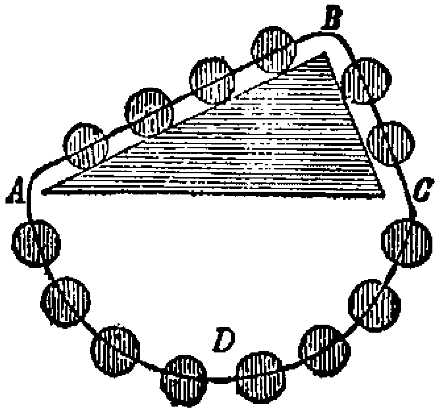
Κεφάλαιο 4

Από την Αρχή του D' Alembert στην Αρχή της Ισοδυναμίας

"Αν στο μνήμα σας
χαράξουν κάτι σαν αυτό,
τα έχετε πάει περίφημα."
Richard Feynman



Σχήμα 4.1: Το σχέδιο αυτό είναι χαραγμένο στο μνήμα του φλαμανδού μηχανικού Simon Stevin [1548-1620]. Οι κάθετες πλευρές του απόλυτα λείου κεκλιμένου επιπέδου έχουν λόγο 2:1. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν η αλυσίδα του Σχήματος θα κινείται αενάως. Σήμερα γνωρίζουμε ότι, μολονότι η αριστερή πλευρά της αλυσίδας έχει διπλάσιο βάρος από τη δεξιά, οι γωνίες είναι τέτοιες ώστε το σύστημα να βρίσκεται σε ισορροπία. Στο κεφάλαιο αυτό θα διευρύνουμε την έννοια της ισορροπίας των δυνάμεων έτσι ώστε να μπορούμε να περιγράψουμε τη δυναμική των μηχανικών συστημάτων με όρους στατικής.

4.1 Από τη δυναμική στη στατική

Στη νευτώνεια μηχανική οι δυνάμεις κατέχουν πρωταρχικό ρόλο και θεωρούνται εκ των προτέρων γνωστές. ´Οταν, για παράδειγμα, διατυπώνουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα που περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου

$$m\vec{a} = \vec{F} \ ,$$

Η δύναμη κατά τον Νεύτωνα

θεωρούμε ότι η μάζα, η επιτάχυνση αλλά και η δύναμη είναι έννοιες ανεξάρτητες η μία από την άλλη και οι αριθμητικές τιμές τους, σε κάθε περίπτωση, συνδέονται μέσω της παραπάνω σχέσης. Αν η δύναμη οριζόταν μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, τότε ο νόμος αυτός δεν θα ήταν τίποτε άλλο παρά ένας ορισμός της έννοιας της δύναμης χωρίς κανένα ουσιαστικό φυσικό περιεχόμενο. Η δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο έχει υλική υπόσταση και είναι ανεξάρτητη από την επίπτωση που αυτή έχει στην κίνηση του σωματιδίου. Μεταξύ δύο βαρυτικών σωμάτων, για παράδειγμα, ασκείται η ελκτική δύναμη της βαρύτητας, η οποία είναι υπεύθυνη για την κίνηση των σωμάτων γύρω από το κέντρο μάζας τους. Σε ένα μήλο επίσης που ισορροπεί επάνω σε ένα τραπέζι ασκούνται δύο δυνάμεις που αλληλοεξουδετερώνονται: η βαρυτική έλξη από τη Γη και η αντίδραση του τραπεζιού, που οφείλεται στην ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση των μορίων του μήλου και του τραπεζιού, τα οποία βρίσκονται σε "επαφή". Εάν σπρώξουμε το μήλο και αυτό αρχίσει να κινείται επάνω στο τραπέζι πιθανότατα θα ασκηθεί σε αυτό επιπλέον κάποια δύναμη τριβής, η οποία είναι και αυτή ηλεκτρομαγνητικής φύσεως. Σε κάθε περίπτωση το αίτιο της δύναμης θεωρείται γνωστό και δεδομένων των δυνάμεων η κίνηση του σώματος μπορεί να περιγραφεί πλήρως εάν είναι γνωστές οι αρχικές συνθήκες της κίνησης. Στα παραδείγματα που αναφέραμε οι δυνάμεις είναι η βαρυτική έλξη, οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις, που αναπτύσσονται μεταξύ των νεφών των ηλεκτρονίων των μορίων του μήλου και του τραπεζιού που πλησιάζουν το ένα το άλλο και προκαλούν την αντίδραση που ασκεί το τραπέζι στο μήλο καθώς και τη δύναμη της τριβής που επιβραδύνει την κίνηση του σώματος, και τέλος η ώθηση από το χέρι μας. Επισημαίνουμε, ακόμη, ότι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα αναφέρεται σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η ύπαρξη του οποίου έχει εξασφαλιστεί από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα.

Περιγράψαμε παραπάνω με αδρές γραμμές το πλαίσιο της νευτώνειας θεώρησης σύμφωνα με το οποίο η δύναμη είναι μία ανεξάρτητη έννοια που έχει συγκεκριμένη υλική προέλευση. Έχοντας διευκρινίσει ποιο είναι το νόημα των πραγματικών δυνάμεων, μπορούμε τώρα να κάνουμε ένα ακόμη βήμα και να ορίσουμε νέες ποσότητες τύπου δύναμης, δίχως να υπάρχει κίνδυνος παρανόησης. Υπό αυτό το πρίσμα ορίζουμε ως ενεργό "δύναμη" την ποσότητα

$$\vec{f} = m\vec{a} \, .$$

Με αυτό τον ορισμό ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα λαμβάνει τη μορφή

$$\vec{F} + \left(-\vec{f}\right) = 0 \, ,$$

η οποία μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφει την ισορροπία μεταξύ της ασκούμενης πραγματικής δύναμης και της αντίθετης της ενεργού "δύναμης", την οποία καλούμε *δύναμη αδράνειας*

$$\vec{f}^{\,(A)} \equiv -m\vec{a} \, .$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει στην ουσία την ισορροπία του σώματος που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής, ο οποίος κινείται μαζί με το σώμα και δεν είναι εν γένει αδρανειακός. Αυτή η σχέση ισορροπίας μπορεί να επεκταθεί και σε ένα σύστημα σωματιδίων

$$\sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{f}_i^{\,(A)} = 0 \,, \tag{4.1}$$

όπου $\vec{F}_{ij}$ είναι η εκάστοτε πραγματική δύναμη που ασκείται στο i-οστό σωματίδιο από το κάθε αίτιο j και $\vec{f}_i^{\,(A)} = -m_i\vec{a}_i$ είναι η "δύναμη" αδράνειας του i-οστού σωματιδίου. Αυτή είναι η αρχή που διατύπωσε ο γάλλος μαθηματικός Jean Le Rond D' Alembert [1717-1783] το 1743.

Η αρχή του D' Alembert: η κίνηση ως "ισορροπία"

> Οι δυνάμεις αδράνειας ενός σωματιδίου και οι ασκούμενες σε αυτό πραγματικές δυνάμεις βρίσκονται σε ισορροπία ή ισοδυνάμως, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σωματίδιο είναι μηδενική, αν θεωρήσουμε ως δυνάμεις και τις δυνάμεις αδράνειας.

Η αρχή αυτή δεν προσφέρει προς το παρόν τίποτε το καινούργιο στη δυναμική του Νεύτωνα, αλλά, όπως θα δούμε, η αλλαγή θεώρησης και αναγωγής του δυναμικού προβλήματος σε στατικό πρόβλημα οδηγεί σε πολύ ενδιαφέρουσες γενικεύσεις. Βέβαια, η *αρχή του D' Alembert* μετατρέπει μόνο φορμαλιστικά το δυναμικό πρόβλημα σε πρόβλημα στατικής. Η έκφραση (4.1), μολονότι είναι τυπικά συνθήκη ισορροπίας ενός σώματος, περιλαμβάνει τις "δυνάμεις" αδράνειας, οι οποίες είναι ανάλογες των επιταχύνσεων και συνεπώς η συνθήκη ισορροπίας δεν είναι τίποτε άλλο από μια διαφορική εξίσωση της κίνησης του σώματος.

4.2 Αρχή των δυνατών έργων

Γνωρίζουμε ότι ένα σώμα βρίσκεται σε ισορροπία όταν η συνολική πραγματική δύναμη που ασκείται σε αυτό είναι μηδενική. Μπορεί, όμως, να δοθεί μια ακόμη πιο χρήσιμη διατύπωση της συνθήκης ισορροπίας. Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο, το οποίο, ενώ βρίσκεται σε ισορροπία, μετατοπίζεται απειροελάχιστα. Το διαφορικό έργο των δυνάμεων σε αυτή την περίπτωση θα είναι μηδενικό. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την κατάσταση ισορροπίας ενός συστήματος σωματιδίων ως την κατάσταση κατά την οποία όλες οι απειροστές μετατοπίσεις των σωματιδίων δεν παράγουν έργο. Αυτή η διατύπωση της αρχής της ισορροπίας, που ονομάζεται *αρχή των δυνατών έργων*, δόθηκε ουσιαστικά από τον Stevin το 1586, ο οποίος κατέληξε σε αυτήν ξεκινώντας από την υπόθεση ότι δεν υπάρχει αέναη κίνηση που να παράγει έργο, ότι, δηλαδή, δεν υπάρχουν αεικίνητα.

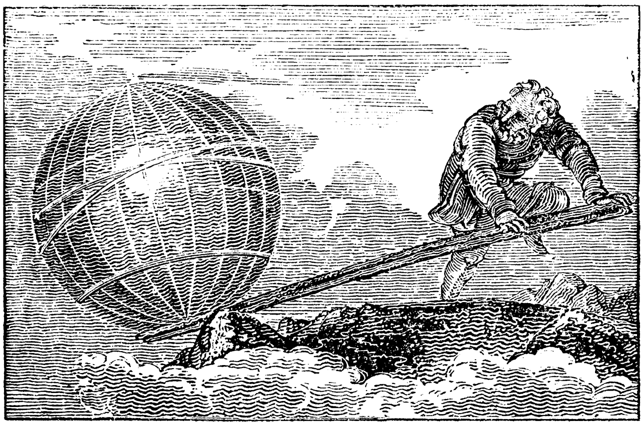
Η αρχή των δυνατών έργων ως συνθήκη ισορροπίας

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η αρχή των δυνατών έργων συνεπάγεται κατάσταση ισορροπίας στην περίπτωση N σωματιδίων στα οποία ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις αλλά και δυνάμεις αλληλεπίδρασης τέτοιες ώστε τα σωματίδια να βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας. Έστω ότι σε κάθε σωματίδιο ασκείται συνολική δύναμη $\vec{F}_i$, όπου i ο δείκτης του σωματιδίου και $\delta\vec{x}_i$ μια απειροστή μετατόπιση αυτού.[1] Σε αυτή την περίπτωση η αρχή των δυνατών έργων απαιτεί οποιαδήποτε μετατόπιση $\delta\vec{x}_i$ από την κατάσταση ισορροπίας να παράγει μηδενικό συνολικό έργο, δηλαδή

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{x}_i = 0 \; . \tag{4.2}$$

"Δός μοι ποῦ στῶ καί κινῶ τήν γῆν"

Αφού οι μετατοπίσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και αυθαίρετες η



Σχήμα 4.2: Χαρακτικό του Holzschnitt Mechanics Magazine (London) του 1824 που παριστάνει τον Αρχιμήδη να ανυψώνει τη Γη με ένα μοχλό. Η ισορροπία μεταξύ των δυνάμεων του Αρχιμήδη και του υποτιθέμενου "βάρους" της Γης βρίσκεται σε συμφωνία με την αρχή των δυνατών έργων. Οποιαδήποτε νοητή μετατόπιση του συστήματος, είτε προς τη μια είτε προς την άλλη κατεύθυνση, καταλήγει σε μηδενικό συνολικό έργο των δύο δυνάμεων.

παραπάνω αρχή συνεπάγεται ότι η συνολική δύναμη που ασκείται σε κάθε σωματίδιο πρέπει να μηδενίζεται,

$$\vec{F}_i = 0 \; , \tag{4.3}$$

για κάθε i, διότι, όταν μετατοπίζεται μόνο το k-στό σωματίδιο, η σχέση (4.2) απαιτεί

$$\vec{F}_k \cdot \delta\vec{x}_k = 0 \; , \tag{4.4}$$

για κάθε μετόπιση του σωματιδίου κατά $\delta\vec{x}_k$, οπότε η συνολική δύναμη που ασκείται στο k-στό σωματίδιο πρέπει να είναι μηδενική. Τούτο ισχύει, αφού σύμφωνα με την σχέση (4.4) το διάνυσμα $\vec{F}_k$ είναι κάθετο σε κάθε $\delta\vec{x}_k$ και το μόνο διάνυσμα που είναι κάθετο σε όλα τα διανύσματα του χώρου είναι το μηδενικό. Επιπλέον, αφού το σωματίδιο που μετατοπίστηκε

[1] Ίσως αναρωτιέστε γιατί χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\delta\vec{x}$ αντί του $d\vec{x}$. Αν και στο σημείο αυτό η επιλογή δεν έχει ιδιαίτερη σημασία, αυτή έγινε για να αποφευχθεί οποιαδήποτε σύγχυση με την πραγματική κίνηση των σωματιδίων. Οι απειροστές μετατοπίσεις με τις οποίες ασχολούμαστε είναι υποθετικές μετατοπίσεις τις οποίες υιοθετούμε στη μελέτη μας προκειμένου να μετρήσουμε το έργο των δυνάμεων αν οι μετατοπίσεις αυτές πραγματοποιούνταν.

ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι η συνολική δύναμη που ασκείται σε κάθε σωματίδιο πρέπει να μηδενίζεται για να έχουμε ισορροπία, για να ικανοποιείται, δηλαδή, η κλασική συνθήκη ισορροπίας. Στο σημείο αυτό ίσως συλλογιστείτε ότι η ανάλυσή μας είναι μάλλον ανόητη. Ξεκινήσαμε από κάτι πολύ απλό, το μηδενισμό των δυνάμεων ως συνθήκη ισορροπίας, για να το επαναδιατυπώσουμε στην πολύ πιο σύνθετη μορφή: ο μηδενισμός των δυνατών έργων αποτελεί συνθήκη ισορροπίας. Η πορεία που ακολουθήσαμε είναι αντίστροφη από τη συνήθη διαδρομή που έχουμε μάθει να ακολουθούμε στη φυσική· συνήθως ξεκινώντας από ένα φαινόμενο που είναι πολύ σύνθετο προσπαθούμε να διατυπώσουμε αρχές όσο το δυνατόν πιο απλές που να περιγράφουν την ουσία του φαινομένου. Πρόκειται, όμως, για μια επαναδιατύπωση που με την ενσωμάτωση των "δυνάμεων" αδράνειας οδηγεί στην αρχή του Χάμιλτον –η οποία, όπως έχουμε δείξει, αποτελεί μια αρχή ευρύτερη από τους νόμους του Νεύτωνα– και επιπλέον μας δίνει τη δυνατότητα να συμπεριλάβουμε στο λαγκρανζιανό φορμαλισμό δεσμευμένες κινήσεις σωματιδίων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.1. *Σύμφωνα με τη σχέση (4.4) το διάνυσμα $\vec{F}_k$ είναι κάθετο σε κάθε $\delta\vec{x}_k$. (α) Δείξτε ότι το μόνο διάνυσμα που είναι κάθετο σε όλα τα διανύσματα είναι το μηδενικό. Σε αυτή την περίπτωση το $\delta\vec{x}_k$ ανήκει στον τρισδιάστατο διανυσματικό χώρο. (β) Αν το $\delta\vec{x}_k$ κείται σε ένα επίπεδο (ανήκει σε ένα δισδιάστατο διανυσματικό χώρο), είναι δηλαδή $\delta\vec{x}_k = \delta\lambda\,\vec{a} + \delta\mu\,\vec{b}$, όπου $\vec{a}$ και $\vec{b}$ σταθερά μη συγγραμμικά διανύσματα και τα $\delta\lambda$, $\delta\mu$ λαμβάνουν πραγματικές τιμές, τι συμπεραίνετε για τη δύναμη $\vec{F}_k$; Εκφράστε σε αυτή την περίπτωση τη δύναμη συναρτήσει των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. (γ) Τέλος, αν το $\delta\vec{x}_k$ κείται σε μία ευθεία (ανήκει σε ένα μονοδιάστατο χώρο), τι συμπεραίνετε για τη δύναμη $\vec{F}_k$; Ποια είναι η διάσταση του χώρου στον οποίο ανήκει η $\vec{F}_k$; (δ) Σε κάθε περίπτωση ποιο είναι το άθροισμα των διαστάσεων του χώρου στον οποίο ανήκει η $\vec{F}_k$ και το $\delta\vec{x}_k$ αν ικανοποιείται η (4.4); Μπορείτε να γενικεύσετε το συμπέρασμα σας όταν η δύναμη και οι μετατοπίσεις ανήκουν σε έναν n-διάστατο χώρο;*

4.3 Η αρχή του Χάμιλτον σε δεσμευμένη κίνηση

Σε τούτο το εδάφιο θα βασιστούμε στην αρχή του Χάμιλτον για να περιγράψουμε την εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος όταν αυτό υπόκειται σε κάποιους δεσμούς, εκμεταλλευόμενοι την αρχή του D' Alembert –η οποία δεν είναι τίποτε άλλο από μια ιδιόρρυθμη γραφή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα– και την άκρως "παρανοική", σε πρώτη ανάγνωση, συνθήκη ισορροπίας, την αρχή των δυνατών έργων.[2]

[2]Η πορεία που θα περιγράψουμε ακολουθεί αντίστροφα τα ιστορικά βήματα του Lagrange στην προσπάθειά του να απελευθερώσει τις εξισώσεις του Νεύτωνα από τις δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των συνδέσμων. Μολονότι τα βήματα του Lagrange οδηγούν, από φορμαλιστικής άποψης, στην αρχή του Χάμιλτον, απέχουν πολύ από το

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα σύστημα N σωματιδίων με μάζα m_i το καθένα, τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, ενώ παράλληλα ασκούνται σε αυτά και εξωτερικές δυνάμεις που προέρχονται από διάφορα πεδία. Προς το παρόν τα σωματίδια είναι ελεύθερα να κινούνται υπό την επίδραση των δυνάμεων χωρίς καμία δέσμευση. Συμβολίζουμε με V τη συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος έτσι ώστε η δύναμη που ασκείται στο i-οστό σωματίδιο που βρίσκεται στη θέση $\vec{x}_i$ να είναι

$$\vec{F}_i \equiv -\vec{\nabla}_i V = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \ . \tag{4.5}$$

Στο Κεφάλαιο 2 δείξαμε την ισοδυναμία μεταξύ του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα και της αρχής του Χάμιλτον, όταν γράψαμε τη μεταβολή της δράσης για το σύστημα των σωματιδίων σε πρώτη τάξη ως προς την παρέκκλιση ως

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{x}}_i + \vec{\nabla}_i V \right) \cdot \delta\vec{x}_i(t) \, dt = 0 \ , \tag{4.6}$$

Εάν το σωματίδιο δεν ήταν εδώ αλλά ήταν εκεί;

με $\delta\vec{x}_i(t_1) = \delta\vec{x}_i(t_2) = 0$. Οι μετατοπίσεις $\delta\vec{x}_i$ είναι οι λεγόμενες *νοητές μετατοπίσεις* (*virtual displacements*) που μετρούν την παρέκκλιση του συστήματος από τη φυσική διαδρομή και μολονότι απειροστές δεν έχουν καμία σχέση με πραγματική κίνηση του συστήματος. Οι νοητές μετατοπίσεις αφορούν σε ακαριαία μετατόπιση των σωματιδίων και δεν έχουν κάποιο χρονικό "πάχος". Πρόκειται για καθαρά υποθετικές μετατοπίσεις του φυσικού συστήματος στο *θεσεογραφικό χώρο* (configuration space). Ο χώρος αυτός είναι υπό μια έννοια ο φυσικός χώρος μέσα στον οποίο εξελίσσεται το σύστημα των σωματιδίων· είναι ο χώρος των θέσεων που καταλαμβάνει το σύστημα κάθε χρονική στιγμή. Αν το σύστημα αποτελείται από ένα μόνο σωματίδιο που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο, τότε ο θεσεογραφικός χώρος του συστήματος είναι ο τρισδιάστατος χώρος των τριών συντεταγμένων που χρειάζονται για να περιγράψουν τη θέση του σωματιδίου. Αν, όμως, το σύστημα αποτελείται από περισσότερα σωματίδια, τότε ο θεσεογραφικός χώρος έχει τόσες διαστάσεις όσες και οι συντεταγμένες που χρειάζονται για να περιγραφεί η θέση όλων των σωματιδίων. Το πλήθος αυτών των συντεταγμένων καλούνται *βαθμοί ελευθερίας* του συστήματος. Η εξέλιξη του συστήματος, δηλαδή η φυσική διαδρομή του, μπορεί να περιγραφεί με μια καμπύλη στο θεσεογραφικό χώρο, κάθε σημείο της οποίας αντιστοιχεί στη θέση όλων των σωματιδίων που απαρτίζουν το σύστημα τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Η καμπύλη αυτή μπορεί να παραμετροποιηθεί είτε μέσω του χρόνου είτε μέσω οποιασδήποτε

Ο θεσεογραφικός χώρος

τελικό δημιούργημα του Χάμιλτον, το οποίο κατέχει εξέχουσα θέση στο χώρο των μεγάλων ιδεών της φυσικής. Αυτός είναι και ο λόγος που προτιμήσαμε, σε αντίθεση με τα περισσότερα εγχειρίδια που πραγματεύονται το αντικείμενο της αναλυτικής μηχανικής, να μην ακολουθήσουμε στην παρουσίαση την ιστορική διαδρομή. Θα πρέπει, όμως, να σημειώσουμε ότι, εκτός από το τεχνικό ενδιαφέρον που παρουσιάζει η ιστορική κατασκευή των εξισώσεων Euler - Lagrange, οι ιδέες που κρύβονται πίσω από τον τρόπο κατασκευής τους εμπεριέχουν το σπόρο πολύ πιο γόνιμων φυσικών ιδεών, πράγμα το οποίο θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε στο παρόν κεφάλαιο.

άλλης παραμέτρου, η οποία μεταβάλλεται μονότονα κατά μήκος της καμπύλης, όπως, για παράδειγμα, το μήκος της καμπύλης. Παρόλο που σε απλές περιπτώσεις ο θεσεογραφικός χώρος είναι διαισθητικά προσιτός, σε πιο πολύπλοκες περιπτώσεις είναι δύσκολο να τον φανταστούμε. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ένα φυσικό σύστημα που αποτελείται από δύο σωματίδια που βρίσκονται στον τρισδιάστατο χώρο, απαιτούνται έξι συντεταγμένες για να προσδιοριστεί η θέση του συστήματος, οι $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$· αν όμως τα σωματίδια αυτά συνδέονται με μια στερεά αβαρή ράβδο, ο θεσεογραφικός χώρος γίνεται πενταδιάστατος, αφού για τον προσδιορισμό της θέσης του συστήματος απαιτούνται οι τρεις συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1) του ενός σωματιδίου και οι δύο γωνίες θ, ϕ που περιγράφουν την κατεύθυνση της ράβδου.

Αν τώρα επικαλεστούμε την αρχή του D' Alembert, η ποσότητα εντός της παρένθεσης στη σχέση (4.6) είναι το άθροισμα των πραγματικών δυνάμεων και των δυνάμεων αδράνειας (εκτός από ένα συνολικό αρνητικό πρόσημο),

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i + \vec{f}_i^{\,(A)} \right) \cdot \delta \vec{x}_i(t)\, dt = 0 \,. \tag{4.7}$$

Με βάση τα επιχειρήματα που παραθέσαμε στο Κεφαλαίο 1, για να ικανοποιείται η σχέση (4.7), πρέπει σε κάθε χρονική στιγμή t να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i + \vec{f}_i^{\,(A)} \right) \cdot \delta \vec{x}_i(t) = 0 \,. \tag{4.8}$$

Από την παραπάνω σχέση συνάγεται ότι, αν εκτελέσουμε κάποια νοητή μετατόπιση μόνο στο i-οστό σωματίδιο, η φυσική τροχιά του σωματιδίου αυτού πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\left(\vec{F}_i + \vec{f}_i^{\,(A)} \right) \perp \delta \vec{x}_i(t)$$

για κάθε απειροστή νοητή μετατόπιση $\delta \vec{x}_i(t)$. Όμως, το μόνο διάνυσμα που είναι κάθετο σε όλα τα διανύσματα του χώρου είναι το μηδενικό διάνυσμα. Έτσι η αρχή του Χάμιλτον, αν αγνοήσουμε το περίεργο φυσικό νόημα των δυνάμεων αδράνειας, λαμβάνει τη μορφή της αρχής των δυνατών έργων, όπου η "ισορροπία" του συστήματος στην οποία οδηγεί ο μηδενισμός της μεταβολής της δράσης δεν είναι τίποτε άλλο από την εξίσωση κίνησης του συστήματος

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i \equiv -\vec{f}_i^{\,(A)} = \vec{F}_i \,. \tag{4.9}$$

Τι συμβαίνει, όμως, αν τα σωματίδια δεν είναι ελεύθερα να κινηθούν υπό την επίδραση των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτά στον τρισδιάστατο χώρο; Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την περίπτωση κατά την οποία η κίνηση των σωματιδίων δεσμεύεται με κάποιο τρόπο· για παράδειγμα, τα σωματίδια μπορεί να είναι αναγκασμένα να κινούνται επάνω σε κάποια επιφάνεια ή οι αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων να πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες. Το ερώτημα που τίθεται είναι ποιες θα είναι τότε οι δυναμικές εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων; Ας εξετάσουμε κατ' αρχάς την περίπτωση μιας δέσμευσης που περιγράφεται από τη γενική χρονοεξαρτώμενη σχέση

$$h(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t) = 0 \; . \tag{4.10}$$

Οι νοητές μετατοπίσεις πρέπει να σέβονται τους επιβαλλόμενους περιορισμούς

Στην περίπτωση αυτή οι νοητές μετατοπίσεις του συστήματος $\delta\vec{x}_i(t)$ δεν είναι φυσικά τυχαίες, αλλά είναι τέτοιες ώστε το νοητά μετατοπισμένο σύστημα να εξακολουθεί να ικανοποιεί κάθε χρονική στιγμή το νόμο του δεσμού (4.10). Συνεπώς, η συνθήκη (4.8) που πρέπει να ικανοποιείται από τη φυσική κίνηση του συστήματος δεν συνεπάγεται την (4.9), αφού οι νοητές μετατοπίσεις $\delta\vec{x}_i(t)$ που υπεισέρχονται στην (4.8) δεν είναι αυθαίρετες. Αν εκτελέσουμε την απειροστή νοητή μετατόπιση $\delta\vec{x}_i$ στο εκάστοτε σωματίδιο, θα πρέπει κάθε χρονική στιγμή να ικανοποιείται ο δεσμός

$$h(\vec{x}_1 + \delta\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N + \delta\vec{x}_N, t) = 0 \; , \tag{4.11}$$

δεδομένου ότι οι νοητές μετατοπίσεις είναι εκ κατασκευής μετατοπίσεις στις θέσεις των σωματιδίων που αναφέρονται στην ίδια χρονική στιγμή. Η εξίσωση του δεσμού, αν αναπτυχθεί κατά Taylor, δίνει

$$\begin{aligned} & h(\vec{x}_1 + \delta\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N + \delta\vec{x}_N, t) = \\ & h(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t) + \sum_{i=1}^{N} \delta\vec{x}_i \cdot \vec{\nabla}_i h \; , \end{aligned} \tag{4.12}$$

όπου η βαθμίδα της h υπολογίζεται στο σημείο $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t)$. Συνεπώς, οι συμβατές με το δεσμό απειροστές νοητές μετατοπίσεις πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i h \cdot \delta\vec{x}_i = 0 \; . \tag{4.13}$$

Έτσι, όταν οι μετατοπίσεις υπόκεινται σε δεσμεύσεις, η συνθήκη στασιμότητας της δράσης (4.8) πρέπει να ικανοποιείται για εκείνες τις μετατοπίσεις που ικανοποιούν την (4.13). Οι συνθήκες (4.8) και (4.13) μπορούν να γραφούν πιο κομψά αν ορίσουμε τα διανύσματα σε ένα χώρο $3N$ διαστάσεων

$$\delta\vec{x} \equiv (\delta\vec{x}_1, \ldots, \delta\vec{x}_N) \; , \; \vec{\nabla} h \equiv \left(\vec{\nabla}_1 h, \ldots, \vec{\nabla}_N h\right) \; ,$$

και

$$\vec{N} \equiv \left(\vec{F}_1 + \vec{f}_1^{(A)}, \ldots, \vec{F}_N + \vec{f}_N^{(A)}\right) \; .$$

Ας ορίσουμε επίσης το εσωτερικό γινόμενο σε αυτόν το χώρο έτσι ώστε η (4.8) να λάβει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{N}_i \cdot \delta\vec{x}_i \equiv \vec{N} \cdot \delta\vec{x} = 0 \; , \tag{4.14}$$

και η (4.13) τη μορφή

$$\vec{\nabla} h \cdot \delta\vec{x} = 0 \; . \tag{4.15}$$

Αν θέλουμε, λοιπόν, να ισχύει η (4.14) για κάθε νοητή μετατόπιση που ικανοποιεί την (4.15), πρέπει το διάνυσμα $\vec{N}$ να είναι κάθετο σε όλες τις μετατοπίσεις, οι οποίες είναι κάθετες στο διάνυσμα $\vec{\nabla} h$. Συνεπώς, τα $\vec{N}$ και $\vec{\nabla} h$ πρέπει να είναι συνευθειακά, δηλαδή να υπάρχει αριθμός $\lambda(t)$ τέτοιος ώστε

$$\vec{N} = -\lambda(t)\vec{\nabla} h \,. \tag{4.16}$$

Ο αριθμός[3] $\lambda(t)$ που εκφράζει αυτή την αναλογία έχει γραφεί ως συνάρτηση του χρόνου, διότι ενδέχεται να μεταβάλλεται με το χρόνο δεδομένου ότι οι συνθήκες (4.14) και (4.15), αν ικανοποιούνται ταυτόχρονα σε κάθε χρονική στιγμή, εξασφαλίζουν απλώς την παραλληλία των εν λόγω διανυσμάτων. Λαμβάνοντας τις συνιστώσες της (4.16), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε σωματίδιο πρέπει να κινείται σύμφωνα με το δυναμικό νόμο

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i + \lambda(t)\vec{\nabla}_i h \,. \tag{4.17}$$

Ο νόμος του Νεύτωνα όταν τα σωματίδια δεσμεύονται

΄Ετσι, εάν η κίνηση των σωματιδίων μπορεί να προκύψει από την αρχή του Χάμιλτον και επιπλέον υπόκειται στο δεσμό $h = 0$, τότε το κάθε σωματίδιο θα κινηθεί σύμφωνα με το δυναμικό νόμο (4.17) στον οποίο, πέραν των γνωστών δυνάμεων που προέρχονται από δυναμικό, εμφανίζονται και δυνάμεις $\vec{N}_i$ που πρέρχονται από το δεσμό. Αυτές οι δυνάμεις είναι οι δυνάμεις των αντιδράσεων που εμφανίζονται έτσι ώστε να ικανοποιείται η δέσμευση και είναι κάθετες στην επιφάνεια του δεσμού (βλ. σχέσεις (4.15) και (4.16)). Η κατεύθυνση των δυνάμεων των αντιδράσεων, $\vec{N}_i$, που προβλέπεται από την αρχή του Χάμιλτον είναι τέτοια ώστε το συνολικό δυνατό έργο των δυνάμεων αυτών να είναι μηδενικό $\sum_i \vec{N}_i \cdot \delta x_i = 0$. Καταλήγουμε έτσι σε μια πιο ενδιαφέρουσα διατύπωση της αρχής των δυνατών έργων. Σύμφωνα με αυτή το διαφορικό έργο που εκτελείται από τις πραγματικές και τις αδρανειακές δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σύστημα σωματιδίων, όταν το σύστημα μετατοπίζεται νοητά ικανοποιώντας παράλληλα και τις επιβαλλόμενες δεσμεύσεις, είναι μηδενικό.

Εγείρεται ωστόσο το ερώτημα κατά πόσον οι αντιδράσεις που εμφανίζονται στη φύση παράγουν πράγματι μηδενικό δυνατό έργο. Αυτό παρατηρείται όταν η επαφή μεταξύ των μηχανικών συστημάτων δεν παρουσιάζει τριβή και προϋποθέτει ότι οι επιφάνειες επαφής των μηχανικών συστημάτων είναι *λείες* (*frictionless constraints*). Στις περιπτώσεις αυτές η αρχή του Χάμιλτον παράγει τις εξισώσεις κίνησης. Πρόκειται για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες, όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι δυνάμεις των αντιδράσεων είναι αποτέλεσμα κάποιου σκληρού δυναμικού, που για λογικά επίπεδα ενεργειών του συστήματος (θυμηθείτε τις αρχικές συνθήκες που θεωρήσαμε για το σωματίδιο που υποχρεούται να κινείται στο δάπεδο) επιβάλλει τις δεσμεύσεις.

Εάν η κίνηση του σωματιδίου πέραν της (4.10) δεσμεύεται να ικανοποιεί και κάποια άλλη εξίσωση δεσμού, την

$$g(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t) = 0 \,. \tag{4.18}$$

[3]Το πρόσημο στη παραπάνω σχέση έχει επιλεγεί έτσι ώστε η $\lambda(t)\vec{\nabla} h$ να αποκτήσει φυσικό νόημα. ΄Οπως θα δούμε παρακάτω αυτή είναι η δύναμη του συνδέσμου.

τότε, αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$$\vec{\nabla} g \equiv \left(\vec{\nabla}_1 g, \ldots, \vec{\nabla}_N g\right) ,$$

οι νοητές μετατοπίσεις πρέπει εκτός της (4.15) να ικανοποιούν και την

$$\vec{\nabla} g \cdot \delta\vec{x} = 0 , \tag{4.19}$$

όπου προφανώς η παραγώγιση λαμβάνεται και πάλι στο σημείο $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t)$. Σε αυτή την περίπτωση για να ισχύει η (4.14) για κάθε νοητή μετατόπιση που ικανοποιεί ταυτόχρονα και την (4.15) και την (4.19), θα πρέπει το διάνυσμα $\vec{N}$ να είναι κάθετο σε όλες τις μετατοπίσεις, οι οποίες με τη σειρά τους είναι κάθετες στα διανύσματα $\vec{\nabla} h$ και $\vec{\nabla} g$. Αυτό συμβαίνει όταν η $\vec{N}$ ανήκει στο γραμμικό χώρο που σχηματίζουν τα $\vec{\nabla} h$ και $\vec{\nabla} g$· με άλλα λόγια πρέπει να υπάρχουν $\lambda(t)$ και $\mu(t)$ τέτοια ώστε

$$\vec{N} = -\lambda(t)\vec{\nabla} h - \mu(t)\vec{\nabla} g . \tag{4.20}$$

Αναλύοντας το αριστερό σκέλος της (4.20), συνάγουμε ότι κάθε σωματίδιο πρέπει να ικανοποιεί το δυναμικό νόμο

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i + \lambda(t)\vec{\nabla}_i h + \mu(t)\vec{\nabla}_i g . \tag{4.21}$$

Ομοίως συμπεραίνουμε ότι, αν τα σωματίδια υποχρεώνονται να ικανοποιούν τις M δεσμεύσεις $h_k = 0$, για $k = 1, \ldots, M$, τότε οι εξισώσεις κίνησης θα λαμβάνουν τη μορφή

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^{M} \lambda_k(t)\vec{\nabla}_i h_k . \tag{4.22}$$

Η αντίδραση εξαιτίας του δεσμού

Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση διάφορων δεσμεύσεων του συστήματος εκτός από τη δύναμη που προέρχεται από το δυναμικό V σε κάθε σωματίδιο ασκούνται και οι δυνάμεις των αντιδράσεων

$$\vec{R}_i = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k(t)\vec{\nabla}_i h_k .$$

Ο δυναμικός νόμος (4.22), μολονότι προβλέπει την ύπαρξη νέων δυνάμεων που επιβάλλουν τις δεσμεύσεις, προσδιορίζει μόνο την κατεύθυνση των αντιδράσεων και όχι το μέγεθός τους. Ο προσδιορισμός του μεγέθους των αντιδράσεων απαιτεί την επίλυση των δυναμικών εξισώσεων και παράλληλα την εύρεση των τροχιών $\vec{x}_i(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_M)$ σε παραμετρική μορφή ως προς τα διάφορα $\lambda_k(t)$. Οι M παράμετροι $\lambda_k(t)$ προδιορίζονται στη συνέχεια από την απαίτηση οι θέσεις των σωματιδίων να ικανοποιούν κάθε στιγμή τις M δεσμεύσεις

$$h_k(\vec{x}_1(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_M), \ldots, \vec{x}_N(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_M)) = 0 .$$

Οι πολλαπλασιαστές $\lambda_k(t)$ ονομάζονται *πολλαπλασιαστές Lagrange*.

4.4 Παράδειγμα προσδιορισμού της δεσμευμένης κίνησης σωματιδίου

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη διαδικασία προσδιορισμού της κίνησης και των δυνάμεων αντίδρασης από τους δεσμούς, ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται στο ομογενές πεδίο βαρύτητας, αλλά παράλληλα είναι υποχρεωμένο να βρίσκεται συνεχώς στο κινούμενο κεκλιμένο επίπεδο (βλ. Σχήμα 4.3)

Ολίσθηση σε κινούμενο κεκλιμένο επίπεδο

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1 + t \ , \tag{4.23}$$

Θεωρούμε ότι ο άξονας z έχει κατακόρυφη διεύθυνση. Θα προσδιορίσουμε την κίνηση του σωματιδίου και τις αντιδράσεις που ασκούνται στο σωματίδιο από το επίπεδο.

Ο δεσμός της κίνησης του σωματιδίου δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(\vec{x}, t) = \alpha x + \beta y + \gamma z - 1 - t = 0 \ , \tag{4.24}$$

οπότε το $\vec{\nabla} h$ έχει συνιστώσες $\vec{\nabla} h = (\alpha, \beta, \gamma)$. Ταυτόχρονα η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου είναι

$$L = \frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 - mgz \ ,$$

ενώ οι εξισώσεις κίνησης του δεσμευμένου σωματιδίου σύμφωνα με την (4.22) είναι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda(t)\alpha \ , \\ m\ddot{y} &= \lambda(t)\beta \ , \\ m\ddot{z} &= \lambda(t)\gamma - mg \ . \end{aligned} \tag{4.25}$$

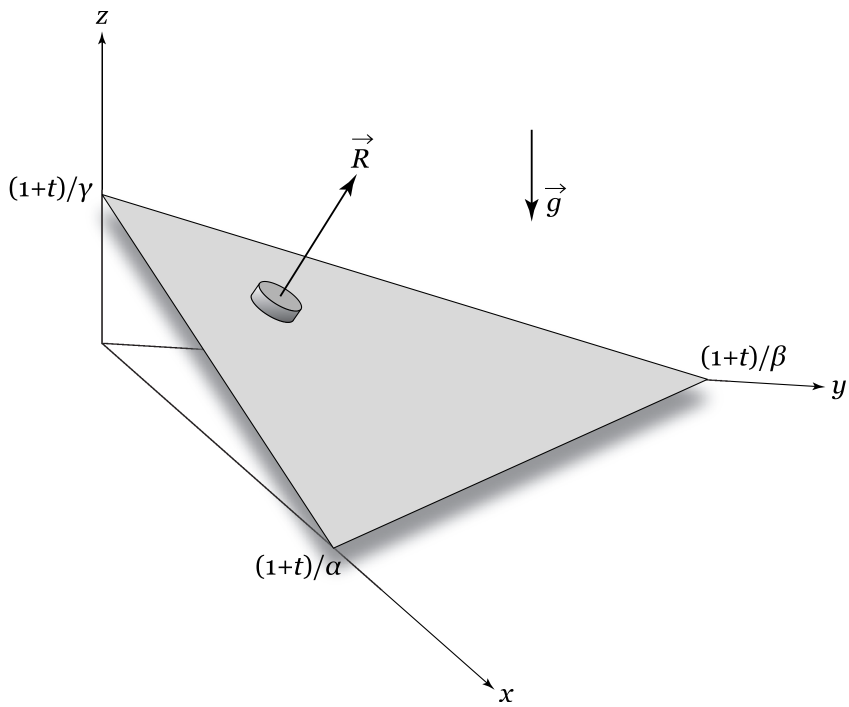
Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η αντίδραση που ασκείται στο σωματίδιο από το κεκλιμένο επίπεδο είναι

$$\vec{R} = \lambda(t) \vec{\nabla} h = \lambda(t)(\alpha, \beta, \gamma) \ .$$

Παρατηρούμε ότι η αντίδραση είναι κάθετη στο επίπεδο $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1 + t$.

Ο πολλαπλασιαστής $\lambda(t)$ θα προσδιοριστεί από την απαίτηση να ικανοποιείται σε κάθε χρονική στιγμή η εξίσωση του συνδέσμου (4.24). Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε το $\lambda(t)$ επιλύοντας τις εξισώσεις κίνησης παραμετρικά ως προς $\lambda(t)$ και στη συνέχεια απαιτώντας το $\lambda(t)$ να είναι τέτοιο ώστε η κίνηση του σωματιδίου να ικανοποιεί σε κάθε χρονική στιγμή την (4.24). Όμως, αυτός ο τρόπος προσδιορισμού του $\lambda(t)$ είναι επίπονος οπότε ειδικά για την εν λόγω κίνηση του επιπέδου θα εργαστούμε ως εξής: επειδή σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει $h = 0$, θα ισχύει επίσης ότι $dh/dt = 0$, αλλά και $d^2h/dt^2 = 0$. Έτσι, οι επιταχύνσεις θα ικανοποιούν πάντοτε τη σχέση

$$\alpha \ddot{x} + \beta \ddot{y} + \gamma \ddot{z} = 0 \ .$$



Σχήμα 4.3: Ένα σωματίδιο ολισθαίνει επάνω στο κινούμενο επίπεδο $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1 + t$. Πώς θα κινηθεί το σωματίδιο και ποια θα είναι η αντίδραση που θα ασκηθεί στο σωματίδιο από το επίπεδο;

Αντικαθιστώντας τις επιταχύνσεις μέσω των εξισώσεων κίνησης (4.25), βρίσκουμε ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange $\lambda(t)$ είναι

$$\lambda(t) = \frac{mg\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \, .$$

Σε αυτή την περίπτωση, επειδή η κίνηση του επιπέδου είναι ομαλή, ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι χρονοανεξάρτητος και η αντίδραση του επιπέδου στο σωματίδιο είναι

$$\vec{R} = \lambda \vec{\nabla} h = \frac{mg\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \; (\alpha, \beta, \gamma) \, .$$

Παρατηρούμε ότι η αντίδραση είναι αυτή που θα είχαμε αν το επίπεδο του προβλήματός μας ήταν ένα σταθερό κεκλιμένο επίπεδο. (Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση γι' αυτό; Σκεφτείτε αν το σύστημα του κεκλιμένου επιπέδου είναι αδρανειακό.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.2. *Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις γνώσεις νευτώνειας μηχανική επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα του παραδείγματος για την ολίσθηση ενός σωματιδίου στο κεκλιμένο επίπεδο $\alpha x + \gamma z = 1$ μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας.*

Όπως διαπιστώνουμε, η απαίτηση να προκύπτει η κίνηση του σωματιδίου από την εφαρμογή της αρχής του Χάμιλτον οδήγησε όχι μόνο σε μια νέα δύναμη, την αντίδραση του συνδέσμου, αλλά και σε συγκεκριμένη μορφή γι' αυτή τη δύναμη

$$\vec{R} = \lambda(t)\vec{\nabla}h \ . \tag{4.26}$$

Με άλλα λόγια προκύπτει ότι η αντίδραση είναι κάθετη στη συνθήκη δέσμευσης $h = 0$. Θυμηθείτε ότι αυτό προέκυψε από την απαίτηση οι νοητές μετατοπίσεις να ικανοποιούν την εξίσωση του δεσμού (4.23).

4.5 Διευρυμένη διατύπωση της αρχής του Χάμιλτον

Στο προηγούμενο εδάφιο χειριστήκαμε τους δεσμούς του φυσικού συστήματος ως δεσμεύσεις στις επιτρεπτές νοητές μετατοπίσεις κατά την επιβολή της αρχής του Χάμιλτον στο ελεύθερο από δεσμούς φυσικό σύστημα. Στο παρόν εδάφιο θα προσπαθήσουμε να ενσωματώσουμε στην αρχή του Χάμιλτον τους δεσμούς κατασκευάζοντας μια νέα Λαγκρανζιανή του συστήματος. Αν και η τεχνική αυτή μοιάζει περισσότερο με μαθηματικό τέχνασμα, είναι στην ουσία παρόμοια με τη φυσική μέθοδο που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο όταν κατασκευάσαμε νέα υποθετικά δυναμικά, τα οποία επέβαλαν με τεχνητό τρόπο τους δεσμούς. (Θυμηθείτε τα σκληρά ελατήρια που ανάγκαζαν το σώμα να κινείται επί του επιπέδου $z = 0$ στο Εδάφιο 3.5!)

Ας εξετάσουμε άλλη μια φορά το πρόβλημα προσδιορισμού της κίνησης N σωματιδίων υπό την επίδραση δυνάμεων, που προέρχονται από το δυναμικό V, τα οποία δεσμεύονται να ικανοποιούν τις M σχέσεις

$$h_i(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, t) = 0 \ , \ \text{για } i = 1, \ldots, M. \tag{4.27}$$

Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε τη Λαγκρανζιανή

Προσθέτοντας στη Λαγκρανζιανή τους δεσμούς ανώδυνα αλλά έξυπνα

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2 - V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j(t) h_j \ , \tag{4.28}$$

η οποία αριθμητικά δεν διαφέρει από τη Λαγκρανζιανή του αδέσμευτου συστήματος, αφού έχουμε προσθέσει σε αυτήν M μηδενικά (βλ. σχέση (4.27)). Ξεχνάμε τώρα ότι πρέπει να ικανοποιούνται οι δεσμοί (4.27) και θεωρούμε το φυσικό σύστημα που διέπεται από τη Λαγκρανζιανή της έκφρασης (4.28), η οποία είναι συνάρτηση των θέσεων $\vec{x}_i$, των ταχυτήτων $\dot{\vec{x}}_i$ και των νέων μεταβλητών λ_j. Προτείνουμε ως νέα αρχή του Χάμιλτον την ακόλουθη: η φυσική κίνηση είναι αυτή που καθιστά τη δράση που παράγεται από τη Λαγκρανζιανή (4.28)) στάσιμη ως προς ανεξάρτητες μεταβολές των θέσεων των σωματιδίων $\vec{x}_i$ κατά $\delta\vec{x}_i$ και των μεταβλητών $\lambda_j(t)$ κατά $\delta\lambda_j(t)$, με μόνη απαίτηση οι μεταβολές των θέσεων $\delta\vec{x}_i$ να είναι μηδενικές στην αρχική και την τελική χρονική στιγμή. Θα δείξουμε ότι αυτή η νέα αρχή του Χάμιλτον παράγει τις εξισώσεις κίνησης των δεσμευμένων σωματιδίων.

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange ως προς τα λ παράγουν τους δεσμούς...

Πράγματι, η πρώτης τάξης μεταβολή της δράσης δS πρέπει να μηδενίζεται για μεταβολές των $\lambda_j(t)$ κατά $\delta\lambda_j(t)$ οπότε η φυσική κίνηση πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{M} \delta\lambda_j(t) h_j dt = 0 \ ,$$

για κάθε $\delta\lambda_j(t)$. Ο μόνος τρόπος για να ικανοποιείται η παραπάνω σχέση για κάθε $\delta\lambda_j(t)$ είναι να ικανοποιούνται όλες οι εξισώσεις των δεσμών

$$h_j(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N, t) = 0 \ , \ \text{για } j = 1, \ldots, M.$$

Με άλλα λόγια η στασιμότητα της δράσης ως προς τις μεταβολές των $\lambda_j(t)$ επιβάλλει την ικανοποίηση των δεσμεύσεων κατά την κίνηση.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με τις μεταβολές των θέσεων των σωματιδίων. Η στασιμότητα της δράσης ως προς αυτές τις μεταβολές οδηγεί στις ακόλουθες σχέσεις:

...και ως προς τις συντεταγμένες δίνουν τις εξισώσεις κίνησης μαζί με τις αντιδράσεις

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \left(m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \delta\dot{\vec{x}}_i(t) - \vec{\nabla}_i V \cdot \delta\vec{x}_i(t) + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j(t) \vec{\nabla}_i h_j \cdot \delta\vec{x}_i(t) \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \left(-m_i \ddot{\vec{x}}_i - \vec{\nabla}_i V + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j(t) \vec{\nabla}_i h_j \right) \cdot \delta\vec{x}_i(t) dt \ . \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση, ως συνήθως, προκύπτει κατόπιν ολοκλήρωσης κατά μέρη και εφαρμογής της συνθήκης $\delta\vec{x}_i(t_1) = \delta\vec{x}_i(t_2) = 0$. Η ικανοποίηση της παραπάνω σχέσης για αυθαίρετες νοητές μετατοπίσεις, $\delta\vec{x}_i$, οδηγεί σε φυσική κίνηση, η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = -\vec{\nabla}_i V + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j(t) \vec{\nabla}_i h_j \ ,$$

που δεν είναι άλλες από τις εξισώσεις (4.22) που προέκυψαν από την κλασική Λαγκρανζιανή με δεσμευμένες νοητές μετατοπίσεις. Το άθροισμα που εμφανίζεται στο δεξιό σκέλος είναι το σύνολο των αντιδράσεων εξαιτίας όλων των επί μέρους δεσμών.

Με την εισαγωγή των πολλαπλασιαστών Lagrange στη Λαγκρανζιανή η διευρυμένη αρχή του Χάμιλτον οδηγεί συγχρόνως στην εύρεση των εξισώσεων κίνησης και των δεσμεύσεων που πρέπει να ικανοποιεί η κίνηση. Η τεχνική αυτή εισήχθη από τον Lagrange και η εφαρμογή της στην εύρεση των στάσιμων τιμών των συναρτήσεων και των συναρτησοειδών παρουσιάζεται στο Μαθηματικό Παράρτημα. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η τεχνική αυτή δεν αποτελεί απλά ένα κομψό τέχνασμα αλλά έχει βαθειά φυσική σημασία, όπως συμβαίνει συνήθως με όλες τις μη τετριμμένες μαθηματικές θεωρήσεις. Η τεχνική αυτή βρίσκει εφαρμογή στις διάφορες θεωρίες πεδίου στις οποίες οι πολλαπλασιαστές Lagrange, λ, αποκτούν φυσική οντότητα ως νέα πεδία που απαιτούνται για την ικανοποίηση των συμμετριών της φύσης ή άλλων επιβεβλημένων συνθηκών. Με αυτή τη μέθοδο μπορούν να εισαχθούν οι πηγές (τα ρεύματα) σε ένα ελεύθερο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ενώ στην υδροδυναμική των ιδανικών ρευστών το πεδίο της πίεσης του ρευστού είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange που πρέπει να εισαχθεί ούτως ώστε να ικανοποιείται ανά πάσα στιγμή η συνέχεια του ρευστού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.3. *Θεωρήστε ένα μαθηματικό εκκρεμές στο χώρο. Η θέση της μάζας του εκκρεμούς δεσμεύεται από τη συνθήκη*

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a.$$

Η κίνηση του εκκρεμούς προσδιορίζεται από δύο βαθμούς ελευθερίας στο ρόλο των οποίων μπορούμε να επιλέξουμε τη γωνία θ που σχηματίζει το νήμα του εκκρεμούς με την κατακόρυφο ημιευθεία που διέρχεται από το σημείο ανάρτησης του εκκρεμούς και την αζιμουθιακή γωνία ϕ. Επιλέγοντας ως τρίτη συντεταγμένη την απόσταση της μάζας από το σημείο ανάρτησης $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ συνάγουμε ότι η δέσμευση στην κίνηση είναι $r - a = 0$, ενώ η κίνηση διέπεται από τη Λαγκρανζιανή

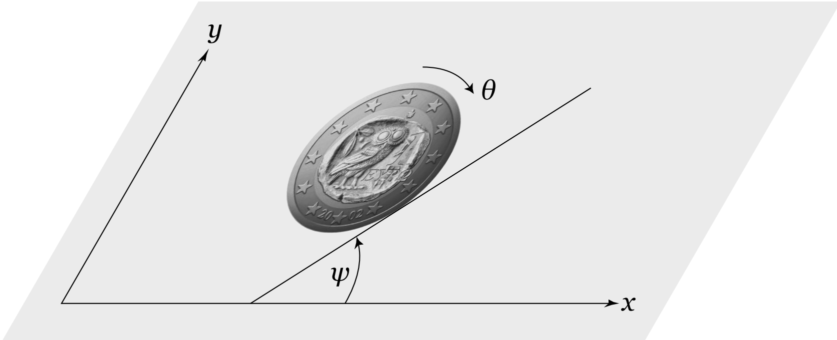
$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}_1^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2\right) + mgr\cos\theta + \lambda(r - a).$$

Προσδιορίστε τη δύναμη που ασκείται στη μάζα του εκκρεμούς από το νήμα καθώς και τις εξισώσεις κίνησης του εκκρεμούς.

4.6 Ολόνομοι και μη ολόνομοι δεσμοί

Δείξαμε ότι, εάν η κίνηση των σωματιδίων περιορίζεται από κάποια συναρτησιακή σχέση μεταξύ των συντεταγμένων που ορίζουν τη θέση των σωματιδίων στο χώρο, τότε η φυσική κίνησή τους μπορεί να προσδιοριστεί είτε από τη Λαγκρανζιανή $L = T - V$, όπου η κινητική και η δυναμική ενέργεια εκφράζονται ως συνάρτηση των ελεύθερων συντεταγμένων του συστήματος στις οποίες όμως έχουν ληφθεί υπόψη οι περιορισμοί, είτε από την ίδια Λαγκρανζιανή προσαυξημένη κατά τις συναρτήσεις των δεσμών μέσω κάποιων πολλαπλασιαστών Lagrange. Δεσμοί της μορφής $h(q_i, t) = 0$, όπου h κάποια συνάρτηση των συντεταγμένων q_i και ίσως και του χρόνου, καλούνται *ολόνομοι δεσμοί*. Το πλήθος των ανεξάρτητων συντεταγμένων που απαιτούνται για να προσδιοριστεί η θέση του συστήματος, αφού έχουν ληφθεί υπόψη οι περιορισμοί της κίνησης, είναι οι πραγματικοί βαθμοί ελευθερίας του φυσικού συστήματος. Έτσι ένα ελεύθερο σωματίδιο στο χώρο έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας· όταν, όμως, το σωματίδιο υπόκειται στο δεσμό $r = a + ct$ (θεωρούμε σφαιρικές συντεταγμένες) με a, c σταθερές, όταν δηλαδή αυτό υποχρεώνεται να κινηθεί σε μια σφαίρα μεταβαλλόμενης ακτίνας, τότε το σωματίδιο αυτό έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, την πολική και την αζιμουθιακή γωνία που

Ολόνομοι δεσμοί: όταν οι συντεταγμένες του συστήματος συνδέονται μεταξύ τους μέσω μιας συναρτησιακής σχέσης



Σχήμα 4.4: Το επίπεδο του νομίσματος είναι κάθετο στο επίπεδο $x-y$. Το νόμισμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει επάνω στο επίπεδο $x-y$, κινούμενο στιγμιαία κατά τη διεύθυνση της ευθείας, η οποία σχηματίζει γωνία ψ με τον άξονα x. Κάθε σημείο στην περιφέρεια του νομίσματος προσδιορίζεται από τη γωνία θ κατά την οποία έχει περιστραφεί γύρω από τον άξονά του συνολικά το νόμισμα.

προσδιορίζουν σε κάθε χρονική στιγμή τη θέση του επάνω στη συγκεκριμένη σφαιρική επιφάνεια. Ωστόσο δεν είναι δυνατόν όλοι οι δεσμοί να λάβουν τέτοια μορφή. Υπάρχουν δεσμοί, οι οποίοι δεν μπορούν να γραφούν στη μορφή $h(q_i, t) = 0$, όπως για παράδειγμα εκείνοι που επιβάλλουν σε ένα σωματίδιο να κινείται στην περιοχή $z \leq 0$. Τέτοιου είδους δεσμοί καλούνται *μη ολόνομοι δεσμοί*. Ένα άλλο παράδειγμα μη ολόνομου δεσμού έχουμε όταν οι ταχύτητες υπόκεινται σε τέτοια δέσμευση, ώστε να μην μπορούν να ολοκληρωθούν οι σχέσεις δέσμευσης των συντεταγμένων για να καταλήξουν σε μια ολοκληρωτική σχέση μεταξύ των συντεταγμένων.

Το κυλιόμενο νόμισμα χαρακτηριστικό παράδειγμα μη ολόνομου δεσμού

Το πιο κοινό παράδειγμα μη ολόνομου δεσμού είναι η περίπτωση ενός νομίσματος που κυλίεται επάνω σε επίπεδο δάπεδο (βλ. Σχήμα 4.4). Ας θεωρήσουμε ότι ένα νόμισμα ακτίνας a παραμένει κατακόρυφο,[4] ενώ κυλίεται επάνω στην επιφάνεια του δαπέδου χωρίς να ολισθαίνει. Η θέση του νομίσματος προσδιορίζεται γενικά από το σημείο επαφής του νομίσματος με το δάπεδο (x, y), τη γωνία ψ που σχηματίζει το κατακόρυφο επίπεδο του νομίσματος με τον άξονα x και τη γωνία κύλισης θ γύρω από τον άξονα του νομίσματος. Από τις τέσσερις συντεταγμένες (x, y, ψ, θ) που απαιτούνται για τον προσδιορισμό της θέσης του νομίσματος μόνο δύο είναι πραγματικά ανεξάρτητες. Η συνθήκη κύλισης του νομίσματος συνεπάγεται τις δύο ακόλουθες σχέσεις:

$$dx = a \cos\psi \, d\theta \; , \; dy = a \sin\psi \, d\theta \; . \tag{4.29}$$

Είναι δυνατόν να ολοκληρώσουμε αυτές τις σχέσεις ώστε να εκφράσουμε δύο οποιεσδήποτε συντεταγμένες συναρτήσει των άλλων; Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν να ισχύει. Έστω ότι υπάρχουν συναρτήσεις

$$\psi = g(x, y) \text{ και } \theta = h(x, y) \; .$$

[4] Η παραδοχή ότι το νόμισμα παραμένει κατακόρυφο είναι προβληματική, διότι, εάν το νόμισμα εκτελεί καμπύλη τροχιά, τότε για να ισορροπεί πρέπει το επίπεδό του να μην είναι κατακόρυφο· κάτι ανάλογο συμβαίνει με το μοτοσυκλετιστή όταν στρίβει. Το συμπέρασμα βέβαια, όσον αφορά στο χαρακτήρα του δεσμού, δεν αλλάζει.

Είναι αδύνατον, όμως, να υπάρξει τέτοια συνάρτηση $g(x, y)$. Για κάθε σημείο επαφής του νομίσματος με το δάπεδο μπορούμε να στρέψουμε το επίπεδο του νομίσματος σε οποιαδήποτε γωνία ψ· ως εκ τούτου η γωνία ψ δεν μπορεί να είναι συνάρτηση των x, y. Ούτε όμως και τέτοια συνάρτηση $h(x, y)$ μπορεί να υπάρχει. Για να το αποδείξουμε αυτό, ας θεωρήσουμε την κίνηση του νομίσματος κατά μήκος της ευθύγραμμης τροχιάς $\psi = \psi_0$ με αρχική γωνία κύλισης $\theta = 0$. Το νόμισμα κυλίεται κατά γωνία θ_0, σταματά, στρέφεται γύρω από την κατακόρυφη διάμετρό του κατά π και επανέρχεται κυλιόμενο στην αρχική του θέση, στο σημείο εκκίνησής του. Σε αυτό το σημείο το νόμισμα θα έχει περιστραφεί κατά γωνία $-2\theta_0$ και έτσι στο ίδιο σημείο θα αντιστοιχούν δύο γωνίες θ, η 0 και η $-2\theta_0$. Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν η θ να είναι συνάρτηση των x, y.

Ενώ για ολόνομους δεσμούς η φυσική κίνηση και οι αντιδράσεις μπορούν να προκύψουν, όπως είδαμε, από τη διευρυμένη αρχή του Χάμιλτον με την επαυξημένη Λαγκρανζιανή (4.28) στην οποία εμφανίζονται οι δεσμοί σε ολοκληρωμένη μορφή, η διευρυμένη αυτή αρχή δεν μπορεί, εν γένει, να εφαρμοστεί όταν οι δεσμοί δεν είναι ολόνομοι. Στην περίπτωση, βέβαια, που το φυσικό σύστημα περιορίζεται από μη ολόνομους δεσμούς που δίνονται σε διαφορική μορφή, όπως αυτοί για την κυλιόμενη κίνηση άνευ ολίσθησης (4.29), η διαδικασία που ακολουθήσαμε στο εδάφιο 4.3 είναι δυνατόν να οδηγήσει σε προσδιορισμό και της κίνησης και των αντιδράσεων. Ας εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο για να προσδιορίσουμε την κίνηση του κυλιόμενου νομίσματος.

Η λαγκρανζιανή συνάρτηση του νομίσματος είναι

$$L = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) , \tag{4.30}$$

όπου I_0 είναι η ροπή αδράνειας του νομίσματος γύρω από τον άξονα συμμετρίας κάθετα στο επίπεδο του νομίσματος, I_1 η ροπή αδράνειας αυτού για περιστροφές γύρω από μια διάμετρό του, m η μάζα του νομίσματος και (x, y) οι συντεταγμένες του κέντρου του νομίσματος. Οι γωνίες θ και ψ είναι αυτές που παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.4. Η έκφραση της παραπάνω Λαγκρανζιανής είναι η έκφραση της συνολικής κινητικής ενέργειας του νομίσματος που είναι το άθροισμα της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας και της περιστροφικής κινητικής ενέργειας του νομίσματος.

Η συνθήκη στασιμότητας της δράσης που προκύπτει από τη Λαγκρανζιανή (4.30) για νοητές μετατοπίσεις δx, δy, $\delta\theta$ και $\delta\psi$ είναι

$$I_0 \ddot{\theta}\, \delta\theta + I_1 \ddot{\psi}\, \delta\psi + m\ddot{x}\, \delta x + m\ddot{y}\, \delta y = 0 , \tag{4.31}$$

και σύμφωνα με αυτή το διάνυσμα των νοητών μετατοπίσεων $(\delta\theta, \delta\psi, \delta x, \delta y)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $(I_0\ddot{\theta}, I_1\ddot{\psi}, m\ddot{x}, m\ddot{y})$, δηλαδή

$$(I_0\ddot{\theta}, I_1\ddot{\psi}, m\ddot{x}, m\ddot{y}) \perp (\delta\theta, \delta\psi, \delta x, \delta y) . \tag{4.32}$$

Οι νοητές μετατοπίσεις, όμως, ικανοποιούν τις συνθήκες (4.29)

$$\delta x - a\cos\psi\, \delta\theta = 0 , \ \delta y - a\sin\psi\, \delta\theta = 0 , \tag{4.33}$$

οι οποίες επιβάλλουν στις νοητές μετατοπίσεις $(\delta\theta, \delta\psi, \delta x, \delta y)$ να είναι κάθετες στα διανύσματα

$$(-a\cos\psi, 0, 1, 0) \text{ και } (-a\sin\psi, 0, 0, 1)\ . \tag{4.34}$$

Συνεπώς, αφού το διάνυσμα

$$(I_0\ddot{\theta}, I_1\ddot{\psi}, m\ddot{x}, m\ddot{y})$$

ικανοποιεί την (4.32) για κάθε νοητή μετατόπιση συμβατή με το δεσμό, πρέπει να ανήκει στον υποχώρο που σχηματίζεται από τα διανύσματα της έκφρασης (4.34). Δηλαδή, πρέπει να είναι

$$(I_0\ddot{\theta}, I_1\ddot{\psi}, m\ddot{x}, m\ddot{y}) = \lambda(-a\cos\psi, 0, 1, 0) + \mu(-a\sin\psi, 0, 0, 1)\ ,$$

οπότε οι εξισώσεις κίνησης διαμορφώνονται ως εξής:

$$I_0\ddot{\theta} = -\lambda a\cos\psi - \mu a\sin\psi, \tag{4.35}$$
$$I_1\ddot{\psi} = 0, \tag{4.36}$$
$$m\ddot{x} = \lambda, \tag{4.37}$$
$$m\ddot{y} = \mu. \tag{4.38}$$

Για να προσδιορίσουμε την κίνηση του νομίσματος διαιρούμε τις εκφράσεις (4.29) με τον απειροστό χρόνο στον οποίο πραγματοποιούνται οι απειροστές μεταβολές των συντεταγμένων, οπότε λαμβάνουμε τις σχέσεις

$$a\cos\psi = \dot{x}/\dot{\theta} \text{ και } a\sin\psi = \dot{y}/\dot{\theta}\ . \tag{4.39}$$

Εάν αντικαταστήσουμε αυτές τις εκφράσεις στην εξίσωση κίνησης (4.35) και χρησιμοποιήσουμε και τις εξισώσεις (4.37, 4.38), καταλήγουμε στην εξίσωση

$$I_0\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\lambda\dot{x} - \mu\dot{y} = -m\left(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}\right)\ . \tag{4.40}$$

Η διαφορική εξίσωση (4.40) ολοκληρώνεται αμέσως και δίνει τη διατήρηση της ποσότητας

$$\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = E_1\ , \tag{4.41}$$

κατά την κίνηση του νομίσματος. Από τη συνθήκη κύλισης (4.39) συνάγουμε επιπλέον ότι

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\dot{\theta}^2\ ,$$

οπότε η (4.41) μετατρέπεται στην ακόλουθη σχέση:

$$\frac{1}{2}\left(I_0 + ma^2\right)\dot{\theta}^2 = E_1\ .$$

Η εξίσωση αυτή συνεπάγεται ότι το νόμισμα κυλίεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, $\dot{\theta} = \omega$, οπότε η γωνία κύλισης είναι

$$\theta(t) = \omega t + \theta(0)\ .$$

Από την (4.36) προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από την κατακόρυφο διάμετρο είναι επίσης σταθερή

$$\dot{\psi} = \Omega$$

και συνεπώς

$$\psi(t) = \Omega t + \psi(0) \ .$$

Έχοντας προσδιορίσει την εξέλιξη των γωνιών στροφής, προσδιορίζουμε αμέσως την κίνηση του κέντρου μάζας ολοκληρώνοντας τις σχέσεις (4.39)

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + a\frac{\omega}{\Omega}\left[\sin(\psi(0)+\Omega t) - \sin(\psi(0))\right] \ , \\ y(t) &= y(0) + a\frac{\omega}{\Omega}\left[\cos(\psi(0)) - \cos(\psi(0)+\Omega t)\right] \ . \end{aligned}$$

Η τροχιά, λοιπόν, που διαγράφει το κέντρο μάζας είναι κυκλική

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 = a^2\frac{\omega^2}{\Omega^2} \ ,$$

με κέντρο το σημείο (x_0, y_0) όπου

$$x_0 = x(0) - a\frac{\omega}{\Omega}\sin(\psi(0)) \ , \ y_0 = y(0) + a\frac{\omega}{\Omega}\cos(\psi(0)) \ ,$$

και ακτίνα $a\omega/\Omega$. Η κυκλική αυτή τροχιά διαγράφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω.

Από τις (4.37) και (4.38) μπορούν να υπολογιστούν οι πολλαπλασιαστές λ και μ, οι οποίοι προσδιορίζουν και τις αντιδράσεις που υποχρεώνουν το νόμισμα να εκτελεί κυκλική κίνηση. Οι αντιδράσεις είναι

$$\lambda = -ma\omega\Omega\sin[\psi(0) + \Omega t] \ , \ \mu = ma\omega\Omega\cos[\psi(0) + \Omega t] \ .$$

Οι αντιδράσεις αυτές είναι οι συνιστώσες της κεντρομόλου δύναμης η οποία είναι κάθετη στην ταχύτητα του νομίσματος. Αυτή η φυγόκεντρος δύναμη ασκείται από το δάπεδο και είναι υπεύθυνη για το γεγονός ότι το νόμισμα δεν ολισθαίνει στην κατεύθυνση την κάθετη στην κυκλική του τροχιά. Η ίδια η κύλιση του νομίσματος, για να πραγματοποιηθεί, δεν απαιτεί καμία δύναμη και εξασφαλίζεται από τη μορφή της κίνησης, αφού η ταχύτητα με την οποία διαγράφεται η κυκλική τροχιά ισούται με τη γωνιακή ταχύτητα κύλισης επί την ακτίνα του νομίσματος.

Άσκηση 4.4. *Εξειδικεύστε και προσδιορίστε την κίνηση του νομίσματος και την αντίδραση που ασκείται σε αυτό, όταν (i) το νόμισμα κυλίεται αλλά δεν περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα ($\Omega = 0$) και (ii) όταν περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα αλλά δεν κυλίεται ($\omega = 0$).* ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.7 Φαινόμενες δυνάμεις σε ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς και η αρχή της ισοδυναμίας

΄Οπως αναφέραμε και σε προηγούμενο εδάφιο η ιδέα του D' Alembert οδήγησε τον Lagrange μέσω της αρχής των δυνατών έργων στις εξισώσεις Euler - Lagrange. Η μετατροπή ενός προβλήματος δυναμικής σε ένα πρόβλημα στατικής, τουλάχιστον φορμαλιστικά, δεν φαίνεται να περικλείει τίποτε βαθύτερο από μια απλή επαναδιατύπωση του δυναμικού νόμου του Νεύτωνα με τη μορφή της αρχής του Χάμιλτον. Δεν μπορούμε βέβαια να παραβλέψουμε τη σπουδαιότητα αυτής της αρχής, την οποία έχουμε αναλύσει εκτενώς, όσον αφορά στη νέα θεώρηση της φυσικής που αυτή εισάγει. Πρόκειται για ένα επίτευγμα, η σημασία του οποίου αναγνωρίστηκε αρκετά αργότερα από τον Hamilton.[5] Πέρα όμως από αυτό η ιδέα ότι σε ένα σωματίδιο ασκείται μια νέα "δύναμη", η δύναμη της αδράνειας, η οποία δρα όπως όλες οι πραγματικές δυνάμεις με αποτέλεσμα όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο να βρίσκονται σε ισορροπία, κρύβει κάτι επαναστατικό.

Η αρχή του D' Alembert δεν αναφέρεται σε κάποιο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς· ισχύει σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Από την άλλη πλευρά στη διατύπωση της αρχής του D' Alembert η δύναμη της αδράνειας ορίστηκε ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ και επομένως εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς. Αν θεωρήσουμε ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς Σ', το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{u}(t)$ ως προς το αρχικό αδρανειακό σύστημα Σ, έτσι ώστε η θέση των σωματιδίων $\vec{r}\,'$ να δίνεται από τη σχέση

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \int^t \vec{u}(\tau)d\tau \ ,$$

η δύναμη αδράνειας που θα αποδίδεται στο σώμα στο σύστημα Σ' θα είναι

$$\vec{f}^{\,(A)\prime} = -m\ddot{\vec{r}}\,' = \vec{f}^{\,(A)} + m\vec{a} \ ,$$

όπου $\vec{a} = d\vec{u}/dt$ η στιγμαία επιτάχυνση του Σ' ως προς το Σ. Αν η αρχή του D' Alembert στο αρχικό σύστημα Σ επέβαλλε την "ισορροπία"

$$\vec{F} + \vec{f}^{\,(A)} = \vec{0} \ ,$$

στο νέο σύστημα Σ' η "ισορροπία" θα αποκτούσε τη μορφή

$$\vec{F} + \vec{\phi} + \vec{f}^{\,(A)\prime} = \vec{0} \ , \tag{4.42}$$

όπου

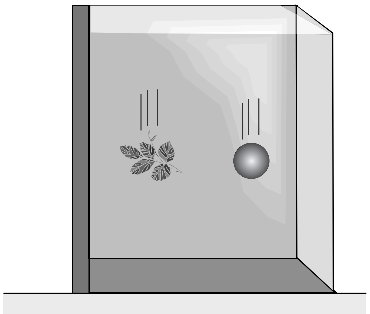
$$\vec{\phi} = -m\vec{a} \ .$$

[5] Σημειωτέον ότι από την εποχή του Lagrange έως την εποχή του Hamilton η νέα μέθοδος αποτέλεσε απλώς μια τεχνική βελτίωσης των εξισώσεων του Νεύτωνα, αφού δεν απαιτούσε καμία αναφορά στις δυνάμεις των συνδέσμων.

Η σχέση "ισορροπίας" (4.42) στο νέο σύστημα αναφοράς Σ' επιδέχεται δύο ερμηνείες. Σύμφωνα με την πρώτη ερμηνεία ο παρατηρητής είναι απομονωμένος και δεν γνωρίζει ότι κινείται σε ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς οπότε με βάση την επιτάχυνση του σωματιδίου που μετρά θα υπολογίσει τη δύναμη αδράνειας $\vec{f}^{\,(A)\prime}$ και θα θεωρήσει ότι στο σωματίδιο ασκούνται εξωτερικά οι πραγματικές δυνάμεις $\vec{F}+\vec{\phi}$ ώστε να ικανοποιείται η σχέση "ισορροπίας" (4.42)

$$(\vec{F}+\vec{\phi})+\vec{f}^{\,(A)\prime}=\vec{0}\,,$$

εκλαμβάνοντας ως πραγματική δύναμη και τη φαινόμενη δύναμη $\vec{\phi}$. Για τον απομονωμένο παρατηρητή, ο οποίος δεν γνωρίζει τη μη αδρανειακότητα του συστήματος αναφοράς του, οι φαινόμενες δυνάμεις έχουν πραγματική υπόσταση και δεν υπάρχει τρόπος να τις διαχωρίσει από τις πραγματικές δυνάμεις.



Σχήμα 4.5: Ο παρατηρητής βρίσκεται μέσα σε έναν ανελκυστήρα, ο οποίος είναι ακίνητος στην επιφάνεια της Γης. Μια μπάλα και ένα κλαδί εκτελούν ελεύθερη πτώση και επιταχύνονται προς το έδαφος με επιτάχυνση g. Υποθέτουμε ότι ο ανελκυστήρας είναι κενός και δεν υπάρχει αντίσταση.

Σύμφωνα με τη δεύτερη ερμηνεία της κατάστασης "ισορροπίας" του σώματος στο Σ', ο παρατηρητής, γνωρίζοντας ότι κινείται σε επιταχυνόμενο σύστημα, αντιλαμβάνεται ότι οι δυνάμεις αδράνειας στο επιταχυνόμενο σύστημα πρέπει να διορθωθούν και προσθέτει στη δύναμη αδράνειας του σωματιδίου τη δύναμη αδράνειας του επιταχυνόμενου συστήματος αναφοράς οπότε η κατάσταση "ισορροπίας" ερμηνεύεται ως

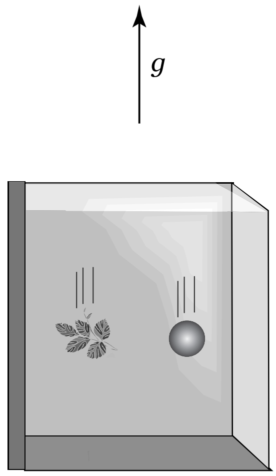
$$\vec{F}+(\vec{\phi}+\vec{f}^{\,(A)\prime})=\vec{0}\,.$$

Ας συγκρίνουμε στη συνέχεια αυτές τις δύο ερμηνείες στην περίπτωση της ελεύθερης πτώσης ενός σώματος μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο. Σύμφωνα με την αρχή του D' Alembert ένας αδρανειακός παρατηρητής (βλ. Σχήμα 4.5) γράφει τη σχέση "ισορροπίας" ως ακολούθως:

Βάρος συν δύναμη αδράνειας

$$m\vec{g}+\vec{f}^{\,(A)}=\vec{0}\,. \tag{4.43}$$

Αυτή η σχέση όμως επιδέχεται, όπως είδαμε, και άλλη ερμηνεία (βλ. Σχήμα 4.6). Ας εξαφανίσουμε τη βαρυτική δύναμη και ας επιταχύνουμε με επιτάχυνση $-\vec{g}$ τον παρατηρητή που παρακολουθεί την κίνηση του σώματος. Η επιτάχυνση που επιλέξαμε είναι ίση και αντίθετη με την επιτάχυνση



Σχήμα 4.6: Ο ανελκυστήρας τώρα βρίσκεται μακριά από όλα τα σώματα και δεν ασκείται σε αυτόν καμία βαρυτική δύναμη. Επιταχύνεται, όμως, με επιτάχυνση $-g$. Ο παρατηρητής, ο οποίος βρίσκεται μέσα στον ανελκυστήρα, δεν μπορεί από τις κινήσεις των σωμάτων να διακρίνει αν στο εσωτερικό του ανελκυστήρα ασκείται βαρυτική δύναμη προς τα κάτω, ή αν ο ανελκυστήρας επιταχύνεται προς τα πάνω. Θεωρούμε ότι οι ανελκυστήρες και στα δύο Σχήματα είναι μικροσκοπικοί σε μέγεθος. Αν υποθέσουμε ότι δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο, μπορείτε να προτείνετε εσείς ένα πείραμα με το οποίο να είναι σε θέση ο παρατηρητής να αντιληφθεί αν βρίσκεται στο πεδίο βαρύτητας της Γης ή σε ένα επιταχυνόμενο σύστημα;

Δύναμη αδράνειας μόνο

της βαρύτητας. Η "ισορροπία" του σώματος γι' αυτόν τον παρατηρητή θα λάβει τη μορφή

$$\vec{0} + \left(-m(-\vec{g}) + \vec{f}^{\,(A)\prime}\right) = \vec{0}\,. \tag{4.44}$$

Αν το πεδίο βαρύτητας ήταν απόλυτα ομογενές –πράγμα που θα ίσχυε αν είχαμε θεωρήσει ένα πολύ μικρό εργαστήριο– ένας παρατηρητής κλεισμένος στο εργαστήριο δεν θα μπορούσε να διακρίνει αν στο σωματίδιο ασκείται η δύναμη της βαρύτητας (πραγματική δύναμη) ή αν το εργαστήριό του επιταχύνεται στην αντίθετη κατεύθυνση και αυτό που "βλέπει" ως βαρύτητα του σωματιδίου είναι μια δύναμη αδράνειας, αφού και στις δύο περιπτώσεις (4.43, 4.44) η δύναμη αδράνειας που μετράει είναι ίδια

$$\vec{f}^{\,(A)} = \vec{f}^{\,(A)\prime}\,,$$

λόγω κοινής επιτάχυνσης του σώματος και για τους δύο παρατηρητές. Βέβαια, όλα όσα αναφέραμε παραπάνω ισχύουν επειδή η βαρυτική δύναμη είναι ανάλογη της μάζας του σώματος που δέχεται τη βαρυτική δύναμη, όπως ακριβώς συμβαίνει και με τις δυνάμεις αδράνειας.

Ισοδυνάμως, ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα σε ένα εργαστήριο που εκτελεί ελεύθερη πτώση δεν αισθάνεται τη δύναμη της βαρύτητας. Αυτό συμβαίνει διότι η φαινόμενη δύναμη κατά την "ισορροπία" D' Alembert είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη της βαρύτητας και τα αποτελέσματα οποιουδήποτε φυσικού πειράματος που θα εκτελούταν σε αυτό το σύστημα αναφοράς είναι πανομοιότυπα με εκείνα που θα λαμβάνονταν αν το πείραμα εκτελούταν σε ένα αδρανειακό σύστημα στο οποίο ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα. Αυτό ακριβώς συμβαίνει σε πειράματα, τα οποία εκτελούνται μέσα σε ένα διαστημόπλοιο που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη Γη. Το διαστημόπλοιο, επειδή βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση μέσα στο πεδίο βαρύτητας, είναι κατά προσέγγιση[6] ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.[7] Συνεπώς, ένα ομαλώς επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς στο οποίο δεν ασκείται η δύναμη της βαρύτητας και ένα μη επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς στο οποίο ασκείται η δύναμη της βαρύτητας, με ένταση ίση με την επιτάχυνση του προηγούμενου συστήματος, είναι ισοδύναμα. Από τη στιγμή, λοιπόν, που αυτό που έχουμε συνηθίσει να θεωρούμε ως αδρανειακό σύστημα, υπό την παρουσία ενός πεδίου βαρύτητας είναι ισοδύναμο με ένα επιταχυνόμενο σύστημα σε έναν χώρο δίχως βαρύτητα, τα αδρανειακά συστήματα, όπως τα έχουμε συνηθίσει στη νευτώνεια μηχανική, παύουν να είναι πλεονεκτικά. Καταλληλότερο αδρανειακό σύστημα θα ήταν εκείνο, το οποίο παρουσία κάποιου βαρυτικού πεδίου θα έπεφτε ελεύθερα μέσα σε αυτό το πεδίο. Σε ένα τέτοιο σύστημα τα άλλα σώματα που πέφτουν αποκλειστικά εξαιτίας του πεδίου θα αιωρούνται δίπλα στον παρατηρητή ή θα κινούνται ως ελεύθερα σώματα με σταθερή ταχύτητα ως προς αυτόν. Η ιδέα της απουσίας βαρύτητας σε ένα σύστημα που πέφτει ελεύθερα ήταν, όπως συνήθιζε να λέει ο Albert Einstein [1879-1955], "η ευτυχέστερη σκέψη της ζωής του", και ήταν αυτή που τον οδήγησε ύστερα από αγωνιώδη και πολυετή προσπάθεια στη διατύπωση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Πρόκειται για τη λεγόμενη *αρχή της ισοδυναμίας* που εισήγαγε αρχικά ο Einstein το 1916 για να εξηγήσει τη δύναμη της βαρύτητας προτού διατυπώσει τη γενική θεωρία της σχετικότητας. Η αρχή του D' Alembert υπήρξε, σε επίπεδο αρχών βέβαια, ο προπομπός της αρχής της ισοδυναμίας σύμφωνα με την οποία η δύναμη της βαρύτητας είναι μία φαινόμενη δύναμη.

Όμως, η ισοδυναμία επιταχυνόμενων συστημάτων αναφοράς και βαρύτητας είναι, όπως αναφέραμε, δυνατή επειδή η βαρυτική μάζα m_β –η μάζα που υπεισέρχεται στο νόμο της Παγκόσμιας Έλξης– είναι ίδια με την αδρανειακή μάζα m που υπεισέρχεται στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Πράγματι, για την κίνηση του σωματιδίου μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα απαιτεί

$$m\vec{a} = m_\beta \vec{g}$$

και αφού υποθέτουμε ότι

Ισότητα βαρυτικής αδρανειακής μάζας

$$m = m_\beta \; ,$$

συνάγουμε ότι

$$\vec{a} = \vec{g} \; . \tag{4.45}$$

Η ισότητα αυτή αποτελεί το κλειδί στη διατύπωση της αρχής της ισοδυναμίας.

[6]Η προσέγγιση είναι τόσο ακριβέστερη, όσο μικρότερο είναι το διαστημόπλοιο ή όσο πιο μακριά βρίσκεται αυτό από τη Γη, ώστε το βαρυτικό πεδίο εντός αυτού να μπορεί να εκληφθεί ως ομογενές.

[7]Βλ. το βιβλίο των Taylor & Wheeler, *Spacetime Physics*, εδάφιο 1.2.

Η ισότητα βαρυτικής και αδρανειακής μάζας στο πλαίσιο της νευτώνειας θεωρίας για τη βαρύτητα είναι άκρως αξιοπερίεργη και απασχόλησε και τον ίδιο το Νεύτωνα όταν διατύπωνε το νόμο της Παγκόσμιας ῞Ελξης. Θέλοντας, μάλιστα, να ελέγξει ο ίδιος την ακρίβεια αυτής της ισότητας πρότεινε το ακόλουθο πείραμα:[8] Κατασκεύασε ένα εκκρεμές αποτελούμενο από ένα κούφιο σφαιρίδιο μέσα στο οποίο τοποθετούσε διάφορα σώματα ίδιας μάζας αλλά από διαφορετικό υλικό κάθε φορά. Με αυτό τον τρόπο προσπάθησε να μετρήσει τις διαφορές στην περίοδο του εκκρεμούς, ενώ το εξωτερικό σφαιρικό κέλυφος του εξασφάλιζε ότι η αντίσταση από τον αέρα θα ήταν κάθε φορά η ίδια. Ο Νεύτωνας δεν μπόρεσε να εντοπίσει καμία διαφορά μεταξύ αδρανειακής και βαρυτικής μάζας. Αργότερα, το 1889 και το 1922, ο ούγγρος πειραματικός φυσικός Roland von Eötvös [1848-1919] πραγματοποίησε ανάλογα πειράματα με ζυγό στρέψης βελτιώνοντας την ακρίβεια σύμπτωσης των δύο μαζών από το 10^{-3} που είχε επιτύχει ο Νεύτωνας στο 5×10^{-9}. Η ακρίβεια αυτών των πειραμάτων σήμερα έχει ξεπεράσει το 10^{-12}!

Μια τέτοιας ακρίβειας σύμπτωση δύο τόσο διαφορετικών φυσικών ποσοτήτων πρέπει να κρύβει κάτι πολύ πιο βαθύ. Αυτή η σκέψη αποτέλεσε τη βασική ιδέα που ώθησε τον Einstein να αντικαταστήσει τη νευτώνεια θεώρηση για τη βαρύτητα με αυτή της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Σύμφωνα με τη νέα θεώρηση μια μάζα M παραμορφώνει το χώρο (και το χρόνο) γύρω της με τέτοιο τρόπο ώστε όλα τα σώματα που βρίσκονται μέσα στο πεδίο της μάζας M να κινούνται μέσα στον παραμορφωμένο αυτό χώρο ακολουθώντας τις συντομότερες διαδρομές, ανεξαρτήτως της μάζας που έχει το καθένα από αυτά. ῞Ετσι, αυτό που εκλαμβάνουμε εμείς ως βαρυτική δύναμη είναι η μετάφραση τής κατά τα άλλα απλούστατης γεωδαισιακής τροχιάς των σωμάτων σε συμβατικές ευκλείδειες συντεταγμένες που θεωρούμε ότι περιγράφουν ορθά το χώρο που μας περιβάλλει. Επειδή, λοιπόν, παρακολουθούμε όλα τα σώματα να κινούνται με τον ίδιο τρόπο μέσα στο βαρυτικό πεδίο και η δύναμη που θεωρούμε ως αίτιο της μη ομαλής κίνησης των σωμάτων είναι ίση με τη μάζα του εκάστοτε σώματος επί την επιτάχυνση αυτού, θεωρούμε υπεύθυνη για την κίνηση του σώματος μια δύναμη η οποία είναι ανάλογη της αδρανειακής του μάζας. Αυτό εξηγεί και την ισότητα βαρυτικής και αδρανειακής μάζας.

---

[8]Το περίφημο πείραμα του Γαλιλαίου στον πύργο της Πίζας, στόχος του οποίου ήταν να αποδείξει ότι όλα τα σώματα, ανεξαρτήτως της μάζας τους, πέφτουν στη Γη σε ίδιο χρόνο, ήταν στην ουσία απόδειξη της ισότητας μεταξύ βαρυτικής και αδρανειακής μάζας. Ο Γαλιλαίος, βέβαια, επιθυμούσε να επιβεβαιώσει πειραματικά, όπως έκανε και με κεκλιμένα επίπεδα και βολές, ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι η ίδια για όλα τα σώματα σε αντίθεση με την επικρατούσα αντίληψη του Αριστοτέλη, ο οποίος στο έργο του Φυσικά IV, **8** 216a 12-16, υποστήριζε ότι τα βαρύτερα σώματα πρέπει να φτάνουν στην επιφάνεια της Γης γρηγορότερα απ' ό,τι τα ελαφρότερα. Ο Γαλιλαίος είχε εκλογικεύσει την παρατήρησή του ότι ο χρόνος που απαιτείται είναι ανεξάρτητος από τη μάζα του σώματος με τον εξής ενδιαφέροντα συλλογισμό: ας υποθέσουμε ότι δύο σώματα, το ένα ελαφρύ και το άλλο βαρύ, πέφτουν με διαφορετική επιτάχυνση. Αν δέσουμε αυτά τα δύο σώματα μαζί, θα πρέπει λογικά να πέφτουν με μια ενδιάμεση επιτάχυνση, πράγμα το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τον ισχυρισμό ότι το συσσωμάτωμα, όντας βαρύτερο και από τα δύο σώματα, θα πέφτει ακόμη πιο γρήγορα από το κάθε σώμα χωριστά.

4.8 Το φαινόμενο των παλιρροιών

Το φαινόμενο των παλιρροιών εμφανίζεται σε εκτεταμένα σώματα που βρίσκονται μέσα σε βαρυτικά πεδία και είναι συνέπεια μιας καταπληκτικής ιδιότητας του βαρυτικού νόμου σύμφωνα με την οποία η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σωμάτων είναι ανάλογη των αδρανειακών μαζών των σωμάτων. Αντιλαμβανόμαστε, λοιπόν, ότι η παλιρροϊκή δύναμη αποτελεί καθημερινή έκφανση της αρχής της ισοδυναμίας.

Ας θεωρήσουμε ένα ουράνιο σώμα, για παράδειγμα τη Γη, που για λόγους απλούστευσης θα υποθέσουμε ότι έχει σφαιρικό σχήμα. Το ερώτημα που τίθεται είναι ποια δύναμη ασκείται σε αυτό το σώμα από κάποιο άλλο σφαιρικό ουράνιο σώμα, όπως για παράδειγμα τη Σελήνη ή τον Ήλιο. Από το καταπληκτικό θεώρημα του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι η δύναμη που ασκείται από το μακρινό σώμα σε ένα τμήμα της Γης είναι

$$\vec{F}_r = -GMm\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} \,, \tag{4.46}$$

όπου M είναι η μάζα του μακρινού σφαιρικού σώματος του οποίου το κέντρο βρίσκεται στη θέση $\vec{R}$ και m είναι η μάζα του εν λόγω τμήματος της Γης που βρίσκεται στη θέση $\vec{r}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια της Γης, η οποία προσδιορίζεται από την εξίσωση $|\vec{r}\,| = a$, λαμβάνοντας ως αρχή των αξόνων το κέντρο της Γης. Σε ολόκληρη τη Γη ασκείται βέβαια μια δύναμη

$$\vec{F}_0 = GMm_\Gamma\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} \,,$$

με αποτέλεσμα ολόκληρη η Γη να επιταχύνεται προς το ουράνιο σώμα με την αντίστοιχη επιτάχυνση. Ο παρατηρητής που βρίσκεται επάνω στη Γη και κινείται μαζί με αυτή θεωρεί ότι σε κάθε μάζα m ασκείται η φαινόμενη δύναμη

$$\vec{f} = -GMm\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} \,,$$

οπότε στο επιταχυνόμενο, λόγω τροχιακής κίνησης, σύστημα της Γης σε κάθε μάζα m φαίνεται να ασκείται η συνολική δύναμη

$$\vec{F}_\pi = \vec{F} + \vec{f} = -GMm\left(\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} + \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}\right) \,. \tag{4.47}$$

Η δύναμη αυτή είναι η παλιρροϊκή δύναμη. Ας υπολογίσουμε το μέγεθος αυτής της δύναμης στην επιφάνεια της Γης $|\vec{r}\,| = a$ υπό την προϋπόθεση ότι το ουράνιο σώμα είναι αρκετά μακριά από τη Γη ώστε η ακτίνα της Γης a να είναι πολύ μικρότερη από την απόσταση των δύο σωμάτων ($a << |\vec{R}|$), και ως εκ τούτου να μπορούμε να αμελήσουμε στον υπολογισμό της δύναμης όρους τάξης $a^2/|\vec{R}|^2$. Για να αντιληφθούμε την ακρίβεια μιας τέτοιας προσέγγισης αρκεί να αναφέρουμε ότι η ακτίνα της Γης είναι $a = 6.37 \times 10^3$ km ενώ η απόσταση Γης-Σελήνης είναι 3.84×10^5 km με αποτέλεσμα ο λόγος $a/|\vec{R}|$ να είναι τάξης $\mathcal{O}(10^{-2})$. Στην περίπτωση της παλιρροϊκής δύναμης που προκαλείται από τον Ήλιο, επειδή η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο έχει ακτίνα 1.49×10^8 km ο αντίστοιχος λόγος είναι $a/|\vec{R}| = \mathcal{O}(10^{-5})$. Αν ορίσουμε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{h}\left(\vec{R}\right) = GMm\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3},$$

τότε η παλιρροϊκή δύναμη είναι απλώς η διαφορά

$$\vec{F}_\pi = \vec{h}\left(\vec{R}-\vec{r}\right) - \vec{h}\left(\vec{R}\right) . \tag{4.48}$$

Όταν $|\vec{r}\,| << |\vec{R}|$, η μεταβολή της συνάρτησης $\vec{h}$ που παρουσιάζεται στην έκφραση (4.48) προσεγγίζεται με πολύ μεγάλη ακρίβεια από τον πρώτο όρο τάξης $|\vec{r}\,|$ της σειράς Taylor της $\vec{h}(\vec{R}-\vec{r})$

$$\vec{F}_\pi \cong -\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{h}\,\Big|_{\vec{R}} + \mathcal{O}(a^2/|\vec{R}|^2) , \tag{4.49}$$

όπου $\vec{\nabla}$ είναι η βαθμίδα ως προς τη μεταβλητή $\vec{R}$. Συνεπώς, η παλιρροϊκή δύναμη σε πρώτη τάξη ως προς $a/|\vec{R}|$ είναι

$$\vec{F}_\pi = -GMm\frac{\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{R}}{R^3} + 3GMm\frac{\vec{R}}{R^4}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}R . \tag{4.50}$$

Για να υπολογίσουμε την (4.50) θα χρειαστούμε αφενός τη βαθμίδα $\vec{\nabla}R$ του μέτρου του διανύσματος θέσης

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{\vec{R}\cdot\vec{R}}\,,$$

που προκύπτει (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα) ότι είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα

$$\vec{\nabla}R = \frac{\vec{R}}{R}\,,$$

και αφετέρου την τιμή της έκφρασης

$$\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{R}\,,$$

που υπολογίζεται εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε δείκτες. Επειδή η i-οστή συντεταγμένη του παραπάνω διανύσματος βάσει της αθροιστικής σύμβασης είναι

$$r_j\frac{\partial R_i}{\partial R_j} = r_j\delta_{ij} = r_i\,,$$

θα έχουμε

$$\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{R} = \vec{r}\,.$$

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η παλιρροϊκή δύναμη (4.50) είναι

$$\begin{aligned}\vec{F}_\pi &= -GMm\frac{\vec{r}}{R^3} + 3GMm(\vec{r}\cdot\vec{R})\frac{\vec{R}}{R^5}\\ &= GMm\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{R})\vec{R} - R^2\vec{r}}{R^5}\,.\end{aligned} \tag{4.51}$$

Τι ακριβώς μορφή δύναμης περιγράφει μια τέτοια έκφραση; Για να κατανοήσουμε την παραπάνω έκφραση θα υπολογίσουμε την παλιρροϊκή δύναμη που ασκείται στην περιφέρεια της Γης σε ένα επίπεδο, το οποίο διέρχεται από το κέντρο της Γης και το μακρινό σώμα. Αν γνωρίζουμε τη δύναμη που ασκείται επάνω σε αυτό το μέγιστο κύκλο, τότε γνωρίζουμε και τη δύναμη που ασκείται σε κάθε σημείο της επιφάνειας της Γης· αρκεί να περιστρέψουμε το προηγούμενο επίπεδο γύρω από τον άξονα που συνδέει τα κέντρα των δύο ουράνιων σωμάτων. Ας ονομάσουμε x τη διεύθυνση από το κέντρο της Γης προς τον πλανήτη και z την κάθετη σε αυτή διεύθυνση επί του εν λόγω επιπέδου. Τότε με αρχή το κέντρο του πλανήτη το μακρινό σώμα βρίσκεται στη θέση $\vec{R} = R\hat{e}_x$, όπου $\hat{e}_x$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση x, ενώ τα σημεία της περιφέρειας της Γης βρίσκονται στις θέσεις

$$\vec{r} = a(\cos\theta\ \hat{e}_x + \sin\theta\ \hat{e}_z)\ ,$$

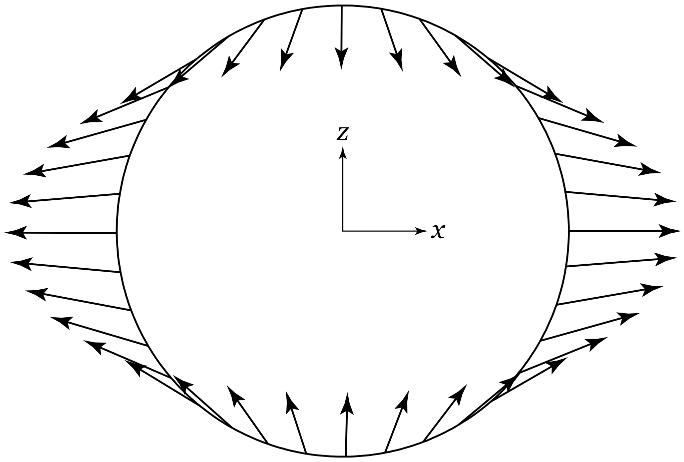
όπου $\hat{e}_z$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση z και a είναι η ακτίνα της Γης. Η παλιρροϊκή, λοιπόν, δύναμη (4.51) που ασκείται στην περιφέρεια της Γης δίνεται από την έκφραση

$$\vec{F}_\pi = \frac{GMm}{R^2}\frac{a}{R}(2\cos\theta\hat{e}_x - \sin\theta\hat{e}_z)\ ,$$

και έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 4.7 σε διάφορες θέσεις. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η δύναμη $\vec{F}_\pi$ έχει μέγεθος μικρότερο κατά τον παράγοντα a/R απ' ό,τι η άμεση βαρυτική δύναμη GMm/R^2 που ασκείται από το μακρινό ουράνιο σώμα στη μάζα m. Επειδή όμως η συνολική παλιρροϊκή δύναμη είναι ανάλογη της μάζας του μακρινού σώματος, ουράνια σώματα μεγάλης μάζας που είναι πολύ απομακρυσμένα ασκούν παλιρροϊκή δύναμη συγκρίσιμη με εκείνη που ασκούν άλλα ουράνια σώματα μικρότερης μάζας που βρίσκονται εγγύτερα. Ας υπολογίσουμε το λόγο της παλιρροϊκής δύναμης που ασκεί ο Ήλιος στη Γη με την παλιρροϊκή δύναμη που ασκεί η Σελήνη στη Γη. Επειδή η μάζα του Ηλίου είναι $M_{\mathrm{H}} = 1.99 \times 10^{31}$ kg, ενώ η μάζα της Σελήνης $M_\Sigma = 7.34 \times 10^{23}$ kg, ο λόγος των παλιρροϊκών δυνάμεων που ασκούν τα δύο σώματα στη Γη είναι περίπου

$$\frac{F_{\pi\,(\mathrm{H})}}{F_{\pi\,(\Sigma)}} \approx 0.3\ .$$

Αυτό σημαίνει ότι, παρόλο που η κύρια παλιρροϊκή δύναμη προέρχεται από τη Σελήνη, ο Ήλιος επηρεάζει και αυτός σημαντικά τα παλιρροϊκά φαινόμενα στη Γη. Η συμβολή του Ήλιου στη δημιουργία των παλιρροιών είναι σημαντική και λαμβάνεται πολύ σοβαρά υπόψη στη ναυσιπλοΐα. Η μεταβολή επίσης του πλάτους των παλιρροιών ανάλογα με τη θέση του Ήλιου αξιοποιείται από τους επιστήμονες στον υπολογισμό της ηλικίας των απολιθωμάτων και συνάγονται πολύ χρήσιμες πληροφορίες για το παλαιοκλίμα της Γης.



Σχήμα 4.7: Η παλιρροϊκή δύναμη σε διαφορετικά σημεία στην επιφάνεια της Γης. Το σώμα που ασκεί την παλιρροϊκή δύναμη βρίσκεται επί του άξονα x.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.5. *Πότε αναμένονται εντονότερα παλιρροϊκά φαινόμενα, όταν έχουμε νέα Σελήνη ή όταν είναι πανσέληνος;*

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της παλιρροϊκής δύναμης με το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα, βρίσκουμε ότι η ακτινική συνιστώσα της παλιρροϊκής δύναμης είναι

$$F_{\pi r} = \frac{GMma}{R^3}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{GMma}{R^3}\frac{1+3\cos 2\theta}{2} \, .$$

Παρατηρούμε από την ακτινική συνιστώσα της δύναμης ότι η παλιρροϊκή δύναμη έχει την τάση να δημιουργεί άμπωτη στα πλάτη για τα οποία είναι $1 + 3\cos 2\theta < 0$, δηλαδή για τις περιοχές $125.3° > \theta > 54.7°$· στις υπόλοιπες περιοχές η δύναμη έχει θετική ακτινική συνιστώσα και οι υδάτινες μάζες έχουν την τάση να κινηθούν σε αυτές τις περιοχές δημιουργώντας πλημμυρίδα. Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε ότι η παλιρροϊκή δύναμη εξαρτάται από το $\cos 2\theta$, οπότε είναι συμμετρική ως προς τον άξονα περιστροφής της Γης, αν επιλέξουμε ως άξονα z τον άξονα περιστροφής της Γης, αφού και η Σελήνη και ο ΄Ηλιος βρίσκονται περίπου στο επίπεδο το κάθετο σε αυτόν. Αυτό έχει ως συνέπεια, καθώς περιστρέφεται η Γη και παρασύρει τις υδάτινες μάζες, η παλίρροια να εμφανίζει δύο φορές πλημμυρίδα και δύο φορές άμπωτη ανά εικοσιτετράωρο,. Με άλλα λόγια, οι παλίρροιες έχουν περίοδο σχεδόν[9] 12 ώρες. Η εξήγηση αυτή για την περίοδο των παλιρροιών δόθηκε για πρώτη φορά από τον Νεύτωνα και αποτέλεσε συγκλονιστική απόδειξη των δυνατότητων της νέας δυναμικής θεωρίας που εισήγαγε.

[9]Για την ακρίβεια η περίοδος είναι 12 ώρες και 42 λεπτά διότι η Σελήνη περιστρέφεται γύρω από τη Γη με την ίδια φορά που περιστρέφεται και η Γη γύρω από τον εαυτό της.

Άσκηση 4.6. *Υπολογίστε την παλιρροϊκή δύναμη που δέχεται το σώμα ενός ανθρώπου όταν αυτός βρίσκεται όρθιος επάνω σε ένα σφαιρικό βαρυτικό σώμα σαν αυτό του Ήλιου. Υποθέστε τώρα ότι ο Ήλιος αρχίζει να συρρικνώνεται διατηρώντας τη μάζα του. Σε τι διαστάσεις θα πρέπει να φτάσει ο Ήλιος ώστε ο άνθρωπος να αρχίσει να αισθάνεται έντονη δυσφορία λόγω της διαφοράς των παλιρροϊκών δυνάμεων που ασκούνται στο κεφάλι και τα πόδια του; Η αλήθεια είναι ότι, πολύ πριν ο Ήλιος φτάσει σε αυτές τις διαστάσεις, η βαρυτική δύναμη θα έχει γίνει τόσο μεγάλη, ώστε τα πόδια του ανθρώπου θα έχουν ήδη υποστεί ανεπανόρθωτες βλάβες. Πόση θα έπρεπε να είναι η μάζα του Ήλιου και η ακτίνα του ώστε οι παλιρροϊκές δυνάμεις να γίνουν τόσο μεγάλες για να αρχίσει ο άνθρωπος να αισθάνεται δυσφορία, προτού η ίδια η βαρύτητα γίνει επικίνδυνη;*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Προτού εγκαταλείψουμε το φαινόμενο των παλιρροιών, ας βεβαιωθούμε ότι αντιλαμβανόμαστε το λόγο για τον οποίο η παλιρροϊκή δύναμη στον Ισημερινό της Γης έχει θετική ακτινική διεύθυνση (προς τα έξω) και στο σημείο που βρίσκεται πλησιέστερα στο μακρινό ουράνιο σώμα $\theta = 0$ αλλά και στο αντιδιαμετρικό του σημείο $\theta = \pi$ που βρίσκεται στη μακρινότερη απόσταση από αυτό. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι λόγω της αρχής της ισοδυναμίας σε μία στοιχειώδη μάζα ασκούνται δύο δυνάμεις, η ελκτική δύναμη του μακρινού σώματος και η φαινόμενη δύναμη εξαιτίας του γεγονότος ότι η Γη επιταχύνεται προς το μακρινό σώμα. Η τελευταία δύναμη είναι ίση και αντίθετη με αυτήν που θα ασκούταν στη μάζα αν η μάζα βρισκόταν στο κέντρο της Γης. Στην πρώτη περίπτωση, όταν $\theta = 0$, η ελκτική δύναμη είναι μεγαλύτερη από τη φαινόμενη δύναμη με αποτέλεσμα η παλιρροϊκή δύναμη να έχει διεύθυνση προς το μακρινό ουράνιο σώμα. Στη δεύτερη περίπτωση, όταν $\theta = \pi$, η ελκτική δύναμη είναι μικρότερη από τη φαινόμενη δύναμη με αποτέλεσμα να εμφανίζεται και πάλι τάση για πλημμυρίδα.

Για να επιστρέψουμε στη σχέση της αρχής της ισοδυναμίας με τη βαρύτητα και να κλείσουμε με αυτήν το παρόν κεφάλαιο, σημειώνουμε ότι οι παλίρροιες αποτελούν μια ξεχωριστή έκφανση της βαρύτητας, πέρα από την εκδήλωση της βαρύτητας που μπορούμε να εξαφανίσουμε πέφτοντας ελεύθερα μέσα στο βαρυτικό πεδίο. Αυτή η λεπτή διαφοροποίηση της βαρύτητας, η οποία εκδηλώνεται μέσω της περίεργης ιδιότητάς της να ωθεί τα σώματα να απομακρυνόνται σε μία κατεύθυνση και να πλησιάζουν σε κατευθύνσεις κάθετες στην πρώτη, είναι δυνατόν να περιγραφεί με μια ανάλογη καμπύλωση του χώρου που δεν μπορούμε με κανένα τρόπο να εξαλείψουμε μολονότι ο καμπυλωμένος αυτός χώρος περιγράφεται τοπικά πολύ καλά από έναν επίπεδο χώρο. Ο Einstein ήταν αυτός που πρώτος αντιλήφθηκε ότι η μορφή των παλιρροϊκών δυνάμεων επιβάλλει την περιγραφή της βαρύτητας με γεωμετρικούς όρους καμπύλωσης. Σήμερα, πάντως, όπου η γενική θεωρία της σχετικότητας όχι απλώς είναι γενικώς αποδεκτή αλλά και έχει ελεγχθεί όσον αφορά σε πολλές από τις προβλέψεις της, βρισκόμαστε πολύ κοντά στην παρατηρησιακή επιβεβαίωση μιας από τις σπουδαιότερες προβλέψεις αυτής της θεωρίας: της ύπαρξης *βαρυτικών κυμάτων*. Τα βαρυτικά κύματα μεταφέροντας ως διαταραχή την ουσία της ίδιας της βαρύτητας δεν είναι τίποτε άλλο παρά εγκάρσια κύματα παλιρροϊκών δυνάμεων που, καθώς διαδίδονται, συστέλλουν και διαστέλλουν το χώρο κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης τους, ενώ η συστολή και η διαστολή συμβαίνουν σε συγκεκριμένες κάθετες διευθύνσεις σε αυτό το επίπεδο.[10] Οι διευθύνσεις αυτές είναι το ανάλογο της πόλωσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

[10] Αξίζει να διαβάσετε την περιγραφή των φαινομένων αυτών από τον Kip Thorne στο βιβλίο του (ιδιαίτερα τα Κεφ. 2 και 10): *Μαύρες τρύπες και Στρεβλώσεις του Χρόνου*, εκδ. Κάτοπτρο.

4.9 Προβλήματα

1. Η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος είναι $L = A_{ij}(q)\ \dot{q}_i\ \dot{q}_j$ (υπονοείται η αθροιστική σύμβαση). Να δειχθεί ότι ο πίνακας A_{ij} μπορεί να ληφθεί ως συμμετρικός και ότι η L του συστήματος διατηρείται κατά την κίνηση. Να δειχθεί περαιτέρω ότι για κάθε συνάρτηση f, η $f(L)$ και η L οδηγούν στην ίδια φυσική κίνηση. Στις περιπτώσεις αυτές οι δυναμικές εξισώσεις μπορούν να παραχθούν από μια πολύ γενικευμένη κλάση Λαγκρανζιανών.

2. Θεωρούμε ένα σύστημα n ελεύθερων σωματιδίων που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Τα σωματίδια δεσμεύονται με $3n-k$ σκληρόνομους ολόνομους δεσμούς (δηλαδή, υπάρχουν $3n-k$ σχέσεις της μορφής $f_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots) = 0$, με $i = 1, 2, \ldots, 3n-k$)[11]. Μπορούμε τότε να ορίσουμε k συντεταγμένες $q_1, q_2, \ldots, q_k$, οι οποίες αρκούν για να προσδιοριστούν οι αρχικές συντεταγμένες μέσω σχέσεων της μορφής: $x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$. Να δειχθεί ότι η Λαγκρανζιανή δίνεται από την $L = A_{ij}(q)\ \dot{q}_i\ \dot{q}_j$ (υπονοείται η αθροιστική σύμβαση). Η Λαγκρανζιανή αυτή δεν είναι τίποτε άλλο παρά η έκφραση της κινητικής ενέργειας στις γενικευμένες συντεταγμένες q. Δείξτε ότι ο πίνακας A_{ij} είναι συμμετρικός. Δείξτε ότι κατά την κίνηση διατηρείται η ενέργεια L.

   Για όσους αρέσκονται να αντιμετωπίζουν τα προβλήματα από μια πιο μαθηματική σκοπιά: Ας ορίσουμε στο χώρο που ορίζεται από τις συντεταγμένες q (που ονομάζεται ο θεσεογραφικός χώρος του φυσικού συστήματος) το διαφορικό μήκος καμπύλης ως

   $$ds = \sqrt{A_{ij}(q) dq_i dq_j}\ .$$

   Μπορείτε να σκεφτείτε γιατί επιλέξαμε αυτή την έκφραση (σε μαθηματική γλώσσα θα λέγαμε αυτή τη μετρική) για το διαφορικό μήκος; Σε αυτό το θεσεογραφικό χώρο, γεωδαισιακές γραμμές είναι οι καμπύλες $q_l(\tau)$, όπου τ κάποια παράμετρος, οι οποίες καθιστούν το μήκος μεταξύ δύο σημείων του χώρου αυτού ακρότατο. Δείξτε ότι η τροχιά της φυσικής κίνησης μεταξύ δύο σημείων του θεσεογραφικού χώρου ταυτίζεται με τη γεωδαισιακή που τα ενώνει και ότι το μέτρο της ταχύτητας $ds/d\tau$ είναι σταθερό κατά την κίνηση. Με τον τρόπο αυτό γενικεύουμε την κίνηση ελεύθερου σωματιδίου σε οποιονδήποτε χώρο.

3. Υπολογίστε για τη μηχανή του Atwood που περιγράψαμε στο Πρόβλημα 4 του Κεφαλαίου 3 την τάση του νήματος χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange.

4. Κυκλικός δακτύλιος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει επάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία α με το οριζόντιο επίπεδο

[11] Σκληρόνομος ονομάζεται ένας δεσμός ο οποίος δεν έχει χρονική εξάρτηση.

μέσα στο ομογενές κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας. Γράψτε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση και την εξίσωση κίνησης του δακτυλίου. Υπολογίστε με λαγκρανζιανό φορμαλισμό τη δύναμη που προέρχεται από την επιβολή της συνθήκης μη ολίσθησης. Τι συμβαίνει στη δύναμη αυτή, όταν $\alpha = 0$; Μπορείτε να δώσετε μια φυσική εξήγηση γι' αυτό;

5. Μια χάντρα μάζας m δύναται να ολισθαίνει σε λείο σύρμα που έχει τη μορφή έλικας και βρίσκεται μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο που είναι παράλληλο με τον άξονα της έλικας. Η εξίσωση της έλικας σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι: $\rho = \sigma\tau\alpha\theta, z = k\phi$. Γράψτε τη Λαγκραζιανή της χάντρας και υπολογίστε την εξίσωση κίνησής της, θεωρώντας ότι για $t = 0$ η χάντρα είναι ακίνητη. Με τη βοήθεια των πολλαπλασιαστών Lagrange υπολογίστε τις δυνάμεις που ασκούνται στη χάντρα ενώ αυτή ολισθαίνει επάνω στη συρμάτινη έλικα. Στη συνέχεια επιχειρήστε να επιλύσετε το ίδιο πρόβλημα με νευτώνεια αντιμετώπιση. Πώς θα σχεδιάζατε σε αυτή την περίπτωση τις δυνάμεις; Αντιλαμβάνεστε τώρα την ευκολία που σας προσφέρει στην επίλυση προβλημάτων η λαγκρανζιανή αντιμετώπιση;

6. *Επιλύστε μια υπερβατική εξίσωση με κανόνα και αλυσίδα:* Υποθέστε πως κρατάτε τα δύο άκρα μιας αλυσίδας μήκους $2L$ στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο σε απόσταση L το ένα από το άλλο. Η αλυσίδα αποκτά κατάλληλο καμπύλο σχήμα προσπαθώντας να "χαμηλώσει" το κέντρο βάρους της όσο το δυνατόν περισσότερο. Κατασκευάστε τη διαφορική εξίσωση, την οποία πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση του σχήματος της αλυσίδας προκειμένου να επιτευχθεί αυτός ο στόχος, υπό την προϋπόθεση ότι το μήκος της αλυσίδας παραμένει σταθερό. Τη δέσμευση αυτή μπορείτε να την εισαγάγετε μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange. Δείξτε ότι η συνάρτηση:

$$y(x) = \frac{1}{k}[\cosh(kx - kL/2) - \cosh(kL/2)]$$

ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση στην οποία καταλήξατε και διέρχεται από τη θέση των άκρων της αλυσίδας ($x = 0,\ x = L$). Σε συνδυασμό με τη σχέση που δίνει το μήκος της αλυσίδας υπολογίστε τη ρίζα της υπερβατικής εξίσωσης

$$\sinh(x) = 2x$$

εκτελώντας το πείραμα με μια αλυσίδα και μετρώντας το y στο μέσο αυτής.

7. Ένας δορυφόρος ακτίνας r εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από κάποιο κεντρικό πλανήτη το κέντρο του οποίου βρίσκεται σε απόσταση R από το κέντρο του δορυφόρου. Δύο ίσες μάζες, m, τοποθετημένες αντιδιαμετρικά στο δορυφόρο συνδέονται με ράβδο μήκους $2r$ που διαπερνά το δορυφόρο. Ο δορυφόρος περιφέρεται γύρω από το πλανήτη αλλά δεν περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό

του. Έτσι η ράβδος κατά την περιφορά του δορυφόρου γύρω από τον πλανήτη σχηματίζει γωνία με την επιβατική ακτίνα του δορυφόρου που μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο. Αγνοήστε τη βαρυτική έλξη του ίδιου του δορυφόρου στις μάζες και υποθέστε ότι η ράβδος δεν κινείται ως προς το δορυφόρο. Προσδιορίστε την τάση της ράβδου συναρτήσει του χρόνου. Αν αντικαταστήσετε τη ράβδο με ένα ελατήριο σταθεράς k και με συντελεστή απόσβεσης γ, σε ποια γωνία ελατηρίου-επιβατικής ακτίνας οι μάζες θα βρίσκονται στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση μεταξύ τους; Μπορείτε βασισμένοι στα παραπάνω αποτελέσματα να εξηγήσετε γιατί το μέγιστο των παλιρροιών δεν συμβαίνει όταν η Σελήνη βρίσκεται ακριβώς στο ζενίθ της;

8. Ένα τραπέζι μπιλιάρδου έχει κυκλικό σχήμα. Μιά μπάλα ξεκινά από την περιφέρεια του τραπεζιού με ταχύτητα μέτρου u και ύστερα από N ελαστικές κρούσεις καταλήγει στο σημείο εκκίνησής της. (α) Υποθέστε ότι η μπάλα κτυπάει στο τοίχωμα του μπιλιάρδου πρώτα στο σημείο A και έπειτα στο B. Αποδείξτε ότι η ελάχιστη δράση για το διάστημα αυτό επιτυγχάνεται όταν η μπάλα κινείται με σταθερή ταχύτητα επί της ευθείας AB. (β) Αν η μπάλα διαγράψει ένα κανονικό N-γωνο με σταθερή ταχύτητα u, υπολογίστε τη δράση που αντιστοιχεί στην τροχιά αυτή συναρτήσει της ακτίνας του μπιλιάρδου r, της ταχύτητας u, και της γωνίας $\phi = 2\pi/N$. (γ) Έστω τώρα μία μη φυσική κίνηση $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ (όπου $A_1A_2 \ldots A_n$ μη κανονικό N-γωνο), κατά την οποία στον ίδιο χρόνο με τη τροχιά (β) το σωματίδιο εκτελεί τη διαδρομή $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, με διαφορετικές ταχύτητες στο κάθε τμήμα αλλά επιστρέφει στο ίδιο σημείο. Αποδείξτε κάνοντας χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange ότι η δράση καθίσταται στάσιμη στην περίπτωση (β) δηλαδή όταν το $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ είναι κανονικό πολύγωνο και όταν το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό. Θα μπορούσατε να καταλήξετε σε κάποιο συμπέρασμα όσον αφορά στην ελαστική κρούση σωματιδίου πάνω σε μία καμπύλη επιφάνεια κατ' αντιστοιχία με αυτό που συμβαίνει κατά την ελαστική κρούση σε επίπεδη επιφάνεια;