Κεφάλαιο 5

Συμμετρίες - Θεώρημα της Noether

“κάτι είναι συμμετρικό, αν
δρώντας πάνω του με κάποιο τρόπο,
αυτό παραμένει όπως ήταν αρχικά”
Hermann Weyl

“ἁρμονίη ἀφανής φανερῆς κρείττων”
Ηράκλειτος

5.1 Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Κυκλικές μεταβλητές

Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της λαγκρανζιανής θεώρησης είναι ότι αποκαλύπτει με άμεσο τρόπο ποσότητες που διατηρούνται κατά την κίνηση ενός φυσικού συστήματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση μίας γενικευμένης συντεταγμένης, έστω της q_k, η οποία δεν εμφανίζεται η ίδια στη Λαγκρανζιανή, παρά μόνο η αντίστοιχη ταχύτητα $\dot{q}_k$. Σε αυτή την περίπτωση, επειδή

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \, ,$$

από τις εξισώσεις Euler-Lagrange προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \, ,$$

και επομένως η γενικευμένη ορμή

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \, ,$$

η συζυγής της συντεταγμένης q_k, διατηρείται κατά την κίνηση. Οι συντεταγμένες που δεν εμφανίζονται στη λαγκρανζιανή συνάρτηση ονομάζονται *κυκλικές*. Με βάση την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι η γενικευμένη ορμή που είναι συζυγής μιας κυκλικής μεταβλητής είναι μια διατηρούμενη ποσότητα.

Λαγκρανζιανή ανεξάρτητη της θ σωματιδίου κινούμενου σε επίπεδο

Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται σε ένα επίπεδο υπό την επίδραση το δυναμικό $V(r)$, όπου r η απόσταση του σωματιδίου από την πηγή του πεδίου, που μπορεί να ληφθεί ως αρχή των συντεταγμένων. Η λαγκρανζιανή συνάρτηση του σωματιδίου σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) είναι

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \, . \tag{5.1}$$

Είναι εμφανές ότι η παραπάνω λαγκρανζιανή συνάρτηση δεν έχει καμία εξάρτηση από τη γωνία θ και συνεπώς η συζυγής ως προς τη γωνία θ ορμή

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} \ ,$$

διατηρείται κατά την κίνηση. Η διατηρούμενη αυτή ορμή δεν είναι άλλη από τη στροφορμή του σωματιδίου ως προς το κέντρο της δύναμης εκπεφρασμένη σε πολικές συντεταγμένες και εξ όσων γνωρίζουμε η στροφορμή ως προς το κέντρο της δύναμης διατηρείται σε κεντρικά πεδία.

Άσκηση 5.1 *Εξετάστε αν διατηρείται η στροφορμή ως προς κάποιο άλλο σημείο αναφοράς.*
Απάντηση: *Αν εκφράσουμε τη Λαγκρανζιανή σε πολικές συντεταγμένες r', θ', ως προς άλλο σημείο που βρίσκεται στη θέση με καρτεσιανές συντεταγμένες (x_O, y_O), θα έχουμε*

$$\begin{aligned} x = r'\cos\theta' + x_O \ , \ y = r'\sin\theta' + y_O \Rightarrow \\ L' = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(\sqrt{x^2+y^2}) \ . \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι και πάλι θα είναι $v^2 = \dot{r'}^2 + r'^2\dot{\theta'}^2$, οπότε

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r'}^2 + r^2\dot{\theta'}^2\right) - V\left(\sqrt{r'^2 + x_O^2 + y_O^2 + 2r'(x_O\cos\theta' + y_O\sin\theta')}\right) \ .$$

Τώρα είναι φανερό ότι η Λαγκρανζιανή, μέσω της δυναμικής ενέργειας, έχει άμεση εξάρτηση από τη γωνία θ', οπότε δεν διατηρείται η στροφορμή.

Άσκηση 5.2 *Επαναλάβετε την παραπάνω ανάλυση για την κίνηση ενός σωματιδίου σε τρεις διαστάσεις. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή σε σφαιρικοπολικές συντεταγμένες. Ποια είναι τώρα η διατηρούμενη ποσότητα;*
Απάντηση: *Η Λαγκρανζιανή σε σφαιρικοπολικές συντεταγμένες με αρχή των συντεταγμένων το κέντρο της δύναμης θα είναι (βλ. Κεφ. 2.4)*

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) - V(r) \ .$$

Αυτή τη φορά απουσιάζει η συντεταγμένη ϕ, οπότε η ϕ είναι κυκλική μεταβλητή οπότε θα διατηρείται η γενικευμένη ορμή

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} \ .$$

Η διατηρούμενη αυτή ορμή είναι η z-συνιστώσα της στροφορμής, δηλαδή η L_z. Ο λόγος, που αν και κεντρικό το πεδίο δεν φαίνεται άμεσα η διατήρηση της στροφορμής, είναι ότι η στροφορμή είναι διάνυσμα και επομένως η διατήρηση αυτού του διανύσματος σχετίζεται με τρεις διατηρήσεις. Εκτός, όμως, από την L_z που τυχαίνει να είναι η γενικευμένη ορμή p_ϕ, οι άλλες καρτεσιανές συνιστώσες της στροφορμής δεν συμπίπτουν με τις άλλες γενικευμένες ορμές του προβλήματος p_r, p_θ, οι οποίες δεν διατηρούνται αφού οι r, θ δεν είναι κυκλικές μεταβλητές. Θα μπορούσε όμως κανείς να επιχειρηματολογήσει ως ακολούθως για να δείξει ότι τελικά όλες οι συνιστώσες της στροφορμής διατηρούνται: Αν κάθε φορά επέλεγε κανείς να προσανατολίσει τον άξονα z γύρω από τον οποίο μετριέται η πολική γωνία ϕ να συμπίπτει με κάποιον από τους άλλους άξονες x, y, τότε θα οδηγούνταν άμεσα στη διατήρηση όλων των συνιστωσών της στροφορμής.

Εισαγωγή στην έννοια του μετασχηματισμού

Η διαπίστωση ότι σε κάθε κυκλική μεταβλητή αντιστοιχεί και μία διατηρούμενη ορμή μπορεί να διατυπωθεί και με κάποιον άλλο τρόπο που θα αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμος, όταν προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε την αναζήτηση διατηρούμενων ποσοτήτων. Το γεγονός ότι η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου (5.1) δεν εξαρτάται από τη γωνία θ σημαίνει ότι, αν μετασχηματίσουμε τις γωνίες από θ σε $\Theta(\epsilon) = \theta + \epsilon$, όπου ϵ είναι μία συνεχής παράμετρος, αφήνοντας όμως τις αποστάσεις ίδιες, $r \to R = r$, η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη, ανεξαρτήτως της τιμής της παραμέτρου ϵ. Ο μετασχηματισμός αυτός των συντεταγμένων είναι στην ουσία στροφή του σωματιδίου κατά γωνία ϵ. Αυτό σημαίνει ότι η Λαγκρανζιανή, υπολογισμένη στις νέες συντεταγμένες

$$L_\epsilon = L(R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}) = L(r, \dot{r}, \theta + \epsilon, \dot{\theta}) ,$$

είναι ίση με την αρχική Λαγκρανζιανή ($L_\epsilon = L = L_{\epsilon=0}$). Με άλλα λόγια η Λαγκρανζιανή σωματιδίου σε κεντρικό πεδίο είναι αναλλοίωτη σε στροφές, δηλαδή η Λαγκρανζιανή είναι *συμμετρική* (βλ. τον ορισμό του Weyl στην αρχή του κεφαλαίου) ως προς το συνεχή μετασχηματισμό των στροφών. Επειδή η παράμετρος ϵ είναι συνεχής, έχουμε τη δυνατότητα να παραγωγίσουμε τη Λαγκρανζιανή ως προς ϵ και να εκφράσουμε τη συμμετρία της Λαγκρανζιανής ισοδύναμα ως ακολούθως:

$$\left.\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 . \tag{5.2}$$

Ο μηδενισμός της παραγώγου στο $\epsilon = 0$, αν και στο συγκεκριμένο παράδειγμα φαίνεται να μην έχει κανένα ιδιαίτερο νόημα (η παράγωγος είναι ίδια ανεξαρτήτως της τιμής του ϵ), είναι, όπως θα δούμε αργότερα, η μοναδική αναγκαία συνθήκη που εξασφαλίζει την ύπαρξη διατηρούμενων ποσοτήτων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αυτή η συνθήκη εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 ,$$

μια σχέση που με τη σειρά της συνεπάγεται, όπως είδαμε, τη διατήρηση της στροφορμής p_θ. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η διατήρηση της στροφορμής πηγάζει από την αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε στροφές.

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια άλλο ένα παράδειγμα, ώστε να μπορέσουμε να γενικεύσουμε τα προηγούμενα συμπεράσματά μας. Έστω δύο σωματίδια, τα οποία κινούνται σε μία ευθεία και αλληλεπιδρούν με κάποιο δυναμικό νευτώνειου τύπου. Αν ονομάσουμε τις θέσεις των σωματιδίων x_1 και x_2 αντίστοιχα, η Λαγκρανζιανή τούτου του συστήματος θα είναι

Παράδειγμα όπου η χωρική μετάθεση αποτελεί συμμετρία

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) - V(|x_1 - x_2|) . \tag{5.3}$$

Υπάρχει, άραγε, συνεχής μετασχηματισμός των συντεταγμένων, ο οποίος αφήνει αναλλοίωτη τη Λαγκρανζιανή; Πράγματι υπάρχει· πρόκειται για το μετασχηματισμό

$$x_1 \to X_1(\epsilon) \equiv x_1 + \epsilon \; , \; x_2 \to X_2(\epsilon) \equiv x_2 + \epsilon \; ,$$

ο οποίος αφήνει αναλλοίωτη τη Λαγκρανζιανή, διότι αφενός η κινητική ενέργεια δεν μεταβάλλεται ($\dot{X}_i(\epsilon) = \dot{x}_i$, με $i = 1, 2$) και αφετέρου η δυναμική ενέργεια δεν αλλάζει, αφού η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων δεν επηρεάζεται από αυτό το μετασχηματισμό. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, επειδή

$$\left.\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 ,$$

ισχύει επίσης ότι

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \, , \tag{5.4}$$

αφού είναι

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= \left[\frac{\partial L_\epsilon}{\partial X_1(\epsilon)}\frac{\partial X_1(\epsilon)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L_\epsilon}{\partial X_2(\epsilon)}\frac{\partial X_2(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right]_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial L}{\partial x_2} \, . \end{aligned}$$

Έτσι, οι εξισώσεις Euler - Lagrange προστιθέμενες δίνουν

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0 \, . \tag{5.5}$$

Το γεγονός, λοιπόν, ότι η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε *μεταθέσεις* (αυτό ακριβώς πραγματοποιεί ο μετασχηματισμός που χρησιμοποιήσαμε) οδήγησε σε διατήρηση της ποσότητας

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 \, ,$$

δηλαδή της ολικής ορμής του συστήματος των σωματιδίων. Από τη νευτώνεια μηχανική γνωρίζουμε ότι η διατήρηση της ολικής ορμής είναι αποτέλεσμα του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, τον οποίο στην ουσία έχουμε λάβει υπόψη στην κατασκευή του δυναμικού αλληλεπίδρασης, θεωρώντας ότι το V είναι συνάρτηση του $x_1 - x_2$ και όχι μια αυθαίρετη συνάρτηση των x_1, x_2. Στο παραπάνω παράδειγμα δείξαμε ότι η διατήρηση της ολικής ορμής είναι ισοδυνάμως συνέπεια της αναλλοιότητας του δυναμικού σε χωρικές μεταθέσεις. Κατ' αρχάς δεν θα μπορούσαμε να αποφανθούμε αν ο ένας από τους δύο νόμους –ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα ή η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής ενός απομονωμένου συστήματος σε χωρικές μεταθέσεις του συστήματος συντεταγμένων– είναι πιο θεμελιώδης από τον άλλο. Εφόσον, όμως, η διατήρηση της ολικής ορμής που συνεπάγεται η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής υπό κάποιο συνεχή μετασχηματισμό των συντεταγμένων είναι ευρύτερης εφαρμογής, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε κάποιους μετασχηματισμούς, ως αντανάκλαση των αντίστοιχων συμμετριών του Σύμπαντος, κατέχει πιο θεμελιώδη θέση στη φυσική από τη διατήρηση της ορμής ή άλλων γνωστών ποσοτήτων μεμονωμένα.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διακρίνουμε τις συμμετρίες των εξισώσεων κίνησης ενός φυσικού συστήματος, από αυτές της Λαγκρανζιανής. Στο Κεφάλαιο αυτό αναλύουμε τις συμμετρίες της Λαγκρανζιανής (και της δράσης) ενός φυσικού συστήματος και τις συνέπειες αυτών όσον αφορά στις διατηρούμενες ποσότητες. Οι συμμετρίες των εξισώσεων κίνησης δεν σχετίζονται κατ' ανάγκη με διατηρούμενες ποσότητες (βλ. Πρόβλημα 4).

Η Noether διατυπώνει και αποδεικνύει το ομώνυμο θεώρημα

Η παρατήρηση αυτή, ότι δηλαδή οι διατηρούμενες ποσότητες προκύπτουν από την αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε κάποιους συνεχείς μετασχηματισμούς, έχει την ισχύ θεωρήματος, του επονομαζόμενου θεωρήματος της Noether (1918). Η Emmy Noether [1882-1935], μια εξαίρετη μαθηματικός και θεωρητικός φυσικός, ήταν η πρώτη που διέβλεψε και απέδειξε τη σχέση μεταξύ συμμετριών και διατηρούμενων ποσοτήτων, θέμα που ανέπτυξε κατά την υφηγεσία της στο Πανεπιστήμιο του Göttingen στη Γερμανία. Είναι ασυνήθιστο ένα τόσο σπουδαίο θεώρημα να φέρει το όνομα μιας γυναίκας. Αντίθετα από ό,τι συμβαίνει στη σημερινή εποχή, λίγες ήταν εκείνη την εποχή οι γυναίκες που σπούδαζαν και ακόμη λιγότερες εκείνες που συνέχιζαν τις σπουδές μετά το πτυχίο τους. Η κοινωνία των αρχών του 20ου αιώνα αντιμετώπιζε με προκατάληψη τις λιγοστές γυναίκες που πρόβαλλαν αξιώσεις για την κατάληψη υψηλών ακαδημαϊκών θέσεων. Στην περίπτωση, μάλιστα, της Noether η προκατάληψη αυτή εκδηλώθηκε με την άρνηση των πρυτανικών αρχών του Πανεπιστημίου του Göttingen να κάνουν δεκτή την υφηγεσία της, όταν πρωτοκατατέθηκε το 1915. Ο τίτλος του υφηγετή τελικά της απονεμήθηκε τέσσερα χρόνια αργότερα, το 1919,[1] κατόπιν πιέσεων του καθηγητή της Noether, David Hilbert [1862-1943].

Συνεχείς και διακριτές συμμετρίες

Όταν η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη σε κάποιο συνεχή μετασχηματισμό, ο μετασχηματισμός αυτός λέγεται (συνεχής) συμμετρία της Λαγκρανζιανής, με την ίδια λογική που ο ορθός κύλινδρος λέμε ότι παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία, αφού δεν υφίσταται καμία αλλαγή όταν στραφεί γύρω από τον άξονά του. Στα παραδείγματα που ήδη εξετάσαμε διαφαίνεται η ανάγκη θεώρησης μετασχηματισμών που εξαρτώνται συνεχώς και με διαφορίσιμο τρόπο από κάποια παράμετρο ϵ. Οι διατηρούμενες ποσότητες προέκυψαν από τη διαφόριση της Λαγκρανζιανής ως προς αυτήν ακριβώς την παράμετρο. Αυτό δεν θα ήταν εφικτό αν η συμμετρία ήταν διακριτή. Ως παράδειγμα διακριτής συμμετρίας μπορούμε να θεωρήσουμε τον κατοπτρισμό των συντεταγμένων

$$x_i \to X_i \equiv -x_i$$

στο πρόβλημα των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Αυτός ο μετασχηματισμός που δεν εξαρτάται από κάποια συνεχή παράμετρο αποτελεί διακριτή συμμετρία της Λαγκρανζιανής, η οποία στην κλασική μηχανική, αντίθετα απ' ό,τι συμβαίνει στην κβαντική μηχανική, δεν παράγει καμία διατηρούμενη ποσότητα. Μια άλλη διακριτή συμμετρία για το ίδιο πρόβλημα με σωματίδια ίδιας μάζας είναι η εναλλαγή των σωματιδίων

$$x_1 \to x_2 \ , \ x_2 \to x_1 \ .$$

Ωστόσο και αυτή η συμμετρία δεν οδηγεί στη διατήρηση κάποιας ποσότητας στην κλασική μηχανική.

Απειροστοί και πεπερασμένοι μετασχηματισμοί

Από την παραπάνω ανάλυση φαίνεται ότι για την κατασκευή της διατηρούμενης ποσότητας αρκεί να γνωρίζουμε μόνο την απειροστή, σε πρώτη δηλαδή τάξη, εξάρτηση του μετασχηματισμού από την παράμετρο ϵ. Η απειροστή αυτή μορφή του μετασχηματισμού, όπως θα δούμε, αρκεί για να προσδιορίσουμε πλήρως το μετασχηματισμό, αφού μπορούμε βήμα-βήμα να οικοδομήσουμε το μετασχηματισμό για κάθε πεπερασμένη τιμή του ϵ.

5.2 Το θεώρημα της Noether

Σε τούτο το εδάφιο θα διατυπώσουμε το θεώρημα της Noether σε δύο φάσεις, για να γίνει πιο κατανοητό, και θα το αποδείξουμε. Στη συνέχεια θα το εφαρμόσουμε σε ένα σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων με στόχο να εξετάσουμε από ποιες συμμετρίες πηγάζουν όλες οι γνωστές διατηρούμενες ποσότητες (ορμή, στροφορμή, ενέργεια) καθώς επίσης και κάποιες άλλες ποσότητες που συνδέονται με τους γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς.

Η έννοια του συνεχούς μετασχηματισμού των συντεταγμένων

Προτού διατυπώσουμε το θεώρημα της Noether, θα παρουσιάσουμε τη γενικότερη μορφή ενός συνεχούς μετασχηματισμού συντεταγμένων. Έστω ένα

[1] Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη ζωή της Noether μπορείτε να διαβάσετε το άρθρο *"The Life and Times of Emmy Noether" της N. Byers (βλ. την ιστοσελίδα https://arxiv.org/pdf/hep-th/9411110.pdf)*

φυσικό σύστημα που περιγράφεται από τις N γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \ldots, q_N$. Ας θεωρήσουμε επίσης N νέες συναρτήσεις $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ των αρχικών συντεταγμένων q_i καθώς και μιας νέας συνεχούς μεταβλητής ϵ, τέτοιες ώστε

$$Q_a(q_1, q_2, \ldots, q_N, \epsilon) = q_a \ , \text{ όταν } \epsilon = 0 \ . \tag{5.6}$$

Οι συναρτήσεις αυτές θα παίξουν το ρόλο των νέων συντεταγμένων. Η παράμετρος ϵ είναι αυτή που με συνεχή τρόπο αλλάζει τις συντεταγμένες από $\mathbf{q}$ σε $\mathbf{Q}$, ενώ, όταν $\epsilon = 0$, οι συντεταγμένες q_i και Q_i συμπίπτουν μία προς μία (βλ. Σχήμα 5.1). Ένας τέτοιος μετασχηματισμός ονομάζεται *συμμετρία της Λαγκρανζιανής*, αν η Λαγκρανζιανή στις νέες συντεταγμένες δεν αλλάζει αριθμητικά σε πρώτη τάξη ως προς την παράμετρο ϵ, δηλαδή

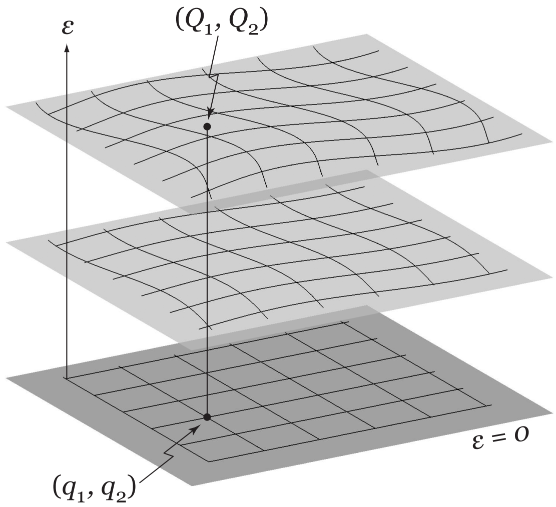
$$L\left(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \epsilon), \frac{d\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \epsilon)}{dt}, t\right) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ ,$$

όπου με $\mathbf{q}$ ή $\mathbf{Q}$ υπονοούμε τη N-άδα των αντίστοιχων συντεταγμένων. Η συναρτησιακή μορφή της Λαγκρανζιανής μπορεί να αλλάξει, όταν αυτή γραφεί ως συνάρτηση των $\mathbf{Q}$ αντί των $\mathbf{q}$, αλλά η αριθμητική της τιμή θα είναι ίδια, όταν αναφέρεται στην ίδια θέση και ταχύτητα του συστήματος σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, είτε αυτές εκφράζονται μέσω των $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$, είτε μέσω των $\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}$.

Επειδή η παράμετρος ϵ είναι συνεχής, ας θεωρήσουμε την οικογένεια των απειροστών μετασχηματισμών

$$Q_i(\mathbf{q}, \epsilon \cong 0) \cong Q_i(\mathbf{q}, 0) + \epsilon \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \equiv q_i + \epsilon K_i(\mathbf{q}) \ ,$$

οι οποίοι προσεγγίζουν το γενικό μετασχηματισμό $Q_i(\mathbf{q}, \epsilon)$ για μικρά ϵ. Οι



Σχήμα 5.1: Σε αυτό το σχήμα απεικονίζονται οι συντεταγμένες του φυσικού συστήματος για διάφορες τιμές του ϵ. Όσο μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου ϵ τόσο διαφοροποιούνται οι καινούργιες $\mathbf{Q}$ συντεταγμένες από τις αρχικές $\mathbf{q}$ συντεταγμένες. Για $\epsilon = 0$ (κατώτερο πλέγμα) οι $\mathbf{q}$ και $\mathbf{Q}$ συντεταγμένες συμπίπτουν, ενώ για $\epsilon \neq 0$ είναι διαφορετικές. Δηλαδή, το κάθε σημείο του χώρου (επάνω στο κατώτερο πλέγμα) μπορεί να καθοριστεί είτε μέσω των q_i, είτε μέσω των Q_i, οι οποίες όμως έχουν διαφορετικές τιμές όταν η παράμετρος ϵ είναι μη μηδενική. Έτσι, η κάθε Q_i συντεταγμένη κάποιου σημείου του χώρου μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των q_j και της παραμέτρου ϵ.

απειροστοί μετασχηματισμοί επαναλαμβανόμενοι μπορούν να οικοδομήσουν τον πεπερασμένο μετασχηματισμό. Υπό αυτή την έννοια, ο μετασχηματισμός προσδιορίζεται πλήρως από τις συναρτήσεις $K_i(\mathbf{q})$ με $i = 1, 2, \ldots, N$, οι οποίες λέγονται και *γεννήτορες του μετασχηματισμού*. Σε επόμενο κεφάλαιο, όπου θα αναλύσουμε διεξοδικά τη δράση του μετασχηματισμού των στροφών, θα έχουμε την ευκαιρία να παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι γεννήτορες μιας απειροστής στροφής παράγουν μια πεπερασμένη στροφή.

Είμαστε τώρα πια σε θέση να διατυπώσουμε το θεώρημα της Noether σε μια πρώτη μορφή.

Διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος της Noether (περιορισμένη μορφή)

Το Θεώρημα της Noether: *Εάν η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος είναι συμμετρική σε κάποιους συνεχείς απειροστούς μετασχηματισμούς K_i, τότε η ποσότητα*

$$\sum_{i=1}^{N} K_i p_i$$

διατηρείται, όπου p_i είναι η γενικευμένη ορμή ($\partial L/\partial \dot{q}_i$), συζυγής της q_i.

Απόδειξη: Αν γράψουμε τη Λαγκρανζιανή στις νέες συντεταγμένες και αναπτύξουμε ως προς την απειροστή παράμετρο ϵ, επειδή $\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{q}} + \epsilon\dot{\mathbf{K}}$ έχουμε

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) &= L(\mathbf{q} + \epsilon\mathbf{K}, \dot{\mathbf{q}} + \epsilon\dot{\mathbf{K}}, t) \\ &= L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \epsilon\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{K}_i\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\ , \end{aligned} \tag{5.7}$$

υπονοώντας την αθροιστική σύμβαση για επαναλαμβανόμενους δείκτες. Αφού η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική ως προς τους μετασχηματισμούς αυτούς, η πρώτης τάξης ως προς ϵ ποσότητα στο ανάπτυγμα (5.7) πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν. Επομένως, η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής συνεπάγεται

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{K}_i = 0\ . \tag{5.8}$$

Επειδή, όμως, η $q_i(t)$ είναι φυσική τροχιά του συστήματος και ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange, θα ισχύει ακόμη ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}\ ,$$

και ως εκ τούτου η (5.8) μπορεί να γραφεί, με χρήση της αθροιστικής σύμβασης, ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{K}_i &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{dt}K_i\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}K_i\right) = 0\ . \end{aligned}$$

Συνεπώς, η συμμετρία της Λαγκρανζιανής οδηγεί στη διατήρηση, κατά τη φυσική κίνηση του συστήματος, της ποσότητας

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}K_i\ , \tag{5.9}$$

δηλαδή στη διατήρηση της συνισταμένης των γενικευμένων ορμών στη διεύθυνση του εκάστοτε γεννήτορα της συμμετρίας.

5.3 Διατήρηση ορμής και στροφορμής

Υπό το πρίσμα του θεωρήματος της Noether ας επανεξετάσουμε το παράδειγμα που συναντήσαμε στο εισαγωγικό εδάφιο του παρόντος κεφαλαίου σε γενικότερη, τώρα, μορφή. Έστω N σωματίδια που αλληλεπιδρούν με νευτώνειες δυνάμεις, δηλαδή συντηρητικές δυνάμεις που ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Η Λαγκρανζιανή αυτού του συστήματος είναι

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \ . \tag{5.10}$$

Το διπλό άθροισμα δικαιολογείται από το γεγονός ότι πρέπει να ληφθούν οι δυναμικές ενέργειες αλληλεπίδρασης για κάθε ζεύγος σωματιδίων. Το $j > i$ στη δεύτερη άθροιση εξασφαλίζει ότι κάθε ζεύγος σωματιδίων λαμβάνεται μόνο μία φορά. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς, ότι, αν εκτελέσει τον ακόλουθο μετασχηματισμό συντεταγμένων

Απλές μεταθέσεις των χωρικών συντεταγμένων

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{x}_i + \epsilon \, \mathbf{a} \ , \tag{5.11}$$

δηλαδή αν μετατοπίσει όλα τα σωματίδια στη διεύθυνση του **a**, η Λαγκρανζιανή δεν θα μεταβληθεί. Παρατηρούμε ότι σε αυτόν το μετασχηματισμό οι ταχύτητες παραμένουν αμετάβλητες, αφού το **a** είναι ένα σταθερό διάνυσμα· αμετάβλητες επίσης παραμένουν και οι σχετικές αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων. Ποια διατηρούμενη ποσότητα κρύβεται πίσω από αυτήν τη συμμετρία της Λαγκρανζιανής; Ο γεννήτορας του μετασχηματισμού είναι ο

$$\mathbf{K}_i = \left. \frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \mathbf{a} \ .$$

Αφού το συνολικό πλήθος των συντεταγμένων του συστήματος είναι $3N$ – τρεις για κάθε σωματίδιο–, υπάρχουν $3N$ γεννήτορες, τους οποίους για ευκολία έχουμε ομαδοποιήσει σε N τριάδες γράφοντάς τους ως διανύσματα. Τώρα, είναι εύκολο να διακρίνουμε τη διατηρούμενη ποσότητα. Πρόκειται για την

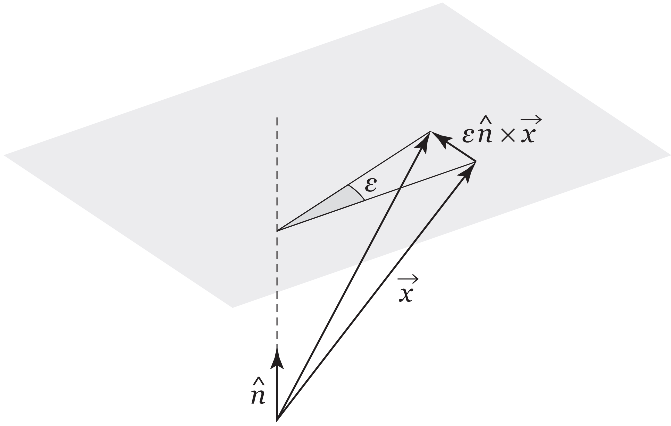
$$\mathbf{a} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} = \mathbf{a} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{P}_{\text{ολ}} \ . \tag{5.12}$$

Η παράγωγος ως προς το διάνυσμα $\mathbf{x}_i$ που εμφανίζεται στις παραπάνω σχέσεις μπορεί να θεωρηθεί ως ένας συμβολικός τρόπος γραφής ενός διανύσματος, οι συνιστώσες του οποίου είναι οι παράγωγοι ως προς την κάθε συνιστώσα του $\mathbf{x}_i$. Με αυτόν το συμβολισμό το άθροισμα όλων των γινομένων των γεννητόρων με τις αντίστοιχες ορμές έχει αντικατασταθεί με ένα εσωτερικό γινόμενο.

Η διατήρηση της ορμής ως συνέπεια της ομογένειας του χώρου

Αφού το διάνυσμα που ορίζει τη χωρική μετάθεση **a** είναι αυθαίρετο, η συνολική ορμή, $\mathbf{P}_{\text{ολ}}$, του συστήματος των σωματιδίων διατηρείται σταθερή σε κάθε κατεύθυνση. Η διατήρηση της ορμής είναι αποτέλεσμα του ότι οι χωρικές μεταθέσεις αποτελούν συμμετρία της Λαγκρανζιανής, γεγονός το οποίο με τη σειρά του οφείλεται στην *ομογένεια του χώρου*, στο ότι δηλαδή όλα τα σημεία του χώρου είναι ισοδύναμα. Επομένως, αν μεταφέρουμε ένα σύστημα σωματιδίων από μια περιοχή του χώρου σε άλλη, το σύστημα θα συμπεριφερθεί και θα εξελιχθεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις περί διαστελλόμενου Σύμπαντος ο χώρος, αν και είναι καμπύλος, είναι και πάλι ομογενής[2] η κατανομή των σμηνών των γαλαξιών είναι σε πολύ

[2]Ομογενής είναι και η επιφάνεια μίας σφαίρας, τα σημεία της οποίας δεν διακρίνονται το ένα από το άλλο, παρόλο που η σφαίρα είναι καμπύλος χώρος.



Σχήμα 5.2: Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ στρέφεται απειροστά κατά γωνία ϵ γύρω από τον άξονα $\hat{\mathbf{n}}$.

μεγάλο βαθμό ομοιόμορφη και έτσι σε όποια θέση του Σύμπαντος και αν μεταφερθούμε θα παρατηρούμε την ίδια κατανομή ύλης γύρω μας. Αξίζει να επισημάνουμε ότι τούτο αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη ερωτήματα της σύγχρονης αστροφυσικής: γιατί το Σύμπαν εμφανίζει τέτοια ομοιομορφία; Πώς κατάφερε να εξαλείψει σχεδόν ολοκληρωτικά κάθε ανομοιομορφία που πιθανώς υπήρχε στα πρώιμα στάδια της διαστολής του;

Η διατήρηση της στροφορμής ως συνέπεια της ισοτροπίας του χώρου

Σε αυτό το σημείο της μελέτης μας αρχίζουμε να υποψιαζόμαστε την ύπαρξη κάποιας άλλης δυνατής συμμετρίας της Λαγκρανζιανής (5.10) του συστήματος των N σωματιδίων. Αν στρέψουμε το σύστημα συντεταγμένων, θα αλλάξει η θέση των συντεταγμένων των σωματιδίων, αλλά οι αποστάσεις μεταξύ αυτών, ως μήκη διανυσμάτων, θα παραμείνουν σταθερές, ενώ οι ταχύτητες των σωματιδίων, ως μήκη διανυσμάτων, θα διατηρήσουν το μέτρο τους. Οι στροφές, λοιπόν, αποτελούν συμμετρία της Λαγκρανζιανής. Ας κατασκευάσουμε το γεννήτορα των στροφών, για να δούμε σε τι διατηρούμενες ποσότητες θα οδηγηθούμε.[3] Σε επόμενο κεφάλαιο, όπου θα αναλύσουμε διεξοδικά το θέμα των στροφών, θα δείξουμε ότι οι συντεταγμένες στην περίπτωση των απειροστών στροφών μεγέθους $\Delta\phi = \epsilon$ γύρω από τον άξονα $\hat{n}$ μετασχηματίζονται ως ακολούθως:

Απειροστές στροφές

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \epsilon\,\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}\,. \tag{5.13}$$

Άσκηση 5.3 *Δείξτε ότι ο παραπάνω* (5.13) *μετασχηματισμός διατηρεί, σε πρώτη τάξη ως προς ϵ, σταθερό το μέτρο του διανύσματος.*

Απάντηση: *Είναι πράγματι*

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}| &= \sqrt{\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}} = \sqrt{(\mathbf{x}+\epsilon\,\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{x})\cdot(\mathbf{x}+\epsilon\,\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{x})} \\
&= \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\epsilon\,\cancel{(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}} + \epsilon^2\,(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{x})\cdot(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{x})} \\
&= \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathcal{O}(\epsilon^2)} = |\mathbf{x}| + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,.
\end{aligned}$$

Ο διαγραμμένος όρος οφείλεται στην καθετότητα των $(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{x})$ και $\mathbf{x}$. Αν κρατούσαμε και τους όρους τάξης ϵ^2, τα δύο μήκη θα διαφοροποιούνταν. Αυτός είναι και ο λόγος που η έκφραση για απειροστές στροφές δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πεπερασμένες στροφές.

Θα αρκεστούμε εδώ να δικαιολογήσουμε απλώς την περίεργη αυτή μορφή του μετασχηματισμού (βλ. Σχήμα 5.2). Το απειροστό διάνυσμα που προστί-

[3] Κατ' αντιστοιχία με το πρώτο παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε στο παρόν κεφάλαιο πιθανώς να έχετε ήδη μαντέψει ότι αυτό που πρόκειται να διατηρηθεί είναι η στροφορμή κατά μήκος του άξονα της στροφής.

θεται στην αρχική θέση είναι κάθετο και στην αρχική θέση και στο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$, επομένως επιτυγχάνει ό,τι και μία στροφή του $\mathbf{x}$ γύρω από το $\hat{\mathbf{n}}$. Το μέτρο της μετατόπισης του $\mathbf{x}$ είναι $\epsilon|\mathbf{x}|\sin(\widehat{\mathbf{x},\hat{\mathbf{n}}})$, ακριβώς όση και η μετακίνηση που θα του επέφερε μια πολύ μικρή στροφή μεγέθους ϵ. Σημειώνουμε ότι οι στροφές που εκτελέστηκαν ήταν απειροστές –οι πεπερασμένου μεγέθους στροφές έχουν κάπως διαφορετική μορφή (βλ. Κεφάλαιο 6). Ο γεννήτορας, λοιπόν, των απειροστών στροφών είναι ο

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x} \,, \tag{5.14}$$

και η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα είναι η

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}_i) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} &= \sum_{i=1}^{N} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{p}_i \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i) \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}_{\text{ολ}} \,, \end{aligned} \tag{5.15}$$

όπου

$$\mathbf{L}_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i) \,,$$

η συνολική στροφορμή των σωματιδίων. Επομένως, η συνιστώσα της συνολικής στροφορμής των σωματιδίων στην κατεύθυνση του άξονα της στροφής διατηρείται. Αφού το διάνυσμα που ορίζει τη στροφή $\hat{\mathbf{n}}$ είναι αυθαίρετο, η συνολική στροφορμή του συστήματος των σωματιδίων διατηρείται σταθερή σε κάθε κατεύθυνση.

Η συμμετρία της Λαγκρανζιανής στις στροφές είναι και πάλι συνέπεια της *ισοτροπίας του Σύμπαντος*, δηλαδή της ιδιότητας σύμφωνα με την ο-ποία η εξέλιξη ενός απομονωμένου συστήματος δεν εξαρτάται από το πώς είναι στραμμένο το σύστημα μέσα στο Σύμπαν. Αυτό αποτελεί άλλη μια υπόθεση για τις βασικές ιδιότητες του χώρου, η οποία είναι σύμφωνη με τα παρατηρησιακά δεδομένα, αφού σε οποιαδήποτε κατεύθυνση και αν στρέψουμε το βλέμμα μας στο Σύμπαν που μας περιβάλλει, θα παρατηρήσουμε την ίδια κατανομή γαλαξιών χωρίς να υπάρχει κάποια προεξάρχουσα διεύθυνση.

Άσκηση 5.4 *Εξετάστε ποιες συνιστώσες της στροφορμής και της ορμής διατηρούνται για ένα σωματίδιο, το οποίο κινείται μέσα στο βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί μια ομογενής κατανομή μάζας σχήματος (α) άπειρου κυλίνδρου, (β) άπειρου κώνου, (γ) άπειρου επιπέδου, (δ) άπειρης ευθείας, (ε) ημιευθείας, (στ) ορθού πρίσματος, (ζ) ημιάπειρου επιπέδου, (η) τόρου, (θ) σφαίρας, (ι) άπειρης ορθής κυλινδρικής έλικας σταθερού βήματος h. [Σημείωση: Δεν είναι ανάγκη να γνωρίζετε ακριβώς το βαρυτικό πεδίο παρά μόνο τις συμμετρίες του.](βλ.*Mechanics *του L. Landau)*

Απάντηση: *Γενικά το βαρυτικό δυναμικό κληρονομεί τις συμμετρίες της γεωμετρίας της κατανομής της ύλης και έτσι οι συμμετρίες τις γεωμετρίας της κατανομής προσδιορίζουν τις διατηρούμενες ποσότητες.*

α) Στην περίπτωση κυλινδρικής κατανομής της βαρυτικής ύλης ο κύλινδρος παραμένει αναλλοίωτος μόνο στις μεταθέσεις στη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου z και σε στροφές περί τον άξονα z. Συνεπώς διατηρούνται οι p_z και L_z.

β) Στην περίπτωση άπειρου κώνου, χάνεται η αναλλοιότητα στη διεύθυνση z, και έτσι χάνεται μαζί και η διατήρηση της p_z· παραμένει όμως η αναλλοιότητα στις στροφές περί τον z και η μόνη διατηρούμενη ορμή είναι η στροφορμή L_z.

γ) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) όπου z η απόσταση από το επίπεδο, το δυναμικό

εξαρτάται μόνο από το z. Η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη στις μεταθέσεις $x \to x + \epsilon$, $y \to y + \epsilon$ και σε στροφές περί τον άξονα z. Συνεπώς διατηρούνται οι p_x, p_y και η L_z.
δ) Αν y είναι ο καρτεσιανός άξονας της ακμής του ημιεπιπέδου τότε μόνο μεταθέσεις σε αυτή τη διεύθυνση αφήνουν τη Λαγκρανζιανή αναλλοίωτη και συνεπώς μόνο η συνιστώσα της ορμής p_y διατηρείται και η L_z παύει να διατηρείται.
ε) Σε αυτή την περίπτωση η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε μεταθέσεις στη διεύθυνση της ευθείας και σε στροφές περί τον άξονα της ευθείας. Διατηρούνται έτσι μόνο η ορμή στη διεύθυνση, z, της ευθείας p_z και η στροφορμή L_z.
στ) Στην περίπτωση της ημιευθείας χάνεται η αναλλοιότητα στις μεταθέσεις στη διεύθυνση της ευθείας και έτσι χάνεται και η διατήρηση της p_z. Παραμένει μόνο η διατήρηση της L_z, διότι παραμένει η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε στροφές περί τον άξονα της ημιευθείας.
ζ) Το ορθό πρίσμα έχει μόνο συμμετρία ως προς διακριτούς μετασχηματισμούς στροφών περί τον άξονα συμμετρίας και συνεπώς δεν διατηρείται καμμία στροφορμή. Είναι όμως αναλλοίωτη η Λαγκρανζιανή σε μεταθέσεις στη διεύθυνση z, του άξονα συμμετρίας και συνεπώς διατηρείται μόνο η p_z.
η) Ένας ορθός τόρος είναι ένα στερεό που μπορεί να προκύψει από την περιστροφή ενός κύκλου περί άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο του κύκλου χωρίς όμως να τον τέμνει· συνεπώς η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη στις στροφές ως προς αυτόν τον άξονα, z, και η μόνη ποσότητα που διατηρείται είναι η L_z συνιστώσα της στροφορμής.
θ) Η σφαίρα είναι αναλλοίωτη στις στροφές σε κάθε άξονα, συνεπώς διατηρούνται και οι τρεις συνιστώσεις της στροφορμής.
η) Μία ορθή κυλινδρική έλικα με άξονα συμμετρίας, z, είναι αναλλοίωτη στον συνδυασμό στροφών περί των άξονα συμμετρίας και μεταθέσεων στη διεύθυνση του ίδιου άξονα αν μια στροφή κατά γωνία ϵ συνδυαστεί με μια μετάθεση κατά $\epsilon h/(2\pi)$, όπου h το βήμα της έλικας. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες η συνεχής αυτή συμμετρία εκφράζεται από τον μετασχηματισμό: $\theta \to \theta + \epsilon$, $z \to z + \epsilon h/(2\pi)$ που έχει γεννήτορες $K_\theta = 1$ και $K_z = h/(2\pi)$. Συνεπώς διατηρείται ο συνδυασμός ορμής και στροφορμής: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{K} = p_z h/(2\pi) + L_z$.

5.4 Γενικό θεώρημα της Noether

Έχουμε αναφερθεί έως τώρα σε μετασχηματισμούς που μεταβάλλουν με συνεχή τρόπο τις συντεταγμένες καθορισμού της θέσης του συστήματος. Σε αυτούς τους μετασχηματισμούς ο χρόνος δεν έπαιζε κάποιον ενεργητικό ρόλο, αφού ο χρόνος δεν υφίστατο κάποιο μετασχηματισμό. Τώρα θα επεκτείνουμε τους σημειακούς μετασχηματισμούς του χώρου σε συνεχείς σημειακούς μετασχηματισμούς του χωρόχρονου

$$(\mathbf{q}, t) \to (\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t, \epsilon), T(\mathbf{q}, t, \epsilon)) \;, \tag{5.16}$$

τέτοιους ώστε να είναι ταυτοτικοί όταν $\epsilon = 0$ και οι οποίοι ορίζονται μέσω των χωροχρονικών γεννητόρων $(K_i(\mathbf{q}, t), \tau(\mathbf{q}, t))$ ως

Γενικοί χωροχρονικοί μετασχηματισμοί

$$\begin{aligned} Q_i(\mathbf{q}, t, \epsilon) &= q_i + \epsilon\, K_i(\mathbf{q}, t) \;, \\ T(\mathbf{q}, t, \epsilon) &= t + \epsilon\, \tau(\mathbf{q}, t) \;. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Στους μετασχηματισμούς αυτούς η δράση μίας τροχιάς $\mathbf{q}(t)$

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\, \mathrm{d}t \;,$$

μετασχηματίζεται στην

$$S_\epsilon = \int_{T_1}^{T_2} L\left(\mathbf{Q}, \frac{d\mathbf{Q}}{dT}, T\right) \mathrm{d}T$$

δεδομένου ότι η τροχιά $\mathbf{q}(t)$ μετασχηματίστηκε στην $\mathbf{Q}(T)$ και

$$T_1 = T(\mathbf{q}(t_1), t_1, \epsilon) \text{ και } T_2 = T(\mathbf{q}(t_2), t_2, \epsilon) .$$

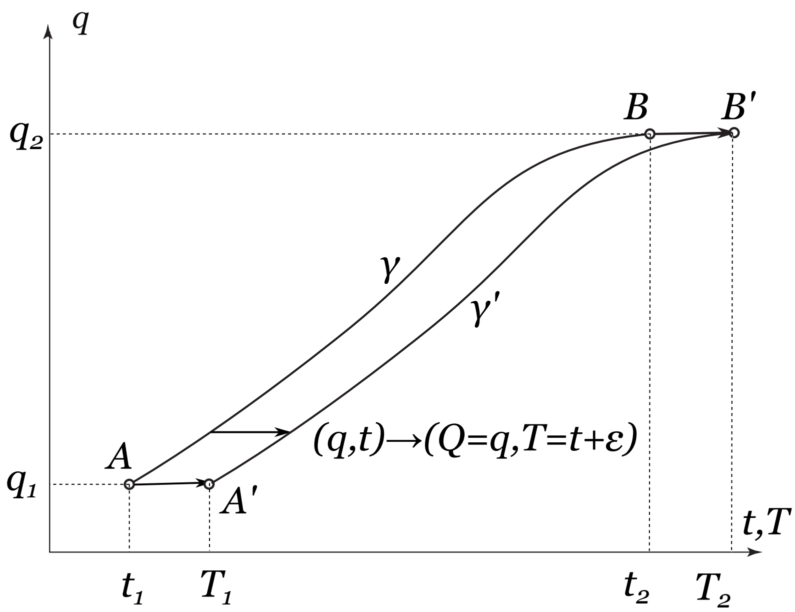
είναι οι νέες χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες και στις χρονικές στιγμές του αρχικού και τελικού χωροχρονικού σημείου μεταξύ των οποίων υπολογίζεται η δράση.

Συμμετρία της δράσης

Θα θεωρούμε, λοιπόν, ότι ο μετασχηματισμός (5.17) αποτελεί συμμετρία της δράσης, όταν

$$S_\epsilon = S_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2) .$$

Η γενικευμένη έννοια συμμετρίας της δράσης ισοδυναμεί με την έννοια της συμμετρίας της Λαγκρανζιανής που αρχικά ορίσαμε όταν ο μετασχηματισμός ήταν απλώς χωρικός, δηλαδή όταν $\tau = 0$, διότι τότε δεν μετασχηματίζεται το ολοκλήρωμα μαζί με τα όριά του, αλλά μόνο η ολοκληρωτέα συνάρτηση, που είναι η Λαγκρανζιανή, και η συμμετρία της Λαγκρανζιανής ισοδυναμεί με συμμετρία της δράσης.



Σχήμα 5.3: Σε ενα χωροχρονικό μετασχηματισμό κάθε σημείο της τροχιάς γ, που συνδέει τα χωροχρονικά σημεία Α και Β, με συντεταγμένες (t, q) μετασχηματίζεται στο σημείο με συντεταγμένες (T, Q) της τροχιάς γ' που συνδέει τα μετασχηματισμένα χωροχρονικά σημεία Α$'$ και Β$'$. Εδώ σχεδιάζεται η δράση του μετασχηματισμού της χρονικής μετάθεσης $Q = q$, $T = t + \epsilon$.

Για παράδειγμα, σε φυσικά σύστηματα που διέπονται από Λαγκρανζιανές, $L(q, \dot{q})$, που δεν έχουν άμεση εξάρτηση από τον χρόνο, ο χωροχρονικός μετασχηματισμός:

$$\begin{aligned} Q &= q \,, \\ T &= t + \epsilon \,, \end{aligned} \tag{5.18}$$

με γεννήτορες $(K = 0, \tau = 1)$, που δεν μεταβάλλει τις συντεταγμένες και απλώς μεταθέτει το χρόνο είναι συμμετρία της δράσης. Η δράση αυτού του μετασχηματισμού σε μία τροχιά έχει σχεδιαστεί στο Σχ. 5.3. Σύμφωνα με το μετασχηματισμό αυτόν, η συντεταγμένη Q της γ' στο δεδομένο σημείο T είναι ίση με τη συντεταγμένη q της γ στο σημείο $t = T - \epsilon$ που απεικονίζεται στο T, δηλαδή η γ' είναι η συνάρτηση $Q(T) = q(T - \epsilon)$, όπως φαίνεται και στο Σχ.

5.3, και το T λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[T_1, T_2] = [t_1 + \epsilon, t_2 + \epsilon]$. Συνεπώς η δράση μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} S_\epsilon &= \int_{T_1}^{T_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dT}\right) \mathrm{d}T \\ &= \int_{t_1+\epsilon}^{t_2+\epsilon} L\left(q(T-\epsilon), \frac{dq(T-\epsilon)}{dT}\right) \mathrm{d}T\ , \end{aligned}$$

και αλλάζοντας την μεταβλητή ολοκλήρωσης σε $t = T - \epsilon$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} S_\epsilon &= \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}\right) \mathrm{d}t \\ &= S_0\ , \end{aligned} \tag{5.19}$$

και επομένως ο μετασχηματισμός (5.18) είναι συμμετρία της δράσης όταν η Λαγκρανζιανή δεν έχει άμεση εξάρτηση από τον χρόνο.

Θα υπολογίσουμε τώρα γενικά την πρώτης τάξης μεταβολή της δράσης

$$S_\epsilon = \int_{T_1}^{T_2} L\left(\mathbf{Q}, \frac{d\mathbf{Q}}{dT}, T\right) \mathrm{d}T\ , \tag{5.20}$$

στους χωροχρονικούς μετασχηματισμούς (5.17). Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός (5.17) προσδιορίζει τις νέες θέσεις και χρόνους ως συναρτήσεις των αρχικών θέσεων και χρόνων προκρίνεται η μεταβλητή ολοκλήρωσης στην μετασχηματισμένη δράση να παραμείνει ο αρχικός χρόνος. Κατά την αλλαγή της χρονικής μεταβλητής από $T \to t$ τα όρια ολοκλήρωσης επανέρχονται μεν στα αρχικά t_1,t_2 αλλά το διαφορικό μέτρο της ολοκλήρωσης γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}T &= \frac{dT}{dt}\,\mathrm{d}t \\ &= (1 + \epsilon\dot{\tau})\mathrm{d}t\ , \end{aligned}$$

όπου η τελεία συμβολίζει ολική παραγώγιση ως προς t. Ομοίως, η παράγωγος $d\mathbf{Q}/dT$, που εμφανίζεται στην (5.20) ως μία από τις μεταβλητές της νέας Λαγκρανζιανής, είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}}{dT} &= \frac{\dot{\mathbf{Q}}}{\dot{T}} \\ &= \frac{\dot{\mathbf{q}} + \epsilon\dot{\mathbf{K}}}{1 + \epsilon\dot{\tau}} \\ &= \dot{\mathbf{q}} + \epsilon(\dot{\mathbf{K}} - \dot{\tau}\dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\ , \end{aligned}$$

και συνεπώς η δράση (5.20) της μετασχηματισμένης τροχιάς είναι

$$\begin{aligned} S_\epsilon &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,(1+\epsilon\dot{\tau})\, L\left(\mathbf{q} + \epsilon\mathbf{K}, \dot{\mathbf{q}} + \epsilon(\dot{\mathbf{K}} - \dot{\tau}\dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), t + \epsilon\tau\right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,(1+\epsilon\dot{\tau}) \left[L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\epsilon K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\epsilon(\dot{K}_i - \dot{q}_i\dot{\tau}) + \frac{\partial L}{\partial t}\epsilon\tau\right] \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= S_0 + \epsilon\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ \left[L\dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{K}_i - \dot{q}_i\dot{\tau}) + \frac{\partial L}{\partial t}\tau\right] \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^2)\ . \end{aligned} \tag{5.21}$$

Στην τελευταία έκφραση της σχέσης (5.21) για το ολοκλήρωμα τάξης ϵ, η ολοκληρωτέα ποσότητα αποδεικνύεται (βλ. Άσκηση 5.5) ότι είναι ένα ολικό χρονικό διαφορικό όταν η $\mathbf{q}(t)$ είναι φυσική διαδρομή του συστήματος και ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange. Ισχύει τότε επί των φυσικών διαδρομών η ταυτότητα της Noether:

$$\begin{aligned} L\dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{K}_i - \dot{q}_i\dot{\tau}) + \frac{\partial L}{\partial t}\tau = \\ \frac{d}{dt}\left[K_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\tau\right] . \end{aligned} \tag{5.22}$$

Άσκηση 5.5 *Επιβεβαιώστε ότι επί των φυσικών διαδρομών ισχύει η ταυτότητα της Noether (5.22).*

Απάντηση: *Επί της φυσικής διαδρομής*

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) ,$$

οι όροι του αριστερού σκέλους της (5.22)

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{K}_i$$

συμπτύσσονται στην τέλεια χρονική παράγωγο

$$\frac{d}{dt}\left(K_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) .$$

Το ίδιο ισχύει και για την υπόλοιπη έκφραση του αριστερού σκέλους της (5.22). Προσθαφαίρωντας κατάλληλους όρους έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{array}{llll} & L\dot{\tau} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial t}\tau & & \\ = & L\dot{\tau} + \frac{dL}{dt}\tau & -\frac{dL}{dt}\tau & -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial t}\tau \\ = & \frac{d(L\tau)}{dt} & -\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}\right)\tau & -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\dot{\tau} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}\tau} \\ = & \frac{d(L\tau)}{dt} & -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\dot{\tau}\right] & \\ = & \frac{d}{dt}(L\tau) & -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\tau\right] & \end{array}$$

Αν η (5.17) είναι συμμετρία της Λαγκρανζιανής θα ισχύει ταυτοτικά ότι

$$\left.\frac{\partial S_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 ,$$

δηλαδή θα ισχύει ταυτοτικά για κάθε διαδρομή $\mathbf{q}(t)$, που δεν είναι αναγκαστικά φυσική, ότι

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[L\dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{K}_i - \dot{q}_i\dot{\tau}) + \frac{\partial L}{\partial t}\tau\right] = 0 .$$

Επί των φυσικών διαδρομών, όμως, ισχύει η ταυτότητα της Noether και συνεπώς η αναλλοιότητα της δράσης συνεπάγεται ότι

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{d}{dt}\left[K_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\tau\right] = 0 ,$$

δηλαδή θα είναι

$$\left[K_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\tau\right]_{t=t_1} = \left[K_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\tau\right]_{t=t_2} ,$$

και επειδή οι σχέσεις αυτές ισχύουν για όλες τις τιμές των χρόνων t_1 και t_2, συμπεραίνουμε ότι η συμμετρία της δράσης με γεννήτορα $(\mathbf{K}, \tau)$ οδηγεί στη διατήρηση κατά την κίνηση της ποσότητας

$$K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \tau \ . \tag{5.23}$$

Η διατηρούμενη ποσότητα (5.23) μπορεί πιο κομψά, αλλά και πιο φυσικά, να γραφεί ως

$$K_i p_i - E\tau \ , \tag{5.24}$$

όπου p_i είναι οι γενικευμένες ορμές και E η γενικευμένη ενέργεια (το ολοκλήρωμα του Jacobi) του συστήματος.

Σε περίπτωση συμμετρίας που αφορά μόνο σε μετασχηματισμούς των χωρικών συντεταγμένων (δηλαδή όταν $\tau = 0$) λαμβάνουμε τη διατήρηση της ποσότητας $K_i p_i$ που είδαμε σε προηγούμενο εδάφιο, ενώ σε συμμετρία που αφορά σε μετασχηματισμό μόνο του χρόνου (όταν $\mathbf{K} = \mathbf{0}$) προκύπτει η διατήρηση της ενέργειας που δίνεται από το ολοκλήρωμα του Jacobi.

Η διατήρηση της ενέργειας ως συνέπεια της ομογένειας του χρόνου

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να απαντήσουμε αμέσως στο ερώτημα ποια διατηρούμενη ποσότητα συνεπάγεται η μη εκπεφρασμένη εξάρτηση από το χρόνο μιας Λαγκρανζιανής. Στον μετασχηματισμό

$$Q_i = q_i \ , \ T = t + \epsilon \ , \tag{5.25}$$

με γεννήτορες $\mathbf{K} = \mathbf{0}, \ \tau = 1$, που προκαλεί μετάθεση στο χρόνο δίχως καμία μεταβολή των συντεταγμένων και ο οποίος, όπως είδαμε, αποτελεί συμμετρία της δράσης κάθε Λαγκρανζιανής που δεν έχει άμεση χρονική εξάρτηση, η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα είναι η

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \ . \tag{5.26}$$

Με άλλα λόγια, συστήματα που είναι συμμετρικά σε μεταθέσεις στο χρόνο διατηρούν την ενέργειά τους. Για την ακρίβεια, η ποσότητα (5.26) συμπίπτει με την ενέργεια του συστήματος, *κινητική* + *δυναμική*, εφόσον η κινητική ενέργεια περιγράφεται από την κλασική διγραμμική μορφή

$$\frac{1}{2} A_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

και η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση μόνο των θέσεων.

Αυτή, λοιπόν, είναι και η βαθύτερη αιτία στην οποία οφείλεται η διατήρηση της ενέργειας: η *ομογένεια του χρόνου*, το γεγονός δηλαδή ότι καμία χρονική στιγμή δεν ξεχωρίζει από τις άλλες και ως εκ τούτου η μετάθεση ενός συστήματος στο χρόνο αφήνει αναλλοίωτη τη Λαγκρανζιανή του συστήματος. Επειδή μάλιστα σε θεμελιώδες επίπεδο αυτό ισχύει για όλες τις Λαγκρανζιανές των φυσικών συστημάτων, η διατήρηση της ενέργειας έχει τόσο ευρεία εφαρμογή. Αν δεν υπήρχε αυτή η συμμετρία των φυσικών συστημάτων σε μεταθέσεις στο χρόνο και οι φυσικοί νόμοι άλλαζαν με την πάροδο του χρόνου, η φυσική μάλλον δεν θα είχε το χαρακτήρα επιστήμης.

Άσκηση 5.6 *Δείξτε ότι για Λαγκρανζιανές της μορφής*

$$L = \frac{1}{2} A_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_i \dot{q}_j - V(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

η ποσότητα της έκφρασης (5.26) *δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ενέργεια του συστήματος.*

Απάντηση: *Καταρχάς μπορούμε να λάβουμε τον A_{ij}, χωρίς έλλειψη της γενικότητας, ως συμμετρικό ($A_{ij} = A_{ji}$), αφού μόνο το συμμετρικό κομμάτι του A_{ij} συμβάλλει στη δυναμική (το αντισυμμετρικό κομμάτι δίνει μηδενική συμβολή στη Λαγκρανζιανή). Έχουμε*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{1}{2}(A_{\alpha j}\dot{q}_j + A_{i\alpha}\dot{q}_i) = A_{\alpha j}\dot{q}_j \ ,$$

και τότε

$$\begin{aligned} E &= A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \left(\frac{1}{2}A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - V(\mathbf{q})\right) \\ &= \frac{1}{2}A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + V(\mathbf{q}) \ , \end{aligned}$$

που είναι η γνωστή έκφραση για την ενέργεια ενός μηχανικού συστήματος.

Οι συμμετρίες της δράσης και οι αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες αποτυπώνονται κομψά και άμεσα στη συνάρτηση της δράσης ενός φυσικού συστήματος. Ως απλό παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα ελεύθερο σωματίδιο στο χώρο, το οποίο, όπως γνωρίζουμε, διέπεται από τη Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 \ .$$

Η δράση που αντιστοιχεί στην ομαλή και ευθύγραμμη φυσική κίνηση του σωματιδίου από το $\mathbf{x}_1$ τη χρονική στιγμή t_1 στο $\mathbf{x}_2$ τη χρονική στιγμή t_2, είναι

$$S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2) = \frac{m}{2}\frac{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2}{t_2 - t_1} \ .$$

Είναι οφθαλμοφανές ότι η συνάρτηση δράση $S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2)$ είναι αναλλοίωτη στον αμιγώς χρονικό μετασχηματισμό $t \to t + \epsilon$ και συνεπώς η χρονική μετάθεση αποτελεί συμμετρία της δράσης του ελεύθερου σωματιδίου που οδηγεί, όπως είδαμε, στη διατήρηση της ενέργειας του σωματιδίου. Επίσης από την έκφραση της δράσης είναι προφανές ότι και οι χωρικές μεταθέσεις $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \epsilon\, \mathbf{a}$, όπου $\mathbf{a}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, και οι χωρικές στροφές $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \epsilon\, \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}$, όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι ένα σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα, είναι συμμετρίες της δράσης, που οδηγούν στη διατήρηση της συνολικής ορμής και στροφορμής του σωματιδίου, αντίστοιχα. Παράλληλα και οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \epsilon\mathbf{v}t$, αποτελούν προφανείς συμμετρίες της δράσης, οι οποίες θα οδηγήσουν, όπως θα δούμε στο επόμενο εδάφιο, στη διατήρηση τριών ακόμη ποσοτήτων. Συνολικά, λοιπόν, το ελεύθερο σωματίδιο θα χαρακτηρίζεται από 10 συμμετρίες και 10 διατηρούμενες ποσότητες, αντίστοιχα. Η εισαγωγή ενός πεδίου δυνάμεων, π.χ. ενός ομογενούς βαρυτικού πεδίου, μεταβάλλει τη συνάρτηση της δράσης η οποία μπορεί να μην έχει πλέον τις ίδιες συμμετρίες με το ελεύθερο σωματίδιο και να μεταβάλλονται ή και να καταργούνται οι αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες (βλ. Πρόβλημα 3).

5.5 Η διατηρούμενη ποσότητα που παράγεται από τη συμμετρία στους γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς

Εκτός από τις προαναφερθείσες προφανείς συμμετρίες του Σύμπαντος (ομογένεια και ισοτροπία του χώρου, ομογένεια του χρόνου) υπάρχει, όπως έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 3, και μία συμμετρία που δεν είναι γεωμετρική, αλλά έχει άμεσο φυσικό περιεχόμενο: το γεγονός ότι, αν αλλάξουμε αδρανειακό σύστημα αναφοράς και περιγράψουμε την κίνηση του συστήματος στο νέο σύστημα, οι εξισώσεις κίνησης δεν αλλάζουν. Ο μετασχηματισμός που αντιστοιχεί στη γαλιλαϊκή σχετικότητα[4] είναι

$$\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) + \epsilon\, \mathbf{v}\, t \;, \tag{5.27}$$

όπου επιλέξαμε να γράψουμε τη σχετική ταχύτητα των δύο εν λόγω αδρανειακών συστημάτων ως $\epsilon\mathbf{v}$, ώστε να μπορούμε να τη μεταβάλλουμε με συνεχή τρόπο μέσω της παραμέτρου ϵ. Ας ελέγξουμε στη συνέχεια αν ο χωρικός αυτός μετασχηματισμός αυτός αποτελεί συμμετρία της δράσης ενός απομονωμένου μηχανικού συστήματος αλληλεπιδρώντων σωματιδίων με νευτώνειο δυναμικό

Ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i,j,i\neq j} V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \;.$$

Προφανώς οι αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων δεν θα μεταβληθούν, αν μεταβούμε σε κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς και συνεπώς δεν θα μεταβληθεί ούτε η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σωματιδίων. Η κινητική ενέργεια, όμως, των σωματιδίων θα μεταβληθεί, αφού

$$\dot{\mathbf{x}}_i \to \dot{\mathbf{x}}_i + \epsilon\mathbf{v} \;.$$

Επομένως, η κινητική ενέργεια όλου του συστήματος θα αλλάξει σε

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{x}}_i^2 \to \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{x}}_i^2 + \epsilon\mathbf{v}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\mathbf{x}}_i + \mathcal{O}(\epsilon^2) \;. \tag{5.28}$$

Τον τελευταίο όρο δεν χρειάζεται να τον γράψουμε αναλυτικά, αφού είναι τάξης $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ και επομένως μάς είναι αδιάφορος για τους απειροστούς μετασχηματισμούς. Ταυτόχρονα, ο δεύτερος όρος (τάξης $\mathcal{O}(\epsilon)$) στο ανάπτυγμα της κινητικής ενέργειας είναι τέλεια χρονική παράγωγος της ποσότητας

$$\epsilon\mathbf{v}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{x}_i \;,$$

με αποτέλεσμα η μεν Λαγκρανζιανή να αλλάξει κατά μια τέλεια χρονική παράγωγο που όπως έχουμε συζητήσει είναι απλώς ένας μετασχηματισμός αναβαθμονόμησης, η δε επακόλουθη αλλαγή της δράσης που θα προκύψει από την αλλαγή του συστήματος αναφοράς να είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το αρχικό και το τελικό σημείο της θεωρούμενης διαδρομής,

Η γαλιλαϊκή μεταβολή της δράσης

[4]Εδώ ο όρος *σχετικότητα* χρησιμοποιείται όπως και στη θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν εννοώντας ότι παρατηρητές που κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλο με σταθερή ταχύτητα παρατηρούν ακριβώς την ίδια δυναμική εξέλιξη των φυσικών συστημάτων. Η θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν απλώς επέκτεινε αυτή την γαλιλαϊκή αρχή από τα μηχανικά σε όλα τα φυσικά συστήματα, συμπεριλαμβανομένων και των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων.

$$S \to S + \epsilon \mathbf{v} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i [\mathbf{x}_i(t_2) - \mathbf{x}_i(t_1)] \,. \tag{5.29}$$

Η νέα ποσότητα που προστίθεται στη δράση, όντας σταθερή, δεν αλλοιώνει τις εξισώσεις κίνησης, αφού η ίδια διαδρομή του συστήματος στο χώρο καθιστά και τη νέα αναβαθμονομημένη δράση στάσιμη. Ο μετασχηματισμός, λοιπόν, που εφαρμόσαμε μπορεί να θεωρηθεί μια πιο εκτεταμένη συμμετρία της δράσης· ο μετασχηματισμός δεν μεταβάλλει σε πρώτη τάξη τη δράση πέραν μιας σταθεράς. Ποια είναι, όμως, η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα που πηγάζει από αυτή τη συμμετρία; Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας την έκφραση (5.22) για τη διατηρούμενη ποσότητα που κατασκευάσαμε στην περίπτωση του γενικού θεωρήματος της Noether; Η απάντηση στο τελευταίο ερώτημα είναι αρνητική, αφού ο γαλιλαιϊκός μετασχηματισμός δεν αφήνει εντελώς ανεπηρέαστη τη δράση. Αν συνδυάσουμε τη συγκεκριμένη αλλαγή της Λαγκρανζιανής και της επακόλουθης αλλαγής της δράσης με εκείνη που προκύπτει από ένα γενικό μετασχηματισμό σε πρώτη τάξη ως προς ϵ (βλ. σχέση (5.21)), λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{v} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{x}_i\right] = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{K}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i\right)\tau\right] \,. \tag{5.30}$$

Ο γαλιλαιϊκός μετασχηματισμός περιγράφεται από τους γεννήτορες $\mathbf{K}_i = \mathbf{v}t$ και $\tau = 0$. Έτσι, η διατηρούμενη ποσότητα είναι η

$$\mathbf{v} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{x}_i - \mathbf{v} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i t = \mathbf{v} \cdot (M\mathbf{X}_{KM} - t\mathbf{P}_{KM}) \,. \tag{5.31}$$

Σε αυτή την έκφραση έχουμε αντικαταστήσει τα αθροίσματα με τις αντίστοιχες εκφράσεις για τη θέση και την ορμή του κέντρου μάζας του συστήματος. Αν επιπλέον λάβουμε υπόψη ότι η σχετική ταχύτητα **v** που θεωρήσαμε μεταξύ των συστημάτων αναφοράς είναι αυθαίρετη, συμπεραίνουμε πως η διατηρούμενη ποσότητα που αναλογεί στους γαλιλαιϊκούς μετασχηματισμούς είναι το διάνυσμα

Τι διατηρείται ως αποτέλεσμα της γαλιλαιϊκής συμμετρίας

$$M\mathbf{X}_{KM} - t\mathbf{P}_{KM} \,, \tag{5.32}$$

η σταθερότητα του οποίου εκφράζει την ομαλή κίνηση του κέντρου μάζας με ταχύτητα $\mathbf{P}_{KM}/M$. Η διατηρούμενη αυτή ποσότητα δεν φαίνεται να εμπεριέχει καμία επιπλέον πληροφορία εκτός από αυτή που πηγάζει από τη διατήρηση της ορμής του συστήματος. Ο λόγος είναι ότι ο χρόνος στη νευτώνεια μηχανική είναι απόλυτος και επομένως ο γαλιλαιϊκός μετασχηματισμός είναι ισοδύναμος με τη χωρική μετάθεση. Έτσι, οι δύο μετασχηματισμοί οδηγούν σε ισοδύναμες διατηρούμενες ποσότητες. Παρά ταύτα, η νέα ποσότητα (5.32) έχει πολύ πιο σαφές και ξεχωριστό φυσικό νόημα στη σχετικότητα, όπου παρουσιάζεται ως συνιστώσα της γενικευμένης στροφορμής στο χωρόχρονο (βλ. Κεφάλαιο 6).

Άσκηση 5.7 *Πόσες συνολικά διατηρούμενες ποσότητες έχουμε για ένα σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων και ποιοι είναι οι γεννήτορες των αντίστοιχων μετασχηματισμών; Ελέγξτε αν όλοι οι γεννήτορες, που αποτελούνται από χωρικό και από χρονικό μέρος, αντιμετατίθενται μεταξύ τους, δηλαδή αν η σειρά με την οποία δρουν αυτοί οι γεννήτορες έχει σημασία.*
Γράψτε το μετασχηματισμό που μας μεταφέρει από ένα αδρανειακό σύστημα Σ_1 με καρτεσιανές συντεταγμένες σε ένα άλλο Σ_2, το οποίο (α) κινείται με ταχύτητα v σε σχέση με το πρώτο κατά μήκος του άξονα z_1, (β) τα ρολόγια του Σ_2 δεν είναι συγχρονισμένα με του Σ_1 αλλά "πάνε πίσω" σε σχέση με τα ρολόγια του Σ_1 κατά σταθερό $\Delta\tau$, (γ) οι αρχές των αξόνων τους δεν συνέπιπταν, όταν το ρολόι του πρώτου έδειχνε $t_1 = 0$, αλλά ήταν μετατοπισμένες κατά $\Delta\mathbf{x}$, και (δ) οι $x - y$ άξονές τους δεν είναι παράλληλοι, αλλά είναι στραμμένοι κατά 90° γύρω από τον άξονα z_1 σε σχέση με τους άξονες του πρώτου. Προσέξτε πώς θα γράψετε τη στροφή του μετασχηματισμού, αφού αυτή δεν είναι απειροστή αλλά πεπερασμένη.

Απάντηση: *Η Λαγκρανζιανή και η δράση N αλληλεπιδρώντων σωματιδίων*

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}|\mathbf{x}_i|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j,i\neq j}^{N} V_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$$

είναι αναλλοίωτη (i) στις χωρικές μεταθέσεις $\mathbf{x}_i^\epsilon = \mathbf{x}_i + \epsilon\,\mathbf{a}$, (ii) στις στροφές $\mathbf{x}_i^\epsilon = \mathbf{x}_i + \epsilon\,\mathbf{b}\times\mathbf{x}_i$, (iii) στη χρονική μετάθεση $t^\epsilon = t + \epsilon$ και (iv) στους γαλιλαιϊκούς μετασχηματισμούς $\mathbf{x}_i^\epsilon = \mathbf{x}_i + \epsilon\,\mathbf{c}\,t$. Συνολικά αυτές οι συμμετρίες οδηγούν σε 10 διατηρήσεις που αντιστοιχούν στις 10 συνιστώσες των γεννητόρων (3 συνιστώσες του γεννήτορα $\mathbf{a}$ των μεταθέσεων, συν 3 του γεννήτορα $\mathbf{b}\times\mathbf{x}_i$ των στροφών, συν 3 του γεννήτορα $\mathbf{c}t$ των γαλιλαιϊκών μετασχηματισμών, συν 1 του γεννήτορα 1 της χρονικής μετάθεσης: συνολικά 10 γεννήτορες). Όλοι μετασχηματισμοί σε τάξη ϵ μετατίθενται μεταξύ τους, αλλά οι αντίστοιχοι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί δεν μετατίθενται πάντα. Οι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί των μεταθέσεων μετατίθενται μεταξύ τους π.χ. μετάθεση κατά $\mathbf{a}_1$ που ακολουθείται από μετάθεση κατά $\mathbf{a}_2$ μετασχηματίζει το $\mathbf{x}_i$

$$\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}_i + \mathbf{a}_1 \to \mathbf{x}_i + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\ ,$$

και είναι εμφανές ότι η σειρά των μετασχηματισμών δεν έχει σημασία. Το ίδιο ισχύει και για τους γαλιλαιϊκούς μετασχηματισμούς. Επίσης, πεπερασμένοι μετασχηματισμοί χρονικών μεταθέσεων μετατίθενται με όλους τους μετασχηματισμούς. Πεπερασμένοι μετασχηματισμοί όμως στροφών γενικά δεν μετατίθενται μεταξύ τους ούτε και με τους μετασχηματισμούς μεταθέσεων και Γαλιλαίου. Για παράδειγμα θεωρώντας απειροστές στροφές

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i &\to \mathbf{x}_i + \epsilon_1\mathbf{b}_1\times\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}_i + \epsilon_1\mathbf{b}_1\times\mathbf{x}_i + \epsilon_2\mathbf{b}_2\times(\mathbf{x}_i + \epsilon_1\mathbf{b}_1\times\mathbf{x}_i) = \\ &\qquad \mathbf{x}_i + \epsilon_1\mathbf{b}_1\times\mathbf{x}_i + \epsilon_2\mathbf{b}_2\times\mathbf{x}_i + \epsilon_1\epsilon_2\mathbf{b}_2\times(\mathbf{b}_1\times\mathbf{x}_i)\ ,\end{aligned}$$

και είναι εμφανές ότι η σειρά που έγιναν οι στροφές έχει σημασία σε δεύτερη τάξη (και επομένως οι αντίστοιχοι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί διαφοροποιούνται) αφού $\mathbf{b}_1\times(\mathbf{b}_2\times\mathbf{x}_i) \neq \mathbf{b}_2\times(\mathbf{b}_1\times\mathbf{x}_i)$, εκτός εάν είναι $\mathbf{b}_1 \parallel \mathbf{b}_2$, οπότε οι στροφές γίνονται γύρω από τον ίδιο άξονα. Ομοίως πεπερασμένοι μετασχηματισμοί μεταθέσεων ή Γαλιλαίου δεν μετατίθενται, γενικά, με τους μετασχηματισμούς των στροφών. Θεωρώντας και πάλι απειροστούς μετασχηματισμούς μεταθέσεων και στροφών:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i &\to \mathbf{x}_i + \epsilon_1\mathbf{a} \to \mathbf{x}_i + \epsilon_1\mathbf{a} + \epsilon_2\mathbf{b}\times(\mathbf{x}_i + \epsilon_1\mathbf{a}) = \\ &\qquad \mathbf{x}_i + \epsilon_1\mathbf{a} + \epsilon_2\mathbf{b}\times\mathbf{x}_i + \epsilon_1\epsilon_2\mathbf{b}\times\mathbf{a}\end{aligned}$$

και επειδή $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ οι μετασχηματισμοί δεν μετατίθενται, εκτός βεβαίως αν $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Αν το διάνυσμα θέσης κάποιου σωματιδίου είναι $\mathbf{x}_i'$ και ο χρόνος είναι t' στο Σ_2 ενώ είναι $\mathbf{x}_i$ και t στο Σ_1 τότε οι μετασχηματισμοί (α),(β),(γ) ορίζονται ως ακολούθως:

$$\mathbf{x}_i^{(2)} = \mathbf{x}_i^{(1)} - \Delta\mathbf{x} - v\hat{\mathbf{z}}_1 t^{(1)}\ ,\ t^{(2)} = t^{(1)} - \Delta\tau\ .$$

Ο μετασχηματισμός (δ) αφήνει αναλλοίωτες τις τιμές των z-συντεταγμένων, αλλά μετασχηματίζει τις x, y-συντεταγμένες σύμφωνα με τον κανόνα $x^{(2)} = y^{(1)}$ και $y^{(2)} = -x^{(1)}$:

$$\begin{aligned} x_i^{(2)} &= y_i^{(1)} - (\Delta\mathbf{x})_y\ , & y_i^{(2)} &= -x_i^{(1)} + (\Delta\mathbf{x})_x\ , \\ z_i^{(2)} &= z_i^{(1)} - vt^{(1)}\ , & t^{(2)} &= t^{(1)} - \Delta\tau\ . \end{aligned}$$

5.6 Γενικά σχόλια για το θεώρημα της Noether και διεύρυνση αυτού

Έχοντας αναλύσει τους γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς είμαστε πια σε θέση να διατυπώσουμε το γενικό θεώρημα της Noether που συνδέει συμμετρίες και διατηρούμενες ποσότητες, όταν αναφερόμαστε σε διακριτά μηχανικά συστήματα, δηλαδή σε συστήματα που αποτελούνται από πεπερασμένο πλήθος σωματιδίων.

Το γενικευμένο θεώρημα Noether για σημειακούς χωροχρονικούς μετασχηματισμούς που αποτελούν ημισυμμετρία της δράσης.

Θεώρημα: *Εάν ένας απειροστός συνεχής σημειακός μετασχηματισμός των χωροχρονικών συντεταγμένων ενός συστήματος με γεννήτορες K_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) των γενικευμένων συντεταγμένων και τ του χρόνου αλλάζει τη δράση του συστήματος κατά το ολοκλήρωμα μιας τέλειας χρονικής παραγώγου $dG(\mathbf{q}, t)/dt$, τότε υπάρχει μια ποσότητα η οποία διατηρείται κατά την κίνηση του συστήματος. Αυτή είναι η:*

$$K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \tau - G \, . \tag{5.33}$$

Η καινούργια αυτή ποσότητα G που αφαιρείται από τη διατηρούμενη ποσότητα που κατασκευάσαμε παραπάνω (βλ. σχέση (5.22)) είναι απλώς συνέπεια του γεγονότος ότι οι δύο δράσεις, προ και μετά το μετασχηματισμό, δεν συμπίπτουν, όπως στην (5.19), αλλά διαφέρουν κατά το ολοκλήρωμα της τέλειας χρονικής παραγώγου dG/dt, όπως στην περίπτωση του γαλιλαϊκού μετασχηματισμού (βλ. (5.30)). Έτσι, η μεταβολή της δράσης, αντί να ισούται με τη μεταβολή της ποσότητας

$$A = K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \tau$$

(που συναντήσαμε στη σχέση (5.22)), ισούται με τη μεταβολή της G:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dA}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dG}{dt} dt \, . \tag{5.34}$$

Εξισώνοντας αυτές τις δύο χρονικές παραγώγους, συμπεραίνουμε ότι η διαφορά των δύο ποσοτήτων, που αναγράφεται στην (5.33), είναι μια σταθερά. Οι μετασχηματισμοί αυτοί που αλλάζουν τη δράση (και τη Λαγκρανζιανή) κατά τον προαναφερθέντα τρόπο ονομάζονται *ημισυμμετρίες* της δράσης (ή της Λαγκρανζιανής).

Το αντίστροφο του θεωρήματος της Noether

Έχουμε αποδείξει ότι μετασχηματισμοί που αποτελούν συμμετρίες ή και ημισυμμετρίες της Λαγκρανζιανής ή της δράσης οδηγούν στη διατήρηση αντίστοιχων ποσοτήτων κατά τη φυσική κίνηση του συστήματος. Ισχύει όμως και το αντίστροφο; Δηλαδή αν γνωρίζουμε ότι μια φυσική ποσότητα διατηρείται κατά την κίνηση, υπάρχει κάποιος μετασχηματισμός συμμετρίας ή και ημισυμμετρίας που να οδηγεί σε αυτή η διατήρηση; Η απάντηση είναι καταφατική. Αυτό γίνεται με φυσικό τρόπο στη Χαμιλτονιανή θεώρηση την οποία θα αναλύσουμε σε κατοπινό Κεφάλαιο, στην οποία θα γίνει γενίκευση του θεωρήματος της Noether που θα συνοδεύεται άμεσα και με την αντίστροφη πρόταση. Στη Λαγκρανζιανή θεώρηση μπορεί να αποδειχθεί η αντίστροφη πρόταση αν ορίσουμε κατάλληλα συμμετρίες ή ημισυμμετρίες της Λαγκρανζιανής μέσω γενικευμένων μετασχηματισμών, οι οποίοι είναι αποκλειστικά χωρικοί και έχουν τη γενικευμένη μορφή:

$$Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, \epsilon) = \mathbf{q} + \epsilon \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ . \tag{5.35}$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί παύουν να είναι σημειακοί, αφού η μετάθεση κάθε σημείου της τροχιάς δεν αφορά μόνο στη χωροχρονική θέση αυτού του σημείου, αλλά και στην ταχύτητα του εν λόγω σημείου· είναι κατ' ουσίαν μετασχηματισμοί συνολικά των τροχιών. Τέτοιο παράδειγμα μετασχηματισμού είναι ο μετασχηματισμός της χρονικής μετάθεσης $t \to t_\epsilon = t + \epsilon$, που στο πλαίσιο αυτής της νέας θεώρησης δεν περιγράφεται ως ο χωροχρονικός σημειακός μετασχηματισμός (5.18) αλλά ως ο γενικευμένος χωρικός μετασχηματισμός της τροχιάς $q(t) \to q(t + \epsilon)$, που αντιστοιχεί στον μη-σημειακό μετασχηματισμό (5.35):

$$\begin{aligned} Q &= q(t+\epsilon) \\ &= q + \epsilon \dot{q} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ , \end{aligned} \tag{5.36}$$

με γεννήτορα $K = \dot{q}$. Με αυτήν την διαφορετική κλάση μη-σημειακών μετασχηματισμών της Λαγκρανζιανής μπορεί να επαναδιατυπωθεί το θεώρημα της Noether ως ακολούθως:

Διατύπωση του θεωρήματος Noether για γενικευμένους χωρικούς μη-σημειακούς μετασχηματισμούς

Θεώρημα: Εάν ο γενικευμένος μετασχηματισμός (5.35) με γεννήτορες $K_i(q, \dot{q}, t)$ είναι ημισυμμετρία της Λαγκρανζιανής, δηλαδή η μεταβολή της Λαγκρανζιανής ικανοποιεί ταυτοτικά τη σχέση:

$$\left.\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \frac{dG}{dt} \ , \tag{5.37}$$

για κάποια συνάρτηση $G(q, \dot{q}, t)$, τότε ~~διατηρείται~~ κατά τη φυσική κίνηση διατηρείται η ποσότητα

$$F = G - K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ . \tag{5.38}$$

Αντιστρόφως, εάν οι συντεταγμένες που περιγράφουν το φυσικό πρόβλημα είναι ελεύθερες να λαμβάνουν οποιαδήποτε τιμή και δεν υπόκεινται σε κάποια δέσμευση, τότε η διατήρηση της $F(q, \dot{q}, t)$ κατά τη φυσική κίνηση ενός συστήματος συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός με γεννήτορες που προκύπτουν από τη λύση του γραμμικού συστήματος:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} K_j = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \ , \tag{5.39}$$

αποτελεί ημισυμμετρία και ως εκ τούτου ικανοποιείται ταυτοτικά η (5.37) με $G = F + K_i \partial L / \partial \dot{q}_i$. Δηλαδή, η δομή της Λαγκρανζιανής συνάρτησης είναι τέτοια ώστε η μεταβολή που θα της προκαλέσει ο εν λόγω γεννήτορας να ικανοποιεί την εξίσωση (5.37) αυτομάτως, χωρίς καμία αναφορά στη φυσική τροχιά.

Παρατηρήστε ότι ο γεννήτορας **K** μπορεί συνήθως να προσδιοριστεί από το σύστημα (5.39) διότι ο πίνακας με στοιχεία $A_{ij} = \partial^2 L/\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j$ είναι αντιστρέψιμος, διότι είναι συνήθως ο πίνακας των μαζών που υπεισέρχεται στην κινητική ενέργεια του συστήματος (βλ. Άσκηση 5.6). Η σχέση (5.39) συνδέει μονοσήμαντα τον γεννήτορα του μετασχηματισμού συμμετρίας ή ημισυμμετρίας της Λαγκρανζιανής που αντιστοιχεί σε κάθε διατηρούμενη ποσότητα με την ποσότητα αυτή, και ως εκ τούτου είναι πολύ σημαντική σχέση.

Πριν αποδείξουμε την ευθεία και την αντίστροφη πρόταση εξηγούμε την προέλευση της σημαντικής αυτής σχέσης. Ας χρησιμοποιήσουμε αρχικά για λόγους απλότητας το συμβολισμό

$$p_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

και ας υποθέσουμε ότι ο μετασχηματισμός $q_i^\epsilon = q_i + \epsilon K_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ είναι ημισυμμετρία της Λαγκρανζιανής, δηλαδή ισχύει ταυτοτικά η σχέση:

$$\left.\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \frac{dG(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{dt}, \tag{5.40}$$

για κάποιο $G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Αναπτύσσοντας την L_ϵ, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{K}_i p_i = \frac{dG}{dt} \ . \tag{5.41}$$

Οι υπολογισμοί μέχρις αυτό το σημείο δεν αναφέρονται σε κάποια φυσική διαδρομή και επομένως δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι

$$K_i \partial L/\partial q_i + \dot{K}_i p_i = \frac{d}{dt}(K_i p_i) \ ,$$

που απαιτεί οι μεταβλητές **q** να ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler - Lagrange. Στην (5.41) παρουσιάζονται όροι που εξαρτώνται από τα **q**, $\dot{\mathbf{q}}$ αλλά και τα $\ddot{\mathbf{q}}$. Κατά την ανάλυση των όρων της (5.41) όροι $\ddot{\mathbf{q}}$ υπάρχουν μόνο στον όρο $\dot{\mathbf{K}}$, στο αριστερό σκέλος, καθώς και στο dG/dt στο δεξί σκέλος της (5.41). Επειδή

$$\dot{K}_i = \frac{\partial K_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial K_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha + \frac{\partial K_i}{\partial t},$$

οι όροι με τις δεύτερες παραγώγους των συντεταγμένων στο αριστερό σκέλος της (5.41) είναι

$$p_i \frac{\partial K_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha \ , \tag{5.42}$$

ενώ στο δεξί σκέλος της (5.41) είναι οι:

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha \ . \tag{5.43}$$

Η υπόθεση της ημισυμμετρίας απαιτεί η σχέση (5.41) να ισχύει όμως ταυτοτικά για κάθε τιμή των **q**, $\dot{\mathbf{q}}$ και $\ddot{\mathbf{q}}$. Κάτι τέτοιο, όμως, θα σήμαινε ότι οι **q**, $\dot{\mathbf{q}}$ και $\ddot{\mathbf{q}}$ δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητές, αλλά δεσμευμένες· γεγονός το οποίο θεωρήσαμε εξ αρχής ότι δεν ισχύει: Αρχικά υποθέσαμε ότι οι **q**, $\dot{\mathbf{q}}$ και $\ddot{\mathbf{q}}$ είναι ανεξάρτητες.

Επομένως για να είναι ταυτοτική η σχέση απαιτείται οι όροι (5.42) και (5.43) να ταυτίζονται για κάθε συνσιστώσα του $\ddot{\mathbf{q}}$· πρέπει, λοιπόν, ο $\mathbf{K}$ και η G να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$p_i \frac{\partial K_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_\alpha} \;, \tag{5.44}$$

για κάθε συνσιστώσα α. Αν κάνουμε τώρα την αντικατάσταση $G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + p_i K_i$ τότε η (5.44) παίρνει τη μορφή της (5.39), που δεν περιέχει πλέον παραγώγους της $\mathbf{K}$, και συνδέει άμεσα τους γεννήτορες K_i με την ποσότητα $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, η οποία θα προκύψει ότι διατηρείται στις φυσικές διαδρομές. Συνεπώς η (5.39) ισχύει αναγκαστικά εάν υπάρχει ημισυμμετρία της Λαγκρανζιανής (5.40).

Θα δείξουμε τώρα ότι εάν $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - p_i K_i$ και ικανοποιείται η (5.39), ή ισοδύναμα η (5.44), τότε ισχύει η εξής ταυτότητα τύπου Noether:

$$K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{K}_i p_i - \frac{dG}{dt} = K_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \dot{p}_i \right) - \frac{dF}{dt} \;. \tag{5.45}$$

Πράγματι έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{K}_i p_i - \frac{dG}{dt} &= K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \left(\cancel{\frac{\partial K_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial K_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial K_i}{\partial t} \right) p_i \\
&\quad - \left(\cancel{\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial G}{\partial t} \right) \\
&= K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial K_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial K_i}{\partial t} \right) p_i \\
&\quad - \left(\frac{\partial (F + p_i K_i)}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial (F + p_i K_i)}{\partial t} \right) \\
&= K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \cancel{\frac{\partial K_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha p_i} + \cancel{\frac{\partial K_i}{\partial t} p_i} \\
&\quad - \left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial p_i}{\partial q_\alpha} K_i \dot{q}_\alpha + \cancel{\frac{\partial K_i}{\partial q_\alpha} p_i \dot{q}_\alpha} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial t} K_i + \cancel{\frac{\partial K_i}{\partial t} p_i} \right) \\
&= K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial F}{\partial t} \right) - K_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \\
&= K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - \left(\frac{dF}{dt} - \cancel{\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha} \right) - K_i \left(\frac{dp_i}{dt} - \cancel{\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha} \right) \\
&= K_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \dot{p}_i \right) - \frac{dF}{dt} \;.
\end{aligned}$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι για την απόδειξη του γενικευμένου θεωρήματος Noether για μη σημειακούς μετασχηματισμούς.

Η ευθεία πρόταση: Εάν έχουμε ημισυμμετρία, το αριστερό μέλος της (5.45) μηδενίζεται οπότε θα είναι

$$K_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \dot{p}_i \right) - \frac{dF}{dt} = 0 \;,$$

που συνεπάγεται ότι

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

επί των φυσικών διαδρομών.
Η αντίστροφη πρόταση: Εάν η K ικανοποιεί την (5.39) και διατηρείται η F κατά τη φυσική κίνηση, θα πρέπει, τότε, να αποδείξουμε ότι ο γεννήτορας $\mathbf{K}$ οδηγεί σε μια ημισυμμετρία με $G = F + p_i K_i$. Από την (5.45) έχουμε ότι επί των φυσικών διαδρομών, μηδενίζεται η συνάρτηση

$$K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{K}_i p_i - \frac{dG}{dt} = 0\ . \tag{5.46}$$

Αλλά εάν αυτή η συνάρτηση, που είναι η συνθήκη ημισυμμετρίας (5.41), μηδενίζεται μόνο στις φυσικές διαδρομές και δεν ικανοποιείται ταυτοτικά για οποιαδήποτε τιμές των $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ τότε οι συντεταγμένες $\mathbf{q}$ δεν θα ήταν ελεύθερες αλλά δεσμευμένες από τη σχέση (5.41), πράγμα το οποίο είναι αδύνατον, δεδομένου ότι υποθέσαμε ότι δεν υπάρχει κάποια δέσμευση μεταξύ αυτών. Συνεπώς η (5.46) (και ομοίως η (5.41)) ικανοποιείται για όλες τις τιμές των $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ και ορίζει ημισυμμετρία.

Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι ενδιαφέρον διότι αποδεικνύει ότι τελικά αν η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική (ή ημισυμμετρική γύρω από τις φυσικές διαδρομές), τότε θα είναι και συμμετρική (ή ημισυμμετρική) ως προς όλες τις διαδρομές. Αυτό εξηγεί τον λόγο που αρκεί η γνώση της συνάρτησης δράσης για να ανιχνεύσει κανείς τις συμμετρίες του φυσικού συστήματος.

Θεώρημα της Noether και πεδία

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το θεώρημα της Noether, όπως διατυπώθηκε από την ίδια, αναφέρεται σε πεδία και όχι σε διακριτά συστήματα· αυτός εξάλλου είναι και ο λόγος που το θεώρημα της Noether απαντάται κυρίως σε βιβλία θεωριών πεδίου. Η εφαρμογή του σε πεδία οδηγεί σε συσχέτιση ομαδοθεωρητικών συμμετριών της δράσης πεδίων με αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες, όπως για παράδειγμα η συμμετρία βαθμίδας U(1) του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, η οποία σχετίζεται με τη διατήρηση του φορτίου. Η επέκταση της εφαρμογής του θεωρήματος της Noether σε διακριτά συστήματα είναι, όμως, άμεση και οδηγεί με σχετικά απλό τρόπο στη σύνδεση των γνωστών από τη μηχανική διατηρούμενων ποσοτήτων με τις συμμετρίες του Σύμπαντος, προσδίδοντας στις πρώτες βαθύτερο νόημα.

Noether και γενική σχετικότητα

Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι η Noether, δουλεύοντας πάνω στο ομώνυμο θεώρημα, έδωσε απαντήσεις σε δύσκολα νοητικά προβλήματα που εμφανίστηκαν τα πρώτα χρόνια μετά το 1915, όταν ο Hilbert και ο Αϊνστάιν, σχεδόν ταυτόχρονα, αλλά ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, διατύπωσαν τη γενική θεωρία της σχετικότητας. Παράδειγμα ενός τέτοιου προβλήματος ήταν η φαινόμενη μη διατήρηση τοπικά της ενέργειας και της ορμής. Η Noether όχι μόνο έδειξε πώς θα πρέπει να αναδιατυπωθούν οι αντίστοιχοι νόμοι διατήρησης στη σχετικότητα, αλλά και κατασκεύασε άλλο ένα διαφωτιστικό, ανάλογο με τη σχετικότητα, παράδειγμα όπου η νευτώνεια μορφή των νόμων διατήρησης δεν ίσχυε.

Προβλήματα

ΑΑΑ

1. Έστω η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x + y - 2z)\ .$$
Να βρεθεί κάποια συμμετρία της Λαγκρανζιανής και η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα. Μπορείτε να φτιάξετε περισσότερες από μία διατηρούμενες ποσότητες;

2. Προσδιορίστε τις συμμετρίες της Λαγκρανζιανής
$$L = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{x}\ ,$$
όπου **a** σταθερό διάνυσμα και τις αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες.

3. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή που διέπει τη φυσική κίνηση σωματιδίου στο ομογενές και κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας. Υπολογίστε τη συνάρτηση της δράσης που αντιστοιχεί στη φυσική κίνηση συναρτήσει της αρχικής θέσης z_1 και του χρόνου t_1 και της τελικής θέσης z_2 και του χρόνου t_2. Από την έκφραση αυτή προσδιορίστε τις συμμετρίες της δράσης και τις αντιστοιχούσες διατηρούμενες ποσότητες στη περίπτωση αυτή καθώς και στην ειδική περίπτωση που δεν υπάρχει πεδίο βαρύτητας ($g = 0$).

4. Θεωρήστε τη Λαγκρανζιανή ελεύθερου σωματιδίου στο ιδιόμορφο Σύμπαν που συναντήσαμε στο Πρόβλημα 3 του Κεφαλαίου 3, στο οποίο η ισοτροπία περιορίζεται σε διευθύνσεις μόνο γύρω από τον άξονα z. Σκεφτείτε ποιοι μετασχηματισμοί συντεταγμένων αποτελούν συμμετρίες της Λαγκρανζιανής και στη συνέχεια βρείτε τις αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες.

5. Κατασκευάστε τις *ισοδρασικές* καμπύλες (καμπύλες σταθερής δράσης) σε ένα διάγραμμα $x - t$ για ένα ελεύθερο σωματίδιο που κινείται σε μία διάσταση και τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0$. Σε αυτό το διάγραμμα έχει νόημα να υπολογίσει κανείς τη δράση μόνο για τις φυσικές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει το σωματίδιο. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε αυτό; Αν, τώρα, θεωρήσουμε έναν απειροστό μετασχηματισμό της θέσης και του χρόνου
$$x \to x' = x\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)\ ,\ t \to t' = t(1 + \epsilon)\ ,$$
παρατηρούμε ότι η δράση δεν μεταβάλλεται σε πρώτη τάξη ως προς ϵ. Αποδείξτε ότι αυτό συμβαίνει, υπολογίζοντας απευθείας τη μεταβολή της δράσης ελεύθερου σωματιδίου σε πρώτη τάξη ως προς ϵ. Υπό την προϋπόθεση ότι ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει αναλλοίωτη τη δράση υπολογίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα. Τι φυσικό νόημα έχει αυτή η διατηρούμενη ποσότητα;

6. Θεωρήστε μία Λαγκρανζιανή της μορφής $L = a(\dot{x}/x)^2$. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι η Λαγκρανζιανή αυτή είναι συμμετρική σε μετασχηματισμούς της μορφής $x \to x' = x(1 + \epsilon)$. Υπολογίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα και στη συνέχεια βρείτε μέσω αυτής την εξίσωση κίνησης. Δοκιμάστε να βρείτε την εξίσωση κίνησης από την εξίσωση Euler - Lagrange. Ποιος είναι ο ευκολότερος τρόπος

7. Δύο σωματίδια είναι υποχρεωμένα να κινούνται στην επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα 1. Τα δύο σωματίδια είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς k, το οποίο κείται επί της σφαίρας και έχει μηδενικό φυσικό μήκος. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες και δείξτε ότι είναι συμμετρική σε μετασχηματισμούς των αζιμουθιακών γωνιών $\phi_i \to \phi'_i = \phi_i + \epsilon$, όπου $i = 1, 2$ ο δείκτης του εκάστοτε σωματιδίου. Ποια είναι η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα; Ποια είναι η φυσική της σημασία;

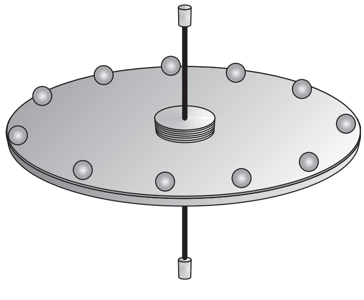
8. Η εξίσωση κίνησης του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση $m\ddot{\mathbf{x}}+2\gamma\dot{\mathbf{x}}+k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι αναλλοίωτη στις στροφές. Διατηρείται η στροφορμή $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$; Γράψτε την εξίσωση εξέλιξης της στροφορμής και λύστε την. Αποδείξτε ότι μια Λαγκρανζιανή που παράγει τη δυναμική του συστήματος είναι η

$$L = e^{2\gamma t/m}\frac{1}{2}(m|\dot{\mathbf{x}}|^2 - k|\mathbf{x}|^2) \ .$$

Η Λαγκρανζιανή αυτή, όπως φαίνεται, είναι συμμετρική σε στροφές. Μήπως διατηρείται, λοιπόν, η στροφορμή; Εφαρμόζοντας το θεώρημα της Noether προσδιορίστε τη διατηρούμενη ποσότητα που αντιστοιχεί σε αυτή τη συμμετρία.

9. Δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν με νευτώνειο δυναμικό και βρίσκονται υπό την επίδραση εξωτερικού δυναμικού της μορφής $V(\rho, z - \alpha\theta)$, όπου (ρ, θ, z) κυλινδρικές συντεταγμένες. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή και προσδιορίστε τις διατηρούμενες ποσότητες.

10. Ο Feynman στο περίφημο βιβλίο του ''Lectures on Physics'' περιγράφει το εξής παράδοξο: ένας δίσκος μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του. Στην περιφέρεια του δίσκου και σε σταθερή απόσταση η μια από την άλλη είναι τοποθετημένες μια σειρά από όμοιες θετικά φορτισμένες σφαίρες. Στο κέντρο του δίσκου είναι στερεωμένο ένα πηνίο από υπεραγώγιμο υλικό, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα. Αυξάνοντας τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος, το υπεραγώ-



γιμο πηνίο αποκτά αντίσταση ο-πότε σύντομα το ρεύμα καταργείται. Το πρώην σταθερό μαγνητικό πεδίο αλλάζει και η αλλαγή αυτή συνεπάγεται την εμφάνιση ηλεκτρικού πεδίου που ασκώντας ροπή στις φορτισμένες σφαίρες θέτει το δίσκο σε περιστροφή. Από την άλλη πλευρά η στροφορμή του δίσκου δεν πρέπει να μεταβάλλεται από τη στιγμή που δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο δυνάμεων. Θα αρχίσει, λοιπόν, να περιστρέφεται ο δίσκος ή όχι; Αντιμετωπίστε το πρόβλημα ως εξής: (α) Θεωρήστε το δίσκο και το πηνίο αβαρή και υποθέστε ότι ολόκληρη η μάζα του συστήματος βρίσκεται στις φορτισμένες σφαίρες, οι οποίες είναι τοποθετημένες στην περιφέρεια του δίσκου. Η θεώρηση αυτή απλώς διαφοροποιεί την τιμή της ροπής αδράνειας του δίσκου χωρίς να αλλοιώνει τη φυσική του συστήματος. Γράψτε σε κυλινδρικές συντεταγμένες τη Λαγκρανζιανή του συστήματος, λαμβάνοντας υπόψη την αξονική συμμετρία του και αγνοώντας το ηλεκτρικό πεδίο των σφαιρών, το οποίο εξάλλου θα παρέμενε σταθερό κατά την περιστροφή του δίσκου, αν αντικαθιστούσαμε τις σφαίρες με ένα συνεχή φορτισμένο δακτύλιο. (β) Η γωνία περιστροφής είναι κυκλική μεταβλητή. Ποια ποσότητα διατηρείται ως συνέπεια αυτού; (γ) Διατηρείται η κλασική στροφορμή του δίσκου; Τι θα συμβεί, όταν το ανυσματικό δυναμικό μαζί με το μαγνητικό πεδίο εξαφανιστούν;

11. Σωματίδιο κινείται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $B\hat{\mathbf{z}}$. Ποιές είναι οι συμμετρίες της Λαγκρανζιανής και ποιές ποσότητες διατηρούνται με και χωρίς μαγνητικό πεδίο. *(Φ. Χατζηϊωάννου)*

12. *Στα βήματα της απόδειξης του θεωρήματος περί ημισυμμετριών.* Θεωρήστε ένα φυσικό σύστημα με Λαγκρανιανή

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{x}^3}{3} - V(x) \ .$$

Γνωρίζουμε πως όντας χρονοανεξάρτητη αυτή η Λαγκρανζιανή, διατηρείται κατά τη φυσική διαδρομή η ποσότητα

$$F = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L \ ,$$

που δεν είναι άλλη από το ολοκλήρωμα του Jacobi. (α) Υπολογίστε την έκφραση για την ποσότητα F για τη υγκεκριμένη Λαγκρανζιανή. (β) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $K = \dot{x}$, αποτελεί ημισυμμετρία της παραπάνω Λαγκρανζιανής. (Ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο αναμενόμενος σύμφωνα με την (5.36) για μια χρονανεξάρτητη Λαγκρανζιανή.) (γ) Ποια είναι η αντίστοιχη συνάρτηση G; (δ) Βεβαιωθείτε ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός $K = \dot{x}$ είναι η λύση της εξίσωσης (5.39).

13. Σωματίδιο μάζας m κινείται στο κεντρικό δυναμικό $V = -k/|\mathbf{x}|$. Αποδείξτε κατευθείαν από τις εξισώσεις κίνησης ότι διατηρείται η στροφορμή του σωματιδίου $\mathbf{L}$ ως προς το κέντρο της δύναμης καθώς επίσης και το άνυσμα Runge-Lenz

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - km\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \ .$$

Αποδείξτε ότι το σωματίδιο κινείται επί σταθερού επιπέδου και ότι το $\mathbf{A}$ κείται επί αυτού του επιπέδου. Υπολογίστε το $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}$ και δείξτε ότι το σωματίδιο διαγράφει στο επίπεδο αυτό την κωνική τομή

$$|\mathbf{x}| = \frac{|\mathbf{L}|^2}{mk(1 + e\cos\theta)} \ ,$$

με εκκεντρότητα

$$e = \frac{|\mathbf{A}|}{mk} \ .$$

Ποια είναι η διεύθυνση του $\mathbf{A}$; Ποια είναι η φυσική σημασία του $\mathbf{A}$; Κατασκευάστε τους γεννήτορες K_i, λύνοντας το σύστημα (5.39), για να προσδιορίσετε το μετασχηματισμό-ημισυμμετρία που παράγει τη διατήρηση του ανύσματος Runge-Lenz.

14. Θεωρήστε τον τρισδιάστατο ισότροπο αρμονικό ταλαντωτή με Λαγκρανζιανή
$$L = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 - \frac{k}{2}|\mathbf{x}|^2 \ .$$
Αποδείξτε ότι οι εξής 6 (γιατί 6 και όχι 9;) ποσότητες διατηρούνται:
$$F_{ij} = \frac{m}{2}\dot{x}_i\dot{x}_j + \frac{k}{2}x_i x_j \ .$$
Προσδιορίστε τους μετασχηματισμούς-ημισυμμετρίες που οδηγούν στη διατήρηση αυτών των ποσοτήτων.