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του συμπαράγοντα δείξτε ότι, όταν όλα τα στοιχεία του πίνακα* $\mathbf{A}$ *μεταβάλλονται, το διαφορικό της ορίζουσας* $\det(\mathbf{A})$ *ισούται με*

$$d\left(\det(\mathbf{A})\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} da_{jk}\, M_{kj}\ ,$$

δηλαδή, η παράγωγος D *της ορίζουσας ενός πίνακα* $\mathbf{A}$ *ισούται με το άθροισμα*

$$D = D_1 + D_2 + \ldots + D_n\ ,$$

όπου D_i *είναι η ορίζουσα του πίνακα του οποίου η* i*-οστή στήλη (ή γραμμή) αποτελείται από την παράγωγο των αντίστοιχων στοιχείων του* $\mathbf{A}$, *ενώ οι άλλες στήλες (ή γραμμές) του πίνακα αυτού είναι οι στήλες (ή γραμμές) του ίδιου του* $\mathbf{A}$.

Άσκηση Α-14. *Δείξτε, με τη βοήθεια της (Α-29), ότι*

$$\frac{\partial \det(\mathbf{A})}{\partial a_{jk}} = M_{kj}\ .$$

[Υπόδειξη: Υπάρχει το στοιχείο a_{jk} *μεταξύ των στοιχείων του* M_{kj}*;]*

Από τον ορισμό του συμπαράγοντα ενός στοιχείου (Α-28) προκύπτει ότι το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} M_{km}$$

με $j \neq m$ είναι η ορίζουσα ενός πίνακα του οποίου οι j-οστή γραμμή και η m-οστή γραμμή είναι ίδιες. Συνεπώς, η ορίζουσα αυτή είναι μηδενική και έτσι καταλήγουμε στην ταυτότητα

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} M_{km} = \det(\mathbf{A})\delta_{jm}\ ,$$

η οποία, αν σχηματίσουμε τον πίνακα των συμπαραγόντων $\mathbf{M}$ με στοιχεία M_{ij}, γράφεται σε μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{AM} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}\ .$$

Κατασκευή αντίστροφου πίνακα

Η σχέση αυτή αποδεικνύει ότι ο αντίστροφος πίνακας $\mathbf{A}^{-1}$ προσδιορίζεται από τον πίνακα των συμπαραγόντων μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{M}}{\det(\mathbf{A})}\ . \qquad \text{(Α-30)}$$

A-7 Η συνάρτηση δ του Dirac

Ποια στιγμιαία δύναμη F, όταν ασκείται σε ένα σωματίδιο τη χρονική στιγμή t, παράγει μοναδιαία ώθηση; Η περίεργη αυτή δύναμη πρέπει να είναι μηδενική για κάθε $t' \neq t$ και καταλλήλως άπειρη τη χρονική στιγμή t έτσι ώστε να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t,t')dt' = 1 \ .$$

Δεν είναι δυνατόν όμως κάποια συνάρτηση να έχει αυτή την ιδιότητα, διότι, αν την είχε, το ολοκλήρωμά της ή δεν θα οριζόταν ή θα ήταν μηδενικό. Παρόλα αυτά ο Dirac (και νωρίτερα ο Oliver Heaviside [1850-1925]), απτόητος μπροστά στα μαθηματικά προβλήματα που ανέκυπταν, τόλμησε να ορίσει ως μια τέτοια εξιδανικευμένη δύναμη τη συνάρτηση $\delta(t,t')$. Παρόμοιο πρόβλημα αντιμετωπίζουμε, αν επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε την πυκνότητα ύλης ρ που αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας που βρίσκεται στο σημείο x (υποθέστε προς το παρόν ότι αναφερόμαστε σε ένα μονοδιάστατο κόσμο). Τότε θα είναι $\rho(x,x') = 0$ για όλα τα $x' \neq x$, αλλά ταυτόχρονα θα πρέπει να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,x')dx' = 1 \ .$$

Εάν θέλουμε και πάλι να θεωρήσουμε τέτοιες σημειακές μάζες, πρέπει να γράψουμε την πυκνότητα μέσω αυτής της περίεργης συνάρτησης $\rho(x,x')$ $= \delta(x,x')$. Ομοίως, η σημειακή πυκνότητα μοναδιαίου ηλεκτρικού φορτίου που βρίσκεται στη θέση x είναι $\rho(x,x') = \delta(x,x')$. Επειδή η "συνάρτηση" $\delta(x,x')$ που κατασκευάσαμε εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $x-x'$, ας την γράψουμε $\delta(x-x')$. Ορίζουμε, λοιπόν, την $\delta(x-x')$ ως τη "συνάρτηση" με τις εξής ιδιότητες:

Μια ιδιόρρυθμη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \delta(x-x') = 0 \quad &, \quad \text{για } x' \neq x \\ \int_a^b \delta(x-x')dx' = 1 \quad &, \quad \text{για } a \leq x \leq b \ . \end{aligned} \qquad \text{(A-31)}$$

Τα όρια της ολοκλήρωσης θα μπορούσαν φυσικά να επεκταθούν στο άπειρο. Από τον παραπάνω ορισμό διαπιστώνουμε ότι $\delta(x-x') = \delta(x'-x)$.

Η $\delta(x-x')$ δεν είναι μία συνήθης συνάρτηση,[3] αλλά μπορεί να κατασκευαστεί ως το όριο κάποιας κατάλληλης ακολουθίας συνήθων συναρτήσεων. Είναι εμφανές ότι αναζητούμε μία οικογένεια συναρτήσεων, οι οποίες, με κατάλληλη ρύθμιση κάποιας παραμέτρου, αποκτούν μη μηδενικές τιμές σε μια περιοχή ολοένα και πιο μικρή γύρω από το σημείο x διατηρώντας, όμως, παράλληλα το ολοκλήρωμά τους ίσο με τη μονάδα. Η απλούστερη μορφή μιας τέτοιας οικογένειας είναι οι τετραγωνικοί παλμοί με μοναδιαίο εμβαδόν

$$f_\epsilon(x-x') = \begin{cases} 0 \ , & \text{για } |x-x'| > \epsilon/2 \\ 1/\epsilon \ , & \text{για } |x-x'| \leq \epsilon/2 \end{cases} \ .$$

[3] Πρόκειται για μία γενικευμένη συνάρτηση, ή όπως αλλιώς αποκαλείται μια *κατανομή*. Μια αυστηρή μαθηματική θεωρία που διέπει αυτές τις συναρτήσεις αναπτύχθηκε από το γάλλο μαθηματικό Laurent Schwartz [1915-2002] το 1950.

Το όριο των τετραγωνικών παλμών για $\epsilon \to 0$ θα είναι

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x-x') \ = \ \delta(x-x') \ . \tag{Α-32}$$

Παρατηρούμε ότι, όπως όλες οι συναρτήσεις $f_\epsilon(x-x')$, έτσι και η $\delta(x-x')$, όπως ορίστηκε παραπάνω, έχει ολοκλήρωμα σε ολόκληρο το χώρο ίσο με τη μονάδα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')dx = 1$$

και παράλληλα πληροί τις προϋποθέσεις που θέσαμε. Κατασκευάσαμε, λοιπόν, μία "συνάρτηση", η οποία, παρόλο που μηδενίζεται παντού εκτός του x, έχει μοναδιαίο ολοκλήρωμα σε οποιοδήποτε διάστημα περιλαμβάνει το x.

Θέλουμε τώρα να προσδιορίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int \delta(x-x')f(x')dx' \ .$$

Τα όρια της ολοκλήρωσης δεν δηλώθηκαν, διότι δεν έχουν σημασία· αρκεί να συμπεριλάβουμε μία περιοχή γύρω από το x, ειδάλως το ολοκλήρωμα είναι μηδενικό. Η τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος υπολογίζεται ότι είναι

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon\to 0} \int_a^b f_\epsilon(x-x')f(x')dx' \\ = \ & \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} f(x')dx' \\ = \ & \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \left(f(x) + (x'-x)f'(x) + \frac{(x'-x)^2}{2!} f''(x) \ + \cdots \right) dx' \\ = \ & f(x) + \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{O}(\epsilon) = f(x) \ . \end{aligned}$$

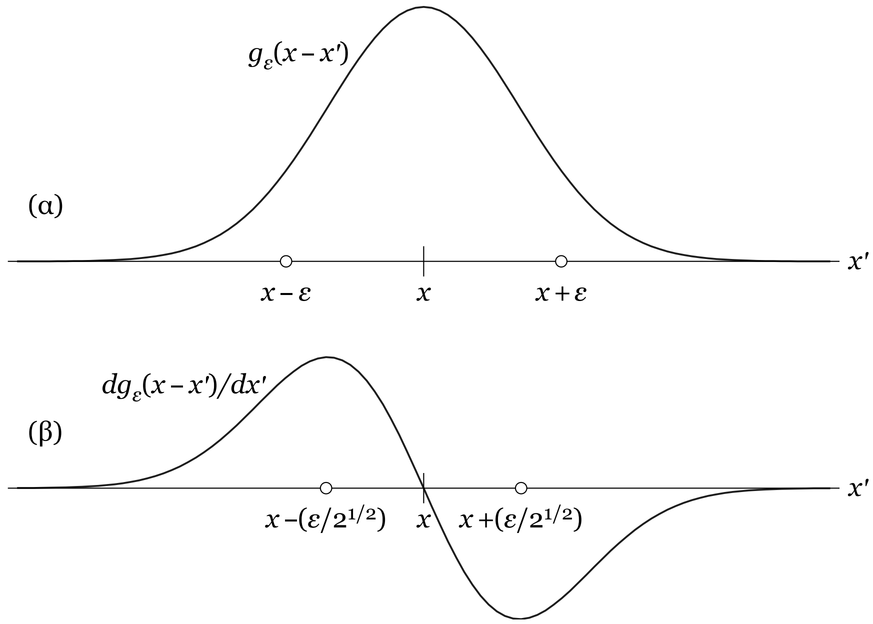
Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f(x)$ και για κάθε a, b με $a \leq x \leq b$ ισχύει

Η συνάρτηση δ ως φίλτρο συναρτήσεων

$$\int_a^b \delta(x-x')f(x')dx' = f(x) \ . \tag{Α-33}$$

Μάθαμε ότι η συνάρτηση $\delta(x-x')$ έχει την ιδιότητα να δρα ολοκληρωτικά σε μια συνάρτηση $f(x')$ και να φιλτράρει μία μόνο τιμή της, την $f(x)$ μέσω της σχέσης (Α-33). Απεικονίζει, δηλαδή, τη συνάρτηση f στην τιμή της $f(x)$. Αυτός εξάλλου είναι και ο μαθηματικός ορισμός της $\delta(x-x')$. Η $\delta(x-x')$ είναι η γενικευμένη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση (Α-33) για κάθε συνεχή συνάρτηση $f(x)$.[4] Η σχέση (Α-33), με τα όρια της ολοκλήρωσης λαμβανόμενα στο άπειρο, μπορεί να ληφθεί ως ανεξάρτητος ορισμός της $\delta(x-x')$.

[4]Υπό αυτή την έννοια η συνάρτηση δ είναι η γενίκευση του δ_{ij} του Kronecker σε διανύσματα άπειρων διαστάσεων. Διότι για διανύσματα πεπερασμένων διαστάσεων a_i το ανάλογο της (Α-33) είναι $\delta_{ik}a_k = a_i$.



Σχήμα Α-3: (α) Η γκαουσιανή $g_\epsilon(x-x')$ με εύρος ϵ, στο όριο $\epsilon \to 0$, τείνει στη $\delta(x-x')$. (β) Η παράγωγος της γκαουσιανής $dg_\epsilon(x-x')/dx'$, στο όριο $\epsilon \to 0$, τείνει στη $\delta'(x-x')$.

Αντί να χρησιμοποιούμε τετραγωνικούς παλμούς για να ορίσουμε τη συνάρτηση $\delta(x-x')$, θα μπορούσαμε ισοδυνάμως να χρησιμοποιήσουμε την οικογένεια των παντού διαφορίσιμων γκαουσιανών συναρτήσεων

$$g_\epsilon(x-x') = \frac{1}{(\pi\epsilon^2)^{1/2}}\ \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{\epsilon^2}\right) \ .$$

Ο παράγοντας $1/(\pi\epsilon^2)^{1/2}$ έχει επιλεγεί ώστε το ολοκλήρωμα της $g_\epsilon(x-x')$ σε ολόκληρο το χώρο να είναι ίσο με τη μονάδα για κάθε ϵ. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν εύρος ϵ και τιμή $1/(\pi\epsilon^2)^{1/2}$ στο $x = x'$ (βλ. Σχήμα Α-3). Η $\delta(x-x')$ μπορεί να οριστεί ως το όριο

$$\delta(x-x') = \lim_{\epsilon\to 0} g_\epsilon(x-x') \ . \qquad \text{(A-34)}$$

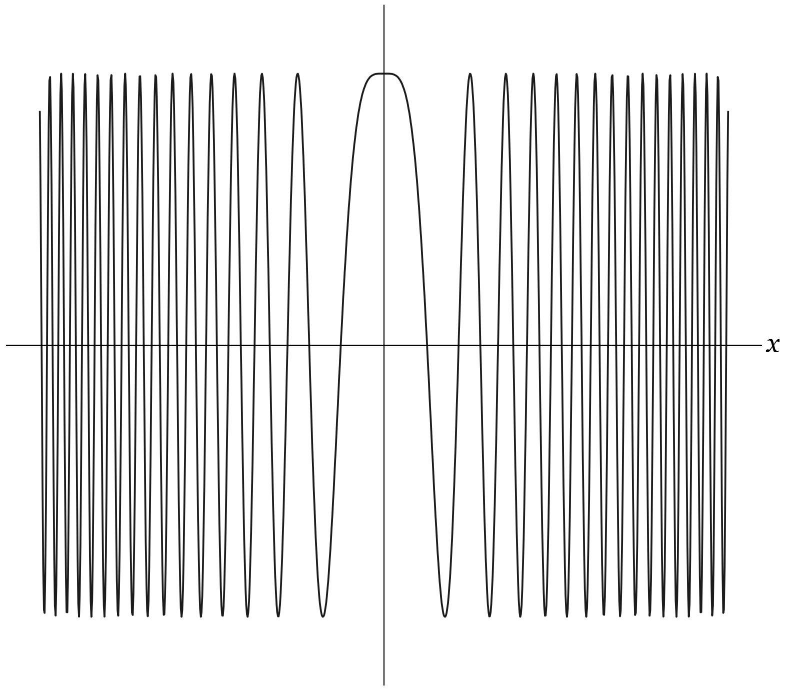
Εναλλακτικές προσεγγίσεις της δ

Άλλοι ορισμοί της συνάρτησης $\delta(x-x')$ είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{aligned}
\delta(x-x') &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(\pi\epsilon^2)^{1/2}}\ \exp\left(i\frac{(x-x')^2}{\epsilon^2}\right) && \text{(A-35)}\\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{(x-x')^2+\epsilon^2} && \text{(A-36)}\\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sin((x-x')/\epsilon)}{x-x'} && \text{(A-37)}\\
&= \frac{d\Theta(x-x')}{dx} && \text{(A-38)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}\ dk \ . && \text{(A-39)}
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση άλματος

Στη σχέση (Α-38) η $\Theta(x)$ είναι η *συνάρτηση άλματος* (*step function*):



Σχήμα Α-4: Το πραγματικό μέρος της γκαουσιανής $\exp\big(i(x-x')^2/\epsilon^2\big)$ στο διάστημα $|x-x'|<0.1$ για $\epsilon=0.01$.

$$\Theta(x)=\begin{cases} 0\ , & \text{για } x<0\ ,\\ 1\ , & \text{για } x>0\ .\end{cases}$$

Οι περισσότεροι από τους παραπάνω ορισμούς της συνάρτησης δ είναι σε μεγάλο βαθμό προφανείς· ορισμένοι, όμως, όπως ο (Α-35) και ο (Α-39) δεν είναι και τόσο διαισθητικά προφανείς, . Η ισοδυναμία των ορισμών προκύπτει αν αποδειχθεί ότι όλες οι γενικευμένες συναρτήσεις που δίνονται από τις (Α-35 – Α-39) ικανοποιούν τον ορισμό της $\delta(x-x')$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x')f(x')\,dx'=f(x)\ , \tag{Α-40}$$

για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση f. Γενικότερα ορίζουμε την ισότητα δύο γενικευμένων συναρτήσεων $\eta(x-x')$ και $\zeta(x-x')$, όταν η δράση τους σε οποιαδήποτε ομαλή δοκιμαστική συνεχή συνάρτηση (test function) $f(x)$ δίνει το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή όταν ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta(x-x')f(x')\,dx'=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(x-x')f(x')\,dx'\ . \tag{Α-41}$$

Ήδη δείξαμε ότι το όριο των τετραγωνικών παλμών ικανοποιεί τη σχέση (Α-40). Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι το όριο των τετραγωνικών παλμών είναι η συνάρτηση δ, ισχύει δηλαδή η (Α-32). Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να επαληθεύσουμε τον ορισμό της δ που δίνεται από την (Α-36). Δεν θα αποδείξουμε, εδώ, την ισότητα (Α-35), διότι, για να επιτευχθεί αυτό, απαιτείται καλή γνώση της αρχής της στάσιμης φάσης, την οποία περιγράψαμε σε αδρές γραμμές στο Κεφάλαιο 1, όταν αναλύσαμε

Σχεικά με την (Α-36)

Σχεικά με την (Α-35)

πώς ένα σωματίδιο γνωρίζει ποια τροχιά πρέπει να ακολουθήσει. Η ουσία αυτής της αρχής έγκειται στο ότι η γκαουσιανή συνάρτηση στην (Α-35) για $\epsilon \to 0$ και $x \neq x'$ έχει μηδενική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα εξαιτίας των ταχύτατων ταλαντώσεών της, ενώ η μοναδική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα προέρχεται τελικά από την περιοχή $x \approx x'$, όπου η φάση των ταλαντώσεων είναι στάσιμη και οι ταλαντώσεις παύουν (βλ. Σχήμα Α-4). Το ότι το γκαουσιανό ολοκλήρωμα της (Α-35) έχει τιμή ίση με τη μονάδα αποδεικνύεται με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Σχεικά με την (Α-38)

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια την ισότητα (Α-38) από την οποία μαθαίνουμε ότι η παράγωγος μίας ασυνεχούς συνάρτησης στα σημεία ασυνέχειάς της σχετίζεται με τη συνάρτηση δ. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta(x-x')}{dx} f(x')dx' = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{d\Theta(x-x')}{dx} f(x')dx' \ , \qquad \text{(A-42)}$$

διότι η παράγωγος της $\Theta(x-x')$ μηδενίζεται παντού εκτός από το σημείο ασυνέχειάς της, το $x = x'$. Αντικαθιστώντας

$$\frac{d\Theta(x-x')}{dx} = -\frac{d\Theta(x-x')}{dx'} \ ,$$

στην (Α-42), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{d\Theta(x-x')}{dx} f(x')\, dx' = -\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{d\Theta(x-x')}{dx'} f(x')\, dx' \\
&= -\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{d\left(\Theta(x-x')f(x')\right)}{dx'} dx' + \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \Theta(x-x') \frac{df(x')}{dx'}\, dx' \\
&= f(x-\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon) \ ,
\end{aligned}$$

δεδομένου ότι $\Theta(\epsilon) = 1$ και $\Theta(-\epsilon) = 0$ και υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση df/dx είναι φραγμένη. Επομένως, στο όριο $\epsilon \to 0$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta(x-x')}{dx} f(x')dx' = f(x) \ .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Α-15. *Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \ .$$

Άσκηση Α-16. *Βασιζόμενοι στην (Α-40), δείξτε ότι* $\delta(x-x') = \delta(x'-x)$, *δηλαδή ότι η* δ *είναι συμμετρική συνάρτηση.*

Άσκηση Α-17. *Δείξτε κατευθείαν ότι*

$$\Theta(x-x') = \int_{-\infty}^{x} \delta(x'-\xi) d\xi \ .$$

Επομένως, όπως συμβαίνει με τις συνήθεις συναρτήσεις, παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση λαμβάνουμε την (Α-38).

Άσκηση Α-18. *Σχεδιάστε τη συνάρτηση*

$$\mathrm{sgn}(x-1) - \mathrm{sgn}(x+1)$$

και εκφράστε την παράγωγό της μέσω των συναρτήσεων δ. (Η συνάρτηση – πρόσημο $\mathrm{sgn}(x)$ ορίστηκε στην Άσκηση Α-3.)

Σχεικά με την (Α-39)

Ο ορισμός της συνάρτησης δ μέσω της (Α-39) είναι συνέπεια του θεωρήματος Fourier. Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $f(x)$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

ικανοποιεί την

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx}\, dk\ ,$$

οπότε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'}\, dx' \right) e^{ikx}\, dk\ , \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}\, dk \right) f(x')\, dx'\ . \end{aligned}$$

Επομένως από την (Α-40) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}\, dk = \delta(x-x')\ .$$

Το φυσικό περιεχόμενο αυτής της ιδιαίτερα περίεργης συσχέτισης της συνάρτησης δ με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης συνημίτονο[5] σε όλη την ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι ότι η συνάρτηση δ περιέχει όλες τις συχνότητες και μάλιστα με το ίδιο πλάτος. Αυτός είναι και ο λόγος που πολλές φορές όταν ανάβουμε έναν ελαττωματικό διακόπτη που πετάει σπινθήρα, το ραδιόφωνο κάνει παράσιτα σε όποιον σταθμό και αν είναι συντονισμένο αυτό. Το ρεύμα που περνά από το διακόπτη είναι πρακτικά μια δέλτα συνάρτηση με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε όλες τις συχνότητες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Α-19. *Δείξτε με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = \pi\ ,$$

για κάθε $\alpha > 0$ και στη συνέχεια από την

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-1/\epsilon}^{1/\epsilon} e^{ik(x-x')}\, dk = 2\pi\delta(x-x')$$

επαληθεύστε την (Α-37).

---

[5] Το φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος με το ημίτονο είναι ταυτοτικά μηδέν λόγω του ότι το ημίτονο είναι περιττή συνάρτηση.

Η παράγωγος της δ

Θέλουμε τώρα να ορίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $\delta(x-x')$

$$\delta'(x-x') = \frac{d\,\delta(x-x')}{dx} = -\frac{d\,\delta(x-x')}{dx'} \,.$$

Η $\delta'(x-x')$ μπορεί να οριστεί και πάλι έμμεσα από την παράγωγο κάποιας οικογένειας συναρτήσεων, η οποία χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό της $\delta(x-x')$. Αν επιλέξουμε την ακολουθία γκαουσιανών (Α-34), ορίζουμε την $\delta'(x-x')$ ως

$$\frac{d\,\delta(x-x')}{dx} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{dg_\epsilon}{dx} \,.$$

Υπολογίζουμε τη δράση της $\delta'(x-x')$ σε μια δοκιμαστική συνάρτηση $f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dg_\epsilon(x-x')}{dx}f(x')dx' &= \frac{d}{dx}\left(\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x-x')f(x')dx'\right) \\ &= \frac{df(x)}{dx} \,, \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι η δράση της $\delta'(x-x')$ σε μία δοκιμαστική συνάρτηση είναι η ακόλουθη

$$\frac{d\,\delta(x-x')}{dx} = \delta(x-x')\,\frac{d}{dx'} \,, \tag{A-43}$$

και

$$\frac{d\,\delta(x-x')}{dx'} = -\delta(x-x')\,\frac{d}{dx'} \,. \tag{A-44}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα ήταν διαισθητικά αναμενόμενα από το διάγραμμα της dg_ϵ/dx'. Στο Σχήμα Α-3 φαίνεται ότι η dg_ϵ/dx' έχει δύο ακρότατα αντίθετου προσήμου στα γειτονικά σημεία $x' = x \pm \epsilon/\sqrt{2}$ και επομένως, η δράση της σε κάποια δοκιμαστική συνάρτηση $f(x)$ "υπολογίζει" τη συνάρτηση σε αυτά τα γειτονικά σημεία και παράγει τη διαφορά τους δίνοντας

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dg_\epsilon(x-x')}{dx'}f(x')dx' \;\approx\; \frac{-f(x+\epsilon/\sqrt{2}) + \; f(x-\epsilon/\sqrt{2})}{\sqrt{2}\epsilon} \approx -\frac{df}{dx} \,.$$

Αν η $\delta(x)$ είναι η πυκνότητα φορτίου που αντιστοιχεί σε μοναδιαίο σημειακό φορτίο στο $x = 0$, η $\delta'(x)$ αντιστοιχεί σε μια κατανομή φορτίου σαν αυτή που περιγράφει ένα ηλεκτρικό δίπολο μοναδιαίας διπολικής ροπής, αφού από την (Α-44) έχουμε

$$\int_{\infty}^{\infty} x\delta'(x)dx = -1 \,.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Α-20. *Δείξτε ότι*

$$\delta(\alpha(x-x')) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x-x') \,.$$

[Υπόδειξη: Θεωρήστε ως μεταβλητή ολοκλήρωσης την αx, αλλά προσέξτε τα όρια της ολοκλήρωσης όταν $\alpha < 0$.]

Άσκηση A-21. *Αν η $f(x)$ έχει απλές ρίζες x_i, δείξτε ότι ισχύει*

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i) \, ,$$

[Υπόδειξη: Τα μόνα σημεία στα οποία η $\delta(f(x))$ είναι μη μηδενική είναι οι ρίζες x_i της $f(x)$. Αναπτύξτε την $f(x)$ σε σειρά Taylor γύρω από τα σημεία x_i και υπολογίστε το ολοκλήρωμα.]

Άσκηση A-22. *Δείξτε ότι $x\delta(x) = 0$, $\int dx\; x\;\delta'(x) = -1$, $x^2\delta'(x) = 0$.*

Άσκηση A-23. *Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a - x)\delta(x - b)dx = \delta(a - b) \, , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(a - x)\delta(x - b)dx = \delta'(a - b) \, .$$

Άσκηση A-24. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{\pi} dx \int_1^2 dy \; \delta(\sin(x)) \; \delta(x^2 - y^2) \, .$$

Άσκηση A-25. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int\int \delta(E - H)dxdp \, .$$

αν E είναι μια σταθερά και

$$H = p^2/2 + x^2/2 \, .$$

A-8 Πολλαπλασιαστές Lagrange

Οι πολλαπλασιαστές Lagrange χρησιμεύουν στο να προσδιορίζουμε τα ακρότατα συναρτήσεων υπό ορισμένες συνθήκες. Θα αναφερθούμε αρχικά στη διαδικασία εύρεσης των ακροτάτων κάποιας συνάρτησης $h(\vec{x})$, όπου το $\vec{x}$ ανήκει στον $\mathbb{R}^n$.

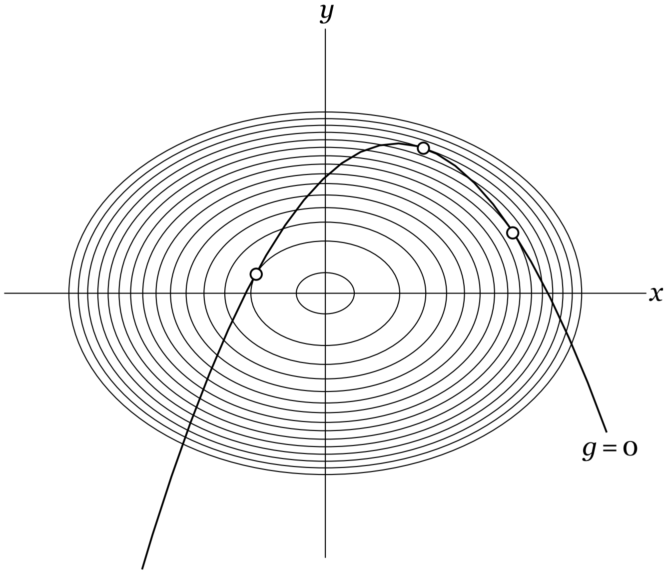
Επειδή στο ακρότατο σημείο $\vec{x}_0$ μιας συνάρτησης $h(\vec{x})$ η πρώτη μεταβολή της συνάρτησης είναι μηδενική, πρέπει να ικανοποιείται η σχέση

$$\vec{\nabla} h|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = 0 \, .$$

Το ακρότατο μιας συνάρτησης υπό τον περιορισμό ενός δεσμού...

Για να προσδιορίσουμε το ακρότατο της $h(\vec{x})$, όταν επιπλέον ισχύει ο περιορισμός $g(\vec{x}) = 0$,[6] εργαζόμαστε ως εξής: το $\vec{x}_0$ είναι ακρότατο της h, όταν για κάθε μικρή μετατόπιση από το $\vec{x}_0$ κατά τη διεύθυνση $\vec{\eta}$ ισχύει

[6]Το μαθηματικό αυτό πρόβλημα είναι ανάλογο με το πρόβλημα υπολογισμού του μέγιστου υψομέτρου σε μια καθορισμένη διαδρομή που έχει χαραχθεί σε ένα χάρτη. Η συνάρτηση h είναι στην περίπτωση αυτή το υψόμετρο σε κάθε σημείο του χάρτη, ενώ η συνάρτηση g είναι η διαγεγραμμένη διαδρομή. Σ' αυτό το ορειβατικής φύσεως πρόβλημα είναι προφανές ότι η λύση βρίσκεται σε κάποιο από τα σημεία, όπου η χαραγμένη διαδρομή είναι παράλληλη με κάποια από τις ισοϋψείς, αφού στα σημεία αυτά προχωρώντας κατά μήκος της διαδρομής παραμένουμε στο ίδιο ύψος.



Σχήμα Α-5: Οι ελλειπτικές ισοϋψείς της $h = x^2/2 + y^2$ και η καμπύλη $g = y - x - 1 + cx^2 = 0$ με $c = 0.8$. Οι μικροί κύκλοι σημειώνουν τα σημεία της $g = 0$ στα οποία η h έχει ακρότατο. Παρατηρείτε ότι σε αυτά τα σημεία οι ισοϋψείς είναι παράλληλες στην εφαπτομένη της g και συνεπώς υπάρχει πολλαπλασιαστής λ που ικανοποιεί τη σχέση: $\vec{\nabla}(h + \lambda g)|_{\vec{x}_0} = 0$. Τα σημεία προσδιορίζονται ως εξής: ο μηδενισμός των δύο συνιστωσών της $\vec{\nabla}(h + \lambda g)|_{\vec{x}_0} = 0$ προσδιορίζει τα σημεία $x(\lambda)$ και $y(\lambda)$ στα οποία η $h + \lambda g$ έχει ακρότατο. Τα λ και οι ακριβείς συντεταγμένες των υπό αναζήτηση σημείων προσδιορίζονται αν αντικαταστήσουμε τα $x(\lambda)$ και $y(\lambda)$ στην $g = 0$ και λύσουμε τη σχέση αυτή ως προς λ.

$$\left(\vec{\nabla}h|_{\vec{x}_0}, \vec{\eta}\right) = 0 \; . \qquad \text{(A-45)}$$

Η έκφραση $(\vec{a}, \vec{b})$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Επειδή, όμως, οι μετατοπίσεις από το ακρότατο πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό $g(\vec{x}) = 0$, απαιτούμε η σχέση (Α-45) να ικανοποιείται μόνο για τις μετατοπίσεις $\vec{\eta}$ για τις οποίες ισχύει

$$g(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{\eta}) = 0 \; .$$

Εφαρμογή της απαίτησης αυτής για $|\epsilon| << 1$ συνεπάγεται ότι οι μετατοπίσεις πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\left(\vec{\nabla}g|_{\vec{x}_0}, \vec{\eta}\right) = 0 \; .$$

Συνεπώς, το ακρότατο $\vec{x}_0$ πρέπει να ικανοποιεί την

$$\left(\vec{\nabla}h|_{\vec{x}_0}, \vec{\eta}\right) = 0 \; ,$$

για εκείνα τα $\vec{\eta}$ που ικανοποιούν την

$$\left(\vec{\nabla}g|_{\vec{x}_0}, \vec{\eta}\right) = 0 \; .$$

Αυτό σημαίνει ότι, το διάνυσμα $\vec{\nabla}h|_{\vec{x}_0}$ πρέπει να είναι κάθετο σε εκείνα τα $\vec{\eta}$ που είναι κάθετα στο $\vec{\nabla}g|_{\vec{x}_0}$. Άρα, πρέπει τα $\vec{\nabla}h|_{\vec{x}_0}$ και $\vec{\nabla}g|_{\vec{x}_0}$ να είναι παράλληλα και να υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε

$$\vec{\nabla} h|_{\vec{x}_0} = -\lambda \vec{\nabla} g|_{\vec{x}_0} \; .$$

Συνεπώς, για να προσδιορίσουμε το ακρότατο της h υπό την συνθήκη $g = 0$, αρκεί να προσδιορίσουμε το ακρότατο της $h+\lambda g$, δηλαδή, το $\vec{x}_0(\lambda)$ που ικανοποιεί τη σχέση

...το βρίσκουμε από το ακρότατο της συνάρτησης + λ φορές το δεσμό

$$\vec{\nabla}(h + \lambda g)|_{\vec{x}_0} = 0 \; .$$

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε το λ ούτως ώστε

Η τιμή του λ προσδιορίζεται από την εξίσωση του δεσμού

$$g(\vec{x}_0(\lambda)) = 0$$

(βλ. Σχήμα Α-5). Η μέθοδος αυτή πρωτοεφαρμόστηκε από τον Lagrange και το λ ονομάζεται *πολλαπλασιαστής του Lagrange*. Με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange το πρόβλημα προσδιορισμού του ακροτάτου της h υπό τη συνθήκη $g = 0$ μετατρέπεται στο πρόβλημα εύρεσης του ακροτάτου $\vec{x}_0(\lambda)$ της συνάρτησης $h+\lambda g$ άνευ οποιουδήποτε περιορισμού. Το λ προσδιορίζεται στη συνέχεια έτσι ώστε το ακρότατο σημείο της $h+\lambda g$ να κείται επί της $g = 0$.

Η μέθοδος αυτή γενικεύεται εύκολα, όταν υπάρχουν περισσότεροι περιορισμοί. Υποθέστε για παράδειγμα ότι ζητάμε το ακρότατο της $h(\vec{x})$ υπό τις συνθήκες $g(\vec{x}) = 0$ και $f(\vec{x}) = 0$. Τότε, όπως και προηγουμένως, πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\left(\vec{\nabla} h|_{\vec{x}_0}, \vec{\eta}\right) = 0 \; ,$$

για όλα τα $\vec{\eta}$ που ανήκουν στο γραμμικό χώρο $\mathbb{F}^{\perp}$, ο οποίος είναι κάθετος στο γραμμικό χώρο $\mathbb{F}$ που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\vec{\nabla} g|_{\vec{x}_0}$ και $\vec{\nabla} f|_{\vec{x}_0}$ (βλ. Σχήμα Α-6), αφού

$$\left(\vec{\nabla} g|_{\vec{x}_0}, \vec{\eta}\right) = 0$$

και

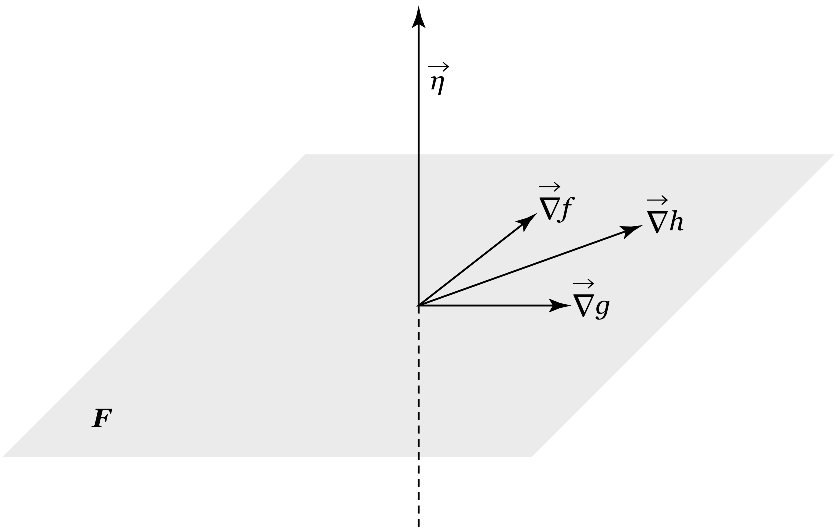
$$\left(\vec{\nabla} f|_{\vec{x}_0}, \vec{\eta}\right) = 0 \; .$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\vec{\nabla} h|_{\vec{x}_0}$ πρέπει να ανήκει στο γραμμικό χώρο που είναι κάθετος στο χώρο που ανήκει το $\vec{\eta}$, δηλαδή πρέπει να ανήκει στον κάθετο χώρο του $\mathbb{F}^{\perp}$ που δεν είναι άλλος από τον ίδιο τον $\mathbb{F}$ (βλ. Σχήμα Α-6). Συνεπώς, υπάρχουν πολλαπλασιαστές λ και μ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν τη σχέση

$$\vec{\nabla} h|_{\vec{x}_0} + \lambda \vec{\nabla} g|_{\vec{x}_0} + \mu \vec{\nabla} f|_{\vec{x}_0} = 0 \; .$$

Η παραπάνω σχέση προσδιορίζει το ακρότατο συναρτήσει των λ και μ , ενώ οι τιμές των πολλαπλασιαστών προσδιορίζονται εκ των υστέρων από την απαίτηση το ακρότατο να ικανοποιεί τους περιορισμούς

$$g(\vec{x}_0(\lambda, \mu)) = f(\vec{x}_0(\lambda, \mu)) = 0 \; .$$



Σχήμα Α-6: Τα διανύσματα $\vec{\nabla} g|_{\vec{x}_0}$ και $\vec{\nabla} f|_{\vec{x}_0}$ ορίζουν το γραμμικό υποχώρο $\mathbb{F}$, ο οποίος στην τρισδιάστατη αναπαράσταση του σχήματος είναι το επίπεδο που ορίζεται από τα δύο διανύσματα. Τα διανύσματα $\vec{\eta}$ είναι κάθετα στα διανύσματα $\vec{\nabla} g|_{\vec{x}_0}$, $\vec{\nabla} f|_{\vec{x}_0}$ και συνεπώς κείνται στον κάθετο υποχώρο $\mathbb{F}^{\perp}$, ο οποίος στο σχήμα είναι η ευθεία η κάθετη στο επίπεδο. Το διάνυσμα $\vec{\nabla} h|_{\vec{x}_0}$ είναι κάθετο σε όλα τα διανύσματα $\vec{\eta}$ που ανήκουν στον υποχώρο $\mathbb{F}^{\perp}$ και επομένως πρέπει να ανήκει στον κάθετο υποχώρο του $\mathbb{F}^{\perp}$ που είναι ο υποχώρος $\left(\mathbb{F}^{\perp}\right)^{\perp}$. Ωστόσο, $\left(\mathbb{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathbb{F}$ και επομένως το διάνυσμα $\vec{\nabla} h|_{\vec{x}_0}$ κείται στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\vec{\nabla} g|_{\vec{x}_0}$ και $\vec{\nabla} f|_{\vec{x}_0}$, δηλαδή είναι γραμμικός συνδυασμός αυτών των δύο διανυσμάτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Α-26. *Προσδιορίστε το ακρότατο της x^2+y^2 υπό τον περιορισμό $x+y=1$. Προσδιορίστε την τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange λ για την οποία επιτυγχάνεται το ακρότατο και σχεδιάστε για αυτή την τιμή του λ τις ισοϋψείς της συνάρτησης*

$$x^2 + y^2 + \lambda(x + y) \ .$$

Τι παρατηρείτε;

Άσκηση Α-27. *Προσδιορίστε το ακρότατο της*

$$S(p_1, \ldots, p_n) = -k \sum_{k=1}^{N} p_k \ln p_k \ ,$$

υπό τον περιορισμό

$$\sum_{k=1}^{N} p_k = N \ .$$

Δείξτε ότι το ακρότατο αυτό της S είναι

$$S = k \ln N \ .$$

Είναι αυτό το ακρότατο μέγιστο;

Α-9 Ένα παράδειγμα χρήσης των πολλαπλασιαστών Lagrange

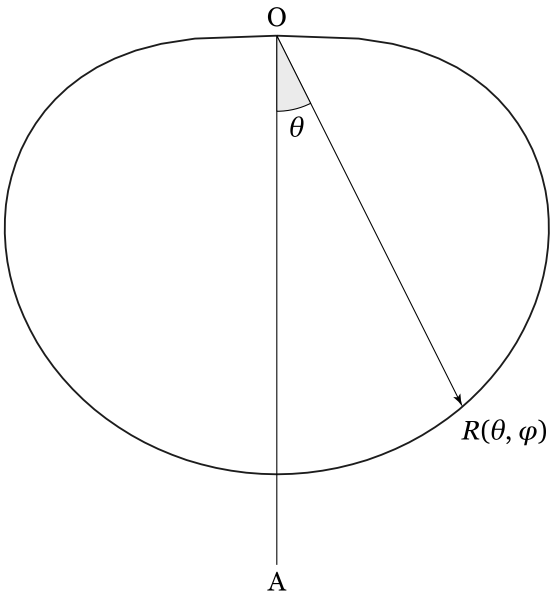
Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να γενικευθεί και σε άλλους γραμμικούς χώρους, όπως για παράδειγμα στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων σε κάποιο διάστημα $[x_1, x_2]$, ο οποίος μπορεί να εφοδιαστεί με το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο:

$$(h, \eta) \equiv \int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)dx \ ,$$

σχηματίζοντας έτσι ένα *χώρο Hilbert*. Εάν στο χώρο αυτό, λοιπόν, η συνθήκη για την εύρεση ακροτάτου είναι η $(h, \eta) = 0$ για όλες τις συναρτήσεις $\eta(t)$ που ικανοποιούν τη συνθήκη $(g, \eta) = 0$, τότε, όπως και προηγουμένως, η h πρέπει να είναι λ φορές η g. Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια αυτή τη γενικευμένη μέθοδο που χρησιμοποιείται στη μηχανική και θα την επεξηγήσουμε με ένα παράδειγμα.

Ζητείται να προσδιοριστεί το σχήμα που πρέπει να έχει ένα συνεχές πλανητοειδές σταθερής πυκνότητας ρ και ολικής μάζας M, ώστε η βαρυτική έλξη που ασκείται σε ένα σημείο της επιφάνειάς του κατά τη διεύθυνση της καθέτου στην εφαπτόμενη στο σημείο αυτό να είναι μέγιστη.

Το σχήμα με τη μέγιστη βαρύτητα στην επιφάνεια



Σχήμα Α-7: Το πλανητοειδές που μεγιστοποιεί τη βαρυτική έλξη στο σημείο Ο κατά τη διεύθυνση της καθέτου ΟΑ. Η πολική εξίσωση του πλανητοειδούς είναι $R = A\sqrt{\cos\theta}$, όπου θ η γωνία που σχηματίζεται με την κάθετο ΟΑ.

Εάν η απόσταση της επιφάνειας από το εν λόγω σημείο Ο είναι $R(\theta, \phi)$ (βλ. Σχήμα Α-7), όπου θ η πολική γωνία που σχηματίζεται στο Ο με την κάθετο στην επιφάνεια και ϕ η αζιμουθιακή γωνία γύρω από την κάθετο, τότε η μάζα του πλανητοειδούς δίνεται από το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$M[R] = \rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R(\theta,\phi)} r^2 \, dr \tag{A-46}$$

$$= \frac{\rho}{3} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} R^3(\theta,\phi) \, d\phi \,, \tag{A-47}$$

που είναι ένα συναρτησοειδές της $R(\theta, \phi)$. Η βαρυτική έλξη ανά μονάδα μάζας κατά τη διεύθυνση ΟΑ (προσέξτε τον όρο $\cos\theta$) είναι

$$g[R] = \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R(\theta,\phi)} r^2 \left(\frac{G\rho\cos\theta}{r^2} \right) dr$$

$$= G\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} R(\theta,\phi) \, d\phi \,.$$

Στους παραπάνω υπολογισμούς θεωρήσαμε ότι η επιφάνεια ορίζεται για γωνίες $0 \leq \theta \leq \pi/2$, διότι, εάν η επιφάνεια εκτεινόταν και σε $\theta > \pi/2$, το βαρυτικό πεδίο που θα δημιουργούταν στο Ο θα ήταν μικρότερο από εκείνο ενός πλανητοειδούς που θα είχε το ίδιο σχήμα για $\theta \leq \pi/2$, ενώ όλη η μάζα που προηγουμένως εκτεινόταν σε γωνίες $\theta > \pi/2$ αποκόπτονταν και απομακρυνόταν σε άπειρη απόσταση. Επίσης, ενώ αναμένουμε ότι για λόγους συμμετρίας η ζητούμενη επιφάνεια θα είναι συμμετρική ως προς την κάθετο στο Ο, δεν έχουμε εξαρχής εισαγάγει μια τέτοια παραδοχή· η R μπορεί να εξαρτάται και από τη γωνία ϕ.

Το πρόβλημα, λοιπόν, είναι να βρεθεί η $R(\theta, \phi)$ που μεγιστοποιεί την $g[R]$ υπό τη συνθήκη $M[R] = M$. Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε βρει τη ζητούμενη επιφάνεια, τότε, για να δίνει η R τη μέγιστη κατακόρυφη δύναμη, πρέπει μια μικρή μεταβολή της επιφάνειας κατά $\eta(\theta, \phi)$ να ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \eta(\theta,\phi) \, d\phi = 0 \,,$$

ή υπό τη μορφή εσωτερικού γινομένου πρέπει να ισχύει η σχέση

$$(\sin\theta\cos\theta, \eta)_{\theta,\phi} = 0 \,.$$

Πρέπει όμως ταυτόχρονα η $\eta(\theta, \phi)$ να είναι τέτοια ώστε η παραπλήσια στην R επιφάνεια $R + \eta$ να έχει και αυτή μάζα M, άρα πρέπει

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} R^2(\theta,\phi)\eta(\theta,\phi) \, d\phi = 0 \,,$$

ή υπό την μορφή εσωτερικού γινομένου πρέπει να ισχύει η σχέση

$$(\sin\theta R^2, \eta)_{\theta,\phi} = 0 \,.$$

Άρα, υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε

$$\sin\theta\cos\theta = \lambda\sin\theta R^2 \,.$$

Συνεπώς, η επιφάνεια που μεγιστοποιεί το βαρυτικό πεδίο είναι η

$$R(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\cos\theta} \,, \tag{A-48}$$

και η σταθερά λ μπορεί να προσδιοριστεί από την απαίτηση η συνολική μάζα του πλανητοειδούς να είναι M. Έτσι, εισάγοντας τη λύση (A-48) στη σχέση (A-47) για τη μάζα, βρίσκουμε ότι $\lambda = (4\pi\rho/15M)^{2/3}$. Συνεπώς, η επιφάνεια είναι πράγματι συμμετρική ως προς την κατακόρυφο, αφού το σχήμα της δεν έχει εξάρτηση από τη γωνία ϕ. Το σχήμα ενός τέτοιου πλανητοειδούς είναι κάπως πεπλατυσμένο γύρω από το σημείο Ο όπως φαίνεται στο Σχήμα (A-7).

Άσκηση A-28. *Θεωρήστε το συναρτησοειδές* ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$S[F] = \int_a^b dx \int_c^d dy \; L(F, F_x, F_y, x, y) \,,$$

όπου $F(x,y)$ και $F_x = \partial F/\partial x$, $F_y = \partial F/\partial y$. Δείξτε ότι η $F(x,y)$ που καθιστά το $S[F]$ στάσιμο για μεταβολές της $F(x,y)$, $\xi(x,y)$, τέτοιες ώστε $\xi(a,y) = \xi(b,y) = 0$ για κάθε y και $\xi(x,c) = \xi(x,d) = 0$ για κάθε x, ικανοποιεί την εξίσωση Euler - Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial F_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial F_y}\right) - \frac{\partial L}{\partial F} = 0 \,.$$

Στο ίδιο συμπέρασμα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε με το να αναζητήσουμε το ακρότατο της

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} (G\rho \sin\theta \cos\theta R - \frac{\rho\lambda}{3} \sin\theta R^3) \, d\phi \,,$$

όπου λ ένας πολλαπλασιαστής Lagrange. Πρέπει δηλαδή να προσδιοριστεί η συνάρτηση $R(\theta, \phi)$ που καθιστά το συναρτησοειδές του τύπου

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \; L(\theta, \phi, R)$$

ακρότατο, όπου

$$L = G\rho \sin\theta \cos\theta R - \frac{\rho\lambda}{3} \sin\theta R^3 \,.$$

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange για το παραπάνω συναρτησοειδές είναι

$$\frac{\partial L}{\partial R} = 0,$$

και οδηγούν στη λύση

$$R(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{G}{\lambda}} \sqrt{\cos\theta} \,,$$

η οποία αν ισαχθεί στην εξίσωση του δεσμού $M[R] = M$ οδηγεί στην πολική εξίσωση του σχήματος

$$R(\theta, \phi) = \sqrt[3]{\frac{15M}{4\pi\rho}}\sqrt{\cos\theta}\ ,$$

όπως και προηγουμένως.

A-10 Το πηλίκο Rayleigh σε συνεχείς χώρους και η ανισότητα Poincaré

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις στάσιμες τιμές του πηλίκου

$$R[\eta] = \frac{\int_0^T P(t)\dot{\eta}^2 dt}{\int_0^T Q(t)\eta^2 dt}\ , \tag{A-49}$$

στο χώρο των συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων η, που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $\eta(0) = \eta(T) = 0$. Στην παραπάνω έκφραση το $\dot{\eta}$ συμβολίζει την παράγωγο $d\eta/dt$.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής του πηλίκου μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{d\eta}{dt}P(t)\frac{d\eta}{dt}dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\eta P(t)\frac{d\eta}{dt}\right)dt - \int_0^T \eta\frac{d}{dt}\left(P(t)\frac{d\eta}{dt}\right)dt \\
&= \eta P(t)\frac{d\eta}{dt}\bigg|_0^T - \int_0^T \eta\frac{d}{dt}\left(P(t)\frac{d\eta}{dt}\right)dt \\
&= \int_0^T \eta\left(-\frac{d}{dt}P(t)\frac{d}{dt}\right)\eta\ dt\ .
\end{aligned}$$

Κατά τη μετάβαση από τη δεύτερη στην τρίτη σειρά ο πρώτος όρος απαλείφθηκε εξαιτίας των συνοριακών συνθηκών $\eta(0) = \eta(T) = 0$. Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{L}$ το γραμμικό τελεστή

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{d}{dt}P(t)\frac{d}{dt}\ , \tag{A-50}$$

το πηλίκο Rayleigh γράφεται ισοδυνάμως

$$R[\eta] = \frac{\int_0^T \eta\mathcal{L}\eta dt}{\int_0^T \eta Q(t)\eta dt}\ .$$

Για να προσδιορίσουμε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται από μία στάσιμη συνάρτηση η_s, θεωρούμε τη διαταραγμένη τροχιά $\eta_s + \epsilon\xi$, με $\xi(0) = \xi(T) = 0$ και απαιτούμε το πηλίκο Rayleigh επί της διαταραγμένης τροχιάς να μη διαφέρει από το αρχικό σε πρώτη τάξη ως προς ϵ, να είναι δηλαδή

$$R[\eta_s + \epsilon\xi] = R[\eta_s] + O(\epsilon^2)\ ,$$

για κάθε ξ που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $\xi(0) = \xi(T) = 0$. Αναπτύσσοντας το πηλίκο Rayleigh $R[\eta_s + \epsilon\xi]$ σε σειρά Taylor ως προς ϵ, λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
R[\eta_s + \epsilon\xi] - R[\eta_s] &= \frac{\int_0^T (\eta_s + \epsilon\xi)\mathcal{L}(\eta_s + \epsilon\xi)dt}{\int_0^T (\eta_s + \epsilon\xi)Q(\eta_s + \epsilon\xi)dt} - \frac{\int_0^T \eta_s\mathcal{L}\eta_s dt}{\int_0^T \eta_s Q\eta_s dt} \\
&= \frac{\epsilon}{\int_0^T \eta_s Q\eta_s dt}\int_0^T (\eta_s\mathcal{L}\xi + \xi\mathcal{L}\eta_s - 2R\xi Q\eta_s)\, dt + O(\epsilon^2) \\
&= \frac{2\epsilon}{\int_0^T \eta_s Q\eta_s dt}\int_0^T \xi\,(\mathcal{L}\eta_s - RQ\eta_s)\, dt + O(\epsilon^2)\ , \quad \text{(A-51)}
\end{aligned}
$$

όπου το R είναι συντομογραφία του $R[\eta_s]$. Το ολοκλήρωμα συμπτύχθηκε στο τελευταίο βήμα επειδή, για τον τελεστή $\mathcal{L}$ που ορίσαμε στην (Α-50), ισχύει ότι

$$
\int_0^T \eta_s\mathcal{L}\xi dt = \int_0^T \xi\mathcal{L}\eta_s dt\ . \qquad \text{(A-52)}
$$

Γενικότερα, όταν για κάθε συνεχώς διαφορίσιμη συναρτήση f και g, με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στα άκρα του διαστήματος, ο τελεστής $\mathcal{L}$ έχει την ιδιότητα

$$
\int_0^T f\mathcal{L}g dt = \int_0^T g\mathcal{L}f dt\ , \qquad \text{(A-53)}
$$

τότε ο $\mathcal{L}$ ονομάζεται *αυτο-συζυγής* (*self-adjoint*) ή *ερμιτιανός τελεστής*. Ο τελεστής $\mathcal{L}$ που ορίσαμε στην (Α-50) είναι ερμιτιανός. Οι ερμιτιανοί τελεστές είναι το αντίστοιχο των συμμετρικών πινάκων σε χώρους πεπερασμένων διαστάσεων. Η απαίτηση ο τελεστής να είναι ερμιτιανός είναι αναγκαία για την περαιτέρω ανάπτυξη.

Από την (Α-51) προκύπτει ότι η η_s είναι στάσιμη αν για κάθε ξ με $\xi(0) = \xi(T) = 0$ ισχύει ότι

$$
\int_0^T \xi\,(\mathcal{L}\eta_s - R[\eta_s]Q\eta_s)\, dt = 0\ .
$$

Επειδή η παραπάνω σχέση πρέπει να ικανοποιείται για κάθε συνάρτηση ξ, η συνάρτηση η_s θα πρέπει να αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$
\mathcal{L}\eta_s - R[\eta_s]Q\eta_s = 0\ ,
$$

με συνοριακές συνθήκες $\eta_s(0) = \eta_s(T) = 0$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι οι στάσιμες τιμές του πηλίκου Rayleigh είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος ιδιοτιμών

$$
-\frac{d}{dt}P(t)\frac{d\eta}{dt} = \lambda Q(t)\eta\ ,
$$

με συνοριακές συνθήκες $\eta(0) = \eta(T) = 0$, ενώ οι συναρτήσεις η_s που καθιστούν το πηλίκο στάσιμο είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις. Με αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα εύρεσης των στάσιμων τιμών του πηλίκου

Οι στάσιμες τιμές του πηλίκου Rayleigh ιδιοτιμές της διαφορικής εξίσωσης $(\mathcal{L} - RQ)\eta = 0$

Rayleigh ανάγεται στην εύρεση των ιδιοσυναρτήσεων ενός προβλήματος ιδιοτιμών τύπου Sturm-Liouville.

Τα προβλήματα Sturm-Liouville συνοδεύονται από πλούσια θεωρία όταν $P > 0$ και $Q > 0$[7] στο διάστημα $[0, T]$. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών ιδιοτιμών $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, οι οποίες σχηματίζουν μία μονοτόνως αύξουσα ακολουθία με $\lambda_n \to \infty$ καθώς $n \to \infty$, ενώ η ιδιοσυνάρτηση η_n, που αντιστοιχεί στη λ_n μηδενίζεται ακριβώς n φορές στο διάστημα $(0, T)$. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι οι ιδιοσυναρτήσεις σχηματίζουν μία πλήρη βάση στην οποία μπορεί να αναλυθεί οποιαδήποτε συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τις μηδενικές συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα του διαστήματος. Τέλος, επειδή ο $\mathcal{L}$ είναι ερμιτιανός δύο ιδιοσυναρτήσεις η_n και η_m ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνιότητας

Οι ιδιοσυναρτήσεις της $(\mathcal{L} - RQ)\eta = 0$ ως ορθοκανονική βάση διανυσμάτων

$$\int_0^T \eta_n Q \eta_m dt = 0 \; . \tag{A-54}$$

Συνεπώς, οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να κανονικοποιηθούν κατάλληλα ώστε

$$\int_0^T \eta_n Q \eta_m dt = \delta_{nm} \; . \tag{A-55}$$

Ο τρόπος απόδειξης της σχέσης ορθογωνιότητας βασίζεται στη συνήθη επιχειρηματολογία που συναντά κανείς σε όλα τα προβλήματα ιδιοτιμών συμμετρικών πινάκων. Οι ιδιοσυναρτήσεις η_n και η_m με ιδιοτιμές λ_n, λ_m ικανοποιούν εξ ορισμού τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\eta_n &= \lambda_n Q \eta_n \; , \\ \mathcal{L}\eta_m &= \lambda_m Q \eta_m \; . \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με την η_m και ολοκληρώνοντας, λαμβάνουμε

$$\int_0^T \eta_n \mathcal{L} \eta_m dt = \lambda_m \int_0^T \eta_n Q \eta_m dt \; . \tag{A-56}$$

Λόγω όμως της ερμιτιανότητας του τελεστή $\mathcal{L}$ το αριστερό μέλος της (A-56) γράφεται και ως

$$\int_0^T \eta_n \mathcal{L} \eta_m dt = \int_0^T \eta_m \mathcal{L} \eta_n dt = \lambda_n \int_0^T \eta_m Q \eta_n dt \; . \tag{A-57}$$

Αφαιρώντας την (A-56) από την (A-57) καταλήγουμε στη σχέση

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^T \eta_m Q \eta_n dt = 0 \; , \tag{A-58}$$

που συνεπάγεται ότι οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνιότητας (A-54).

[7] Υπάρχει θεωρία και όταν η Q αλλάζει πρόσημο στο διάστημα $[0, T]$ σε απομονωμένα σημεία (βλ. Coddington & Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw Hill, 1955, σελ. 212)

Στις περιπτώσεις που οι ιδιοτιμές του τελεστή $\mathcal{L}$ κατατάσσονται έτσι ώστε να είναι όλες μεγαλύτερες από την πρώτη ιδιοτιμή λ_0, οι τιμές του πηλίκου Rayleigh (Α-49) θα είναι πάντοτε μεγαλύτερες από το λ_0, θα ισχύει δηλαδή η ανισότητα

$$R[\eta] \geq \lambda_0 \ . \tag{Α-59}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Α-29. *Αποδείξτε την ανισότητα (Α-59). Για να το πετύχετε αυτό αναπτύξτε μία τυχαία συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στην πλήρη βάση των ιδιοσυναρτήσεων η_n ως*

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta_n$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας δείξτε ότι το πηλίκο Rayleigh γράφεται ως

$$R[\eta] = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^2}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2} \ .$$

Τώρα, μπορείτε εύκολα να αποδείξετε την ανισότητα (Α-59).

Ως παράδειγμα, θα υπολογίσουμε τις στάσιμες τιμές του πηλίκου

$$R[\eta] = \frac{\int_0^T \dot{\eta}^2 dt}{\int_0^T \eta^2 dt} \ , \tag{Α-60}$$

για συναρτήσεις η που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $\eta(0) = \eta(T)$ $= 0$. Ο τελεστής $\mathcal{L}$ της (Α-50) για την περίπτωση αυτή είναι ο

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dt^2} \ ,$$

ο οποίος με τις δοθείσες συνοριακές συνθήκες είναι ερμιτιανός, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση (Α-53). Συνεπώς, οι στάσιμες τιμές του πηλίκου (Α-60) είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος

$$-\frac{d^2\eta}{dt^2} = \lambda\eta \ ,$$

με συνοριακές συνθήκες $\eta(0) = \eta(T) = 0$. Οι ιδιοτιμές του προβλήματος αυτού είναι

$$\lambda_n = \frac{(n+1)^2\pi^2}{T^2} \ , \ \text{με } n = 0, 1, \ldots$$

και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$\eta_n = \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \ .$$

Συνεπώς, το πηλίκο (Α-60) θα είναι πάντοτε μεγαλύτερο από τη μικρότερη ιδιοτιμή $\lambda_0 = \pi^2/T^2$. Οδηγούμαστε, έτσι, στην ανισότητα του Poincarè

$$\frac{\int_0^T \dot{\eta}^2 dt}{\int_0^T \eta^2 dt} \geq \frac{\pi^2}{T^2} \ , \tag{Α-61}$$

για κάθε συνάρτηση $\eta(t)$. Στην παραπάνω σχέση η ισότητα επιτυγχάνεται μόνο από την ιδιοσυνάρτηση

$$\eta_0 = \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Α-30. *Έχουμε δείξει ότι η δεύτερη μεταβολή της δράσης από τη φυσική κίνηση δίνεται από την έκφραση*

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(P\dot{\eta}^2 - Q\eta^2\right) dt ,$$

όπου P και Q είναι αμιγείς συναρτήσεις του χρόνου. Το η είναι μία οποιαδήποτε μεταβολή της φυσικής τροχιάς που μηδενίζεται στον αρχικό και τελικό χρόνο. Δείξτε ότι για μηχανικά συστήματα είναι $P(t) > 0$. Θεωρήστε, τώρα, το πηλίκο Rayleigh

$$R[\eta] = \frac{\int_{t_1}^{t_2} P\dot{\eta}^2 \, dt}{\int_{t_1}^{t_2} Q\eta^2 \, dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \eta\mathcal{L}\eta \, dt}{\int_{t_1}^{t_2} Q\eta^2 \, dt} ,$$

στο χώρο των συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων που μηδενίζονται στον αρχικό και τελικό χρόνο, όπου ο γραμμικός τελεστής $\mathcal{L}$ ορίζεται ως

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} P \frac{d}{dt} .$$

Δείξτε ότι ο τελεστής $\mathcal{L}$ είναι ερμιτιανός και ότι οι στάσιμες τιμές του πηλίκου Rayleigh είναι οι ιδιοτιμές λ του ακόλουθου Sturm-Liouville προβλήματος

$$L\eta = \lambda Q\eta ,$$

στο διάστημα $[t_1, t_2]$ με συνοριακές συνθήκες $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση η είναι αυτή που καθιστά το πηλίκο ίσο με λ. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(P\dot{\eta}^2 - Q\eta^2\right) dt > (\lambda_0 - 1) \int_{t_1}^{t_2} Q\eta^2 dt ,$$

όπου λ_0 είναι η μικρότερη ιδιοτιμή του παραπάνω προβλήματος Sturm-Liouville. Συνεπώς, αν η Q είναι θετική συνάρτηση, το πρόσημο της δεύτερης μεταβολής της δράσης κρίνεται από το κατά πόσον η ελάχιστη ιδιοτιμή λ_0 είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από τη μονάδα.