Κεφάλαιο 3

Συνάρτηση Lagrange

"Αυτό που πραγματικά με ενδιαφέρει είναι
το αν ο Θεός είχε τη δυνατότητα επιλογής
κατά τη δημιουργία του κόσμου"
Albert Einstein

3.1 Η Λαγκρανζιανή και το φυσικό της περιεχόμενο

Στο πρώτο κεφάλαιο δείξαμε ότι ο δυναμικός νόμος του Νεύτωνα είναι ισοδύναμος με την απαίτηση η δράση ως το ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής στο χρόνο να καθίσταται στάσιμη. Το γεγονός αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να αναγάγουμε το πρόβλημα της διερεύνησης της εξέλιξης ενός μηχανικού συστήματος στην κατασκευή της λαγκρανζιανής συνάρτησης του συστήματος η οποία και εμπεριέχει όλη τη "φυσική" του προβλήματος. Η λαγκρανζιανή συνάρτηση (ή συνάρτηση Lagrange) περιέχει κάτι περισσότερο· μέσα σε αυτήν κρύβονται όλες οι συμμετρίες του συστήματος και από αυτές τις συμμετρίες, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5, μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε τις διατηρούμενες ποσότητες, οι οποίες θα μας διευκολύνουν στην επίλυση των εξισώσεων κίνησης του προβλήματος.

Η φυσική κρυμμένη μέσα στη συνάρτηση Lagrange

Έχουμε μάθει έως τώρα ότι η κατάλληλη επιλογή για τη λαγκρανζιανή συνάρτηση ενός μηχανικού συστήματος είναι η διαφορά μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να καταλάβουμε το λόγο για τον οποίο η Λαγκρανζιανή έχει αυτή τη μορφή. Στη συνέχεια θα δούμε ότι η λαγκρανζιανή περιγραφή είναι, εν γένει, ακατάλληλη για συστήματα με ανάλωση στα οποία εμφανίζονται μη συντηρητικές δυνάμεις. Θα εξηγήσουμε, όμως, ότι αυτό δεν αποτελεί ουσιαστικό πρόβλημα, αφού σε θεμελιώδες επίπεδο όλες οι δυνάμεις στη φύση είναι συντηρητικές. Τέλος, θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο γράφοντας τη λαγκρανζιανή συνάρτηση που διέπει τη κίνηση σωματιδίων στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και θα προσδιορίσουμε την κανονική ορμή των σωματιδίων σε αυτή την περίπτωση.

Θα αρχίσουμε μελετώντας μερικές βασικές ιδιότητες της λαγκρανζιανής συνάρτησης καθώς και τους μετασχηματισμούς αυτής, οι οποίοι δεν αλλοιώνουν την περιγραφή του μηχανικού συστήματος.

Το μέτρο της Λαγκρανζιανής στερείται φυσικού περιεχομένου

• Αν πολλαπλασιάσουμε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση L ενός συστήματος με έναν αριθμό λ, η νέα Λαγκρανζιανή λL που θα προκύψει θα περιγράφει και πάλι το ίδιο φυσικό σύστημα. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι οι εξισώσεις κίνησης θα είναι οι ίδιες, αφού οι εξισώσεις Euler - Lagrange είναι ομογενείς διαφορικές εξισώσεις παραγώγων της Λαγκρανζιανής. Εξάλλου, πολλαπλασιάζοντας τη Λαγκρανζιανή με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζουμε και τη δράση με τον ίδιο αριθμό δίχως να μεταβάλλουμε τη "θέση" του στασίμου αυτής: Η διαδρομή που καθιστά την αρχική δράση στάσιμη καθιστά στάσιμη και τη νέα δράση, όπως ακριβώς τα ίδια σημεία αποτελούν ακρότατα και της συνάρτησης $f(x)$ και της $\lambda f(x)$.

Αν μία Λαγκρανζιανή μπορεί να διαχωριστεί σε δύο ανεξάρτητες, το φυσικό πρόβλημα "σπάει" σε δύο απλούστερα προβλήματα

• Η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος σωματιδίων, που δεν αλληλεπιδρούν, είναι απλώς το άθροισμα των επί μέρους Λαγκρανζιανών του κάθε σωματιδίου. Η ιδιότητα αυτή μάς επιτρέπει να εκφράσουμε τη Λαγκρανζιανή ενός σύνθετου συστήματος που αποτελείται από υποσυστήματα που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους ως το άθροισμα των Λαγκρανζιανών των επί μέρους συστημάτων. Η λαγκρανζιανή συνάρτηση, για παράδειγμα, που διέπει την κίνηση N μη αλληλεπιδρώντων ελεύθερων σωματιδίων, εκάστου μάζας m_i, είναι

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2 \,. \tag{3.1}$$

Πολλές φορές ένας τέτοιος διαχωρισμός της Λαγκρανζιανής δεν είναι προφανής. Όταν υπάρχει κάποιος μετασχηματισμός των συντεταγμένων τέτοιος ώστε να μπορεί η Λαγκρανζιανή να γραφεί ως άθροισμα ανεξάρτητων Λαγκρανζιανών, τότε αποκαλύπτεται η απλούστερη δομή του συστήματος. Θα δούμε αργότερα, στο Κεφάλαιο 8, ότι αυτή η ιδιότητα μάς δίνει τη δυνατότητα να αναλύσουμε ένα οσοδήποτε πολύπλοκο μηχανικό σύστημα, το οποίο βρίσκεται κοντά σε κάποια κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας, ως ένα σύνολο πολλών ανεξάρτητων μονοδιάστατων αρμονικών ταλαντωτών.

Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα τέτοιου μη προφανούς διαχωρισμού μιας Λαγκρανζιανής σε δύο επί μέρους ανεξάρτητες Λαγκρανζιανές. Δύο σωματίδια μάζας m_1 και m_2 κινούνται σε μία διάσταση υπό την επίδραση αμοιβαίας αλληλεπίδρασης που περιγράφεται από το δυναμικό $V(|x_1 - x_2|)$. Το δυναμικό αυτό λέγεται *δυναμικό νευτώνειου τύπου*, διότι από ένα τέτοιο δυναμικό πηγάζουν δυνάμεις αλληλεπίδρασης των σωματιδίων, οι οποίες είναι ίσες και αντίθετες μεταξύ τους και επομένως είναι σύμφωνες με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Είναι εύκολο να γράψει κανείς τη Λαγκρανζιανή του συστήματος των δύο σωματιδίων ως εξής:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - V(|x_1 - x_2|) \,. \tag{3.2}$$

Στις φυσικές συντεταγμένες x_1, x_2 η Λαγκρανζιανή δεν είναι διαχωρίσιμη, αφού το δυναμικό αλληλοεμπλέκει και τις δύο συντεταγμένες. Αν, όμως, για την περιγραφή του συστήματος χρησιμοποιούσαμε ως συντεταγμένες τη θέση του κέντρου μάζας

Ο διαχωρισμός επιτυγχάνεται σε νέες συντεταγμένες, πολλές φορές όχι τόσο προφανείς

$$X_{KM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

και τη σχετική θέση των σωματιδίων

$$x \equiv x_1 - x_2 \ ,$$

θα διαπιστώναμε με απλή αντικατάσταση ότι η Λαγκρανζιανή θα λάμβανε τη διαχωρίσιμη μορφή

$$L = \left[\frac{1}{2} M \dot{X}_{KM}^2\right] + \left[\frac{1}{2}\mu \dot{x}^2 - V(|x|)\right] \ , \qquad (3.3)$$

όπου

$$M = m_1 + m_2$$

είναι η ολική μάζα και

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

είναι η ανηγμένη μάζα του συστήματος. Την τελευταία αυτή μορφή την αναμέναμε, αφού ήδη γνωρίζουμε πώς κινείται ένα σύστημα δύο σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με δυνάμεις νευτώνειου τύπου. Το σύστημα θα κινηθεί όλο μαζί συμπεριφερόμενο ως ένα ελεύθερο σώμα, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο μάζας του συστήματος και έχει μάζα ίση με την ολική μάζα του συστήματος (πρώτος όρος της Λαγκρανζιανής). Συγχρόνως, η σχετική κίνηση των δύο σωματιδίων θα είναι αυτή ενός σώματος μάζας ίσης με την ανηγμένη μάζα του συστήματος, η οποία κινείται στο δυναμικό αλληλεπίδρασης που τώρα φαίνεται να προέρχεται από κάποια εξωτερική πηγή (τελευταίοι δύο όροι της Λαγκρανζιανής). Η νέα αυτή μορφή της Λαγκρανζιανής μάς επιτρέπει να διαπιστώσουμε ότι οι εξισώσεις Euler - Lagrange του συστήματος καταλήγουν στην ομαλή κίνηση του κέντρου μάζας και στη σχετική κίνηση της ανηγμένης μάζας στο δυναμικό αλληλεπίδρασης.

• Μια άλλη ιδιότητα της λαγκρανζιανής συνάρτησης είναι η ακόλουθη: αν στη λαγκρανζιανή συνάρτηση ενός συστήματος προσθέσουμε μία άλλη συνάρτηση, η οποία αποτελεί τέλεια χρονική παράγωγο κάποιας συνάρτησης των θέσεων και του χρόνου,

Μετασχηματισμός βαθμονόμησης

$$\tilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q,t)}{dt} \ , \qquad (3.4)$$

η νέα Λαγκρανζιανή $\tilde{L}$ που προκύπτει περιγράφει και πάλι το ίδιο μηχανικό σύστημα.[1] Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι η παραπάνω πρόταση ισχύει αν υπολογίσουμε προσεκτικά τις εξισώσεις Euler - Lagrange που προκύπτουν από τη νέα Λαγκρανζιανή και καταλήξουμε στις αντίστοιχες

[1] Το σύμβολο q παριστάνει γενικά ένα σύνολο συντεταγμένων $q_1, q_2, \ldots$ και αντίστοιχα το $\dot{q}$ συμβολίζει τη χρονική παράγωγο όλων αυτών των συντεταγμένων.

εξισώσεις της αρχικής Λαγκρανζιανής (βλ. Πρόβλημα 1). Ο απλούστερος, ωστόσο, τρόπος να αποδείξουμε ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός αφήνει αναλλοίωτες τις εξισώσεις κίνησης και να κατανοήσουμε το βαθύτερο νόημα αυτού του μετασχηματισμού είναι να υπολογίσουμε τη δράση στην οποία οδηγεί η νέα Λαγκρανζιανή,

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \int_{t_A}^{t_B} \tilde{L}\, dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} L\, dt + f(q,t)\big|_{t_A}^{t_B} \\ &= S + f(q(t_B),t_B) - f(q(t_A),t_A)\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Οι τελευταίοι δύο όροι της παραπάνω παράστασης είναι κάποιοι καθορισμένοι αριθμοί, αφού το αρχικό και το τελικό σημείο της διαδρομής κατά την εφαρμογή της αρχής ελάχιστης δράσης θεωρούνται δεδομένα. Επομένως, η εύρεση ακροτάτου της $\tilde{S}$ δεν εξαρτάται από τη συνάρτηση f· το ακρότατο της $\tilde{S}$ είναι το ίδιο με το ακρότατο της S και η φυσική τροχιά που προκύπτει από τη Λαγκρανζιανή $\tilde{L}$ είναι ίδια με τη φυσική τροχιά που προκύπτει από την L.

Ο μετασχηματισμός αυτός, ο οποίος αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής, αφού αφήνει αναλλοίωτες τις εξισώσεις Euler - Lagrange, ονομάζεται *gauge transformation*. Στα ελληνικά έχει αποδοθεί με τον όρο *μετασχηματισμός βαθμίδας*. Ίσως, όμως, πιο σωστά θα έπρεπε να ονομάζεται *μετασχηματισμός βαθμονόμησης*. Ουσιαστικά με αυτόν το μετασχηματισμό είναι σαν να αναβαθμονομεί –εξ ου και ο προτεινόμενος όρος– κανείς την τιμή της δράσης κατά μήκος του άξονα του χρόνου ανεξαρτήτως της διαδρομής που ακολουθεί το σύστημα, με τον ίδιο τρόπο που θα μπορούσε να αναβαθμονομήσει κανείς το όργανο ελέγχου της στάθμης της βενζίνης ενός αυτοκινήτου· ο οδηγός του αυτοκινήτου θα συνήθιζε τις αναβαθμονομημένες ενδείξεις του οργάνου και θα γνώριζε, πάλι, πότε τελειώνει η βενζίνη. Μετασχηματισμούς βαθμονόμησης συναντά κανείς πολύ συχνά στη φυσική, όταν υπάρχει κάποια ελευθερία στον καθορισμό ενός μεγέθους δίχως να διαφοροποιείται το φυσικό περιεχόμενο του προβλήματος. Παράδειγμα τέτοιου μετασχηματισμού που έχουμε ήδη συναντήσει είναι η αυθαίρετη επιλογή του σημείου όπου θεωρεί κανείς ότι η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται. Στην περίπτωση αυτή, όμως, αυτό που έχει σημασία είναι ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η ίδια η δυναμική ενέργεια και όχι η απόλυτη τιμή της.

Τι αναβαθμονομείται;

3.2 Κατασκευή της Λαγκρανζιανής βάσει συμμετριών

Η βαθύτερη προέλευση της λαγκρανζιανής συνάρτησης θα αποκαλυφθεί στη συνέχεια, όταν κατασκευάσουμε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση του ελεύθερου σωματιδίου στηριζόμενοι αποκλειστικά στις συμμετρίες του χώρου και του χρόνου και στο παρατηρησιακό δεδομένο ότι μόνο η αρχική θέση και η ταχύτητα του φυσικού συστήματος αρκούν για να περιγραφεί πλήρως η εξέλιξη του συστήματος. Το τελευταίο αυτό δεδομένο ενσωματώνεται άμεσα στη μορφή της Λαγκρανζιανής, όταν θεωρούμε ότι αυτή είναι συνάρτηση μόνο των θέσεων και των ταχυτήτων και όχι ανώτερων χρονικών παραγώγων. Ας ξεκινήσουμε, λοιπόν, με κάποια γενική λαγκρανζιανή συνάρτηση για το ελεύθερο σωματίδιο που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$L = L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \ .$$

Οι συμμετρίες του Σύμπαντος αντικατοπτρίζονται στη Λαγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου

Λόγω της *ομογένειας του χρόνου*, που απαιτεί να έχουν οι νόμοι της φύσης την ίδια μορφή σε κάθε χρονική στιγμή, δεν είναι δυνατόν η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου να εξαρτάται από το χρόνο. Οποιαδήποτε χρονική στιγμή η Λαγκρανζιανή πρέπει να είναι η ίδια, αφού όλες οι χρονικές στιγμές είναι ισοδύναμες. Επομένως, η ομογένεια του χρόνου μας οδηγεί στην απλούστερη Λαγκρανζιανή

$$L = L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}\right) \ .$$

Αντιστοίχως, λόγω της *ομογένειας του χώρου*, που απαιτεί να είναι ίδιοι οι φυσικοί νόμοι σε κάθε σημείο του χώρου, η Λαγκρανζιανή δεν είναι δυνατόν να εξαρτάται ούτε από τη θέση του σωματιδίου. Το ελεύθερο σωματίδιο, όπου και αν βρίσκεται, πρέπει να περιγράφεται από την ίδια λαγκρανζιανή συνάρτηση, αφού κάθε σημείο του χώρου είναι ισοδύναμο. Επομένως, η μορφή της Λαγκρανζιανής πρέπει να είναι ακόμη πιο απλή

$$L = L\left(\dot{\vec{x}}\right) \ .$$

Τέλος, η *ισοτροπία του χώρου*, δηλαδή η ανεξαρτησία της περιγραφής του σωματιδίου από την κατεύθυνση της κίνησής του, όποια και αν είναι αυτή, αφού όλες οι κατευθύνσεις του χώρου θεωρούνται ισοδύναμες,[2] επιβάλλει η λαγκρανζιανή συνάρτηση του ελεύθερου σωματιδίου να είναι συνάρτηση μόνο του μέτρου της ταχύτητας

$$L = L\left(|\dot{\vec{x}}|\right) \ .$$

Είναι ενδιαφέρον ότι οι τρεις βασικές και προφανείς συμμετρίες του Σύμπαντος (η ισοτροπία του χώρου, η ομογένεια του χώρου και του χρόνου) δεν είναι αρκετές για τον προσδιορισμό της Λαγκρανζιανής ενός ελεύθερου σωματιδίου, η οποία κρύβει και όλη τη δυναμική του σωματιδίου. Η ανακάλυψη, ωστόσο, μιας νέας συμμετρίας από τον Γαλιλαίο ήταν καθοριστικής σημασίας για τον προσδιορισμό της δυναμικής του ελεύθερου σωματιδίου.

Η *γαλιλαιϊκή συμμετρία*, δηλαδή η συμμετρία περιγραφής του συστήματος σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα, απαιτεί να μην αλλάζει το

[2]Φαίνεται ίσως περίεργο που αναφέρουμε για το χώρο τα χαρακτηριστικά και της ομογένειας και της ισοτροπίας, ενώ για το χρόνο μόνο αυτό της ομογένειας. Ο λόγος είναι ότι ο χρόνος είναι μονοδιάστατος, οπότε η έννοια της ισοτροπίας του χρόνου σημαίνει απλώς ότι ο χρόνος θα μπορούσε να ρέει στα μηχανικά συστήματα είτε προς το μέλλον είτε προς το παρελθόν χωρίς καμία διαφορά.

φυσικό περιεχόμενο της Λαγκρανζιανής, όταν η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από κάποιο άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Έτσι, ο μετασχηματισμός

$$\vec{x} \to \vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{V}t \, ,$$

όπου $\vec{V}$ είναι η σταθερή σχετική ταχύτητα κίνησης των δύο αδρανειακών συστημάτων –του καινούργιου ως προς το αρχικό– δεν μπορεί να επιφέρει τίποτε περισσότερο από ένα μετασχηματισμό βαθμονόμησης στη Λαγκρανζιανή, ο οποίος, όπως έχουμε αναφέρει, δεν αλλάζει το φυσικό περιεχόμενο της Λαγκρανζιανής αφού οδηγεί σε ίδιες εξισώσεις κίνησης. Το αποτέλεσμα δηλαδή του γαλιλαϊκού μετασχηματισμού στη Λαγκρανζιανή πρέπει να είναι[3]

$$L\left(|\dot{\vec{x}}\,'|^2\right) = L\left(|\dot{\vec{x}}|^2\right) + \frac{df(\vec{x},t)}{dt} \, . \tag{3.6}$$

Η γαλιλαϊκή συμμετρία κρύβεται μέσα σε ένα μετασχηματισμό βαθμονόμησης

Όμως,

$$L\left(|\dot{\vec{x}}\,'|^2\right) = L\left(|\dot{\vec{x}} - \vec{V}|^2\right) = L\left(\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}} + \vec{V}\cdot\vec{V} - 2\vec{V}\cdot\dot{\vec{x}}\right) \, .$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή το $\vec{V}$ είναι σταθερό διάνυσμα, οι δύο τελευταίοι όροι στο όρισμα της συνάρτησης αποτελούν μια τέλεια χρονική παράγωγο, αφού

$$\vec{V}\cdot\vec{V} - 2\vec{V}\cdot\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}\cdot\vec{V}t - 2\vec{V}\cdot\vec{x}\right) \, . \tag{3.7}$$

Επομένως, αναζητούμε μια συνάρτηση $L(|\vec{u}|^2)$ για την οποία να ισχύει

$$L\left(|\vec{u}|^2 + \frac{dg}{dt}\right) = L(|\vec{u}|^2) + \frac{df}{dt} \, ,$$

όπου g μια δεδομένη συνάρτηση –η συνάρτηση εντός της παρένθεσης στη σχέση (3.7)– και f μια οποιαδήποτε συνάρτηση των $\vec{x}$ και t. Φαίνεται αμέσως ότι μια τέτοια κατάλληλη συνάρτηση είναι η γραμμική συνάρτηση

$$L(|\vec{u}|^2) = a|\vec{u}|^2 + b \, .$$

Είναι διαισθητικά προφανές ότι δεν είναι δυνατόν κάποια άλλη συνάρτηση εκτός από τη γραμμική να ικανοποιεί τη ζητούμενη συνθήκη, αφού οποιαδήποτε μη γραμμικότητα της συνάρτησης θα είχε ως αποτέλεσμα να εμφανιστεί το τετράγωνο της dg/dt, το οποίο δεν αποτελεί τέλεια χρονική παράγωγο. Βασιζόμενοι σε αυτή την παρατήρηση, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε αυστηρότερα ότι η γραμμική συνάρτηση είναι η μοναδική που μπορούμε να κατασκευάσουμε με την παραπάνω ιδιότητα. Ας θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση g είναι καταλλήλως μικρή· αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε επιλέγοντας μικρή σχετικά ταχύτητα $\vec{V}$. Αν αναπτύξουμε την L σε όρους μέχρι τάξης $\vec{V}$ λαμβάνουμε

Μόνο η γραμμική συνάρτηση ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας

$$L\left(|\vec{u}|^2 + \frac{dg}{dt}\right) = L\left(|\vec{u}|^2\right) + \left.\frac{dL(y)}{dy}\right|_{y=|\vec{u}|^2} \frac{d(-2\vec{V}\cdot\vec{x})}{dt} + \mathcal{O}(|\vec{V}|^2) \, . \tag{3.8}$$

[3] Για να διευκολυνθούμε στην εκτέλεση των πράξεων θα θεωρήσουμε την L, χωρίς να αλλοιώσουμε το περιεχόμενό της, συνάρτηση όχι του $|\dot{\vec{x}}|$, αλλά του $|\dot{\vec{x}}|^2$.

Για να είναι ο γραμμικός ως προς $\vec{V}$ όρος μια τέλεια χρονική παράγωγος, πρέπει ο παράγοντας

$$\left.\frac{dL(y)}{dy}\right|_{y=|\vec{u}|^2} ,$$

να είναι μια σταθερά a, δηλαδή,

$$L(|\vec{u}|^2) = a|\vec{u}|^2 + b \ .$$

Συνοπτικά η Λαγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου σε έναν κόσμο που παρουσιάζει όλες τις παραπάνω συμμετρίες πρέπει να έχει την εξής μορφή

$$L_{\text{ελ. σωμ.}} = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 \ . \tag{3.9}$$

Η προσθετική σταθερά b αφαιρέθηκε από τον παραπάνω τύπο, αφού, όπως έχουμε μάθει, μια τέτοια σταθερά δεν έχει φυσική σημασία (τετριμμένος μετασχηματισμός βαθμονόμησης), ενώ η σταθερά a απλώς αντικαταστάθηκε με τη σταθερά $m/2$. Η τελευταία αυτή επιλογή είναι εντελώς αυθαίρετη, αφού οποιοσδήποτε πολλαπλασιαστικός παράγοντας θα ήταν ικανοποιητικός. Πρόκειται, ωστόσο, για μια λογική επιλογή, αφού στην κλασική φυσική η μοναδική ιδιότητα ενός υλικού σωματιδίου που το διακρίνει από τα άλλα είναι μονάχα η μάζα του. Όσο για το $1/2$ είναι και αυτό αυθαίρετο και έχει επιλεγεί για να μας θυμίζει μια γνωστή φυσική ποσότητα, την κινητική ενέργεια.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια δύο σωματίδια που δεν αλληλεπιδρούν. Η συνολική Λαγκρανζιανή αυτού του συστήματος σωματιδίων είναι το άθροισμα των Λαγκρανζιανών των δύο επιμέρους σωματιδίων,

Η Λαγκρανζιανή δύο μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{x}}_2|^2 , \tag{3.10}$$

όπου $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ οι θέσεις των δύο σωματιδίων.

Έστω, τώρα, ότι τα δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν. Στο όριο που η αλληλεπίδραση είναι αμελητέα η ολική Λαγκρανζιανή του συστήματος πρέπει να τείνει στην παραπάνω Λαγκρανζιανή, οπότε η Λαγκρανζιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων, η οποία εξαρτάται από τις συντεταγμένες και τις ταχύτητες και των δύο σωματιδίων, θα πρέπει να εμφανίζεται προσθετικά. Θα μπορούσε να αναζητήσει κανείς έναν όρο αλληλεπίδρασης, ο οποίος να πολλαπλασιάζει τη Λαγκρανζιανή των δύο ελεύθερων σωματιδίων και να είναι τέτοιος ώστε, όταν τα δύο σωματίδια απομακρυνθούν πολύ το ένα από το άλλο, ο όρος αυτός να τείνει στη μονάδα, ή ακόμη να κατασκευάσει μια ακόμη πιο περίπλοκη συναρτησιακή μορφή για να περιγράψει την αλληλεπίδραση. Κάτι τέτοιο, όμως, θα οδηγούσε σε πολύ πιο σύνθετους φυσικούς νόμους κίνησης οι οποίοι όμως δεν επαληθεύονται πειραματικά. Οπότε η απλούστερη Λαγκρανζιανή είναι η

Η γενικότερη Λαγκρανζιανή δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{x}}_2|^2 + L_{\text{αλληλ}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, t) \ . \tag{3.11}$$

Τι μορφή μπορεί να έχει η $L_{\text{αλληλ}}$; Για να την προσδιορίσουμε θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τις συμμετρίες του Σύμπαντος. Η Λαγκρανζιανή αυτή δεν είναι δυνατόν να εξαρτάται από το χρόνο και συνεπώς πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη σε χρονικές μεταθέσεις, διότι οι φυσικοί νόμοι λόγω της ομογένειας του χρόνου είναι ίδιοι σε κάθε χρονική στιγμή. Πρέπει να εξαρτάται μόνο από τη σχετική θέση και τη σχετική ταχύτητα των σωματιδίων, έτσι ώστε οι φυσικοί νόμοι να παραμένουν αναλλοίωτοι (συμμετρικοί) ως προς τις χωρικές μεταθέσεις (ομογένεια του χώρου) και να ικανοποιούν τη γαλιλαϊκή συμμετρία. Συνεπώς, η Λαγκρανζιανή της αλληλεπίδρασης πρέπει να είναι της μορφής

$$L_{\alpha\lambda\lambda\eta\lambda} = L_{\alpha\lambda\lambda\eta\lambda}\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}\right) \ ,$$

όπου $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ η σχετική θέση των σωματιδίων και $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2$ η σχετική τους ταχύτητα. Τέλος, η Λαγκρανζιανή πρέπει να έχει μορφή ανεξάρτητη από την κατεύθυνση των αξόνων που επιλέξαμε για να περιγράψουμε το σύστημα, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισοτροπία του χώρου. Αυτό σημαίνει ότι η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη στις στροφές και συνεπώς εξαρτάται μόνο από τις βαθμωτές μεταβλητές που μπορούν να κατασκευαστούν από τα $\vec{x}$, $\dot{\vec{x}}$. Αυτές είναι οι

$$|\vec{x}| \ , \ |\dot{\vec{x}}| \ , \ \vec{x} \cdot \dot{\vec{x}} \ , \ |\vec{x} \times \dot{\vec{x}}| \ .$$

Ειδικά η τελευταία ποσότητα μπορεί να κατασκευαστεί από τις υπόλοιπες τρεις αφού

$$(\vec{x} \times \dot{\vec{x}})^2 = (\vec{x})^2 (\dot{\vec{x}})^2 - (\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}})^2 \ ,$$

οπότε μόνο οι τρεις πρώτες ποσότητες είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη. Επίσης, στις παραπάνω εκφράσεις δεν συμπεριλάβαμε ποσότητες της μορφής $\vec{a} \cdot \vec{x}$, διότι αυτό θα σήμαινε ότι στο φυσικό κόσμο υπάρχει κάποια προεξάρχουσα διεύθυνση που προσδιορίζεται από το διάνυσμα $\vec{a}$. Συνεπώς, μια Λαγκρανζιανή αλληλεπίδρασης που ικανοποιεί τις ευκλείδειες συμμετρίες (ομογένεια και ισοτροπία του χώρου), τη γαλιλαϊκή συμμετρία και την ομογένεια του χρόνου πρέπει να είναι της μορφής

$$L_{\alpha\lambda\lambda\eta\lambda}\Big(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|, |\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2|, (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot (\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2)\Big) \ .$$

Στην κατασκευή της λαγκρανζιανής αλληλεπίδρασης έχουμε υποθέσει ότι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων είναι ακαριαίες· αυτό σημαίνει ότι η αλλαγή της θέσης ή της ταχύτητας του ενός σωματιδίου επηρεάζει ακαριαία το άλλο σωματίδιο. Στην κλασική μηχανική η παραδοχή ότι ο χρόνος είναι απόλυτος, ίδιος δηλαδή σε όλα τα συστήματα αναφοράς, και η αρχή της γαλιλαϊκής σχετικότητας απαιτούν οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων να είναι ακαριαίες. Εάν δεν συνέβαινε αυτό και οι αλληλεπιδράσεις διαδίδονταν με κάποια πεπερασμένη ταχύτητα, αυτή η ταχύτητα θα ήταν διαφορετική σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς, γεγονός που σημαίνει ότι κάποιος θα είχε τη δυνατότητα να προσδιορίσει την ταχύτητα της ίδιας του της κίνησης, κάτι που αποτελεί σαφή παραβίαση της γαλιλαϊκής αρχής της σχετικότητας.

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα που απαιτεί η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκείται στο πρώτο σωματίδιο από το δεύτερο να είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη $\vec{F}_{21}$ που ασκείται στο δεύτερο σωματίδιο από το πρώτο, δεν επιτρέπει καμία άλλη εξάρτηση της λαγκρανζιανής αλληλεπίδρασης παρά μόνο από τη σχετική θέση των σωματιδίων. Έτσι, η Λαγκρανζιανή δύο αλληλεπιδρώντων με νευτώνειες δυνάμεις σωματιδίων θα έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{x}}_2|^2 - V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)\ . \tag{3.12}$$

Πριν ολοκληρώσουμε τη συζήτηση σχετικά με τη Λαγκρανζιανή δύο σωματιδίων, πρέπει να σημειώσουμε ότι οι παράμετροι m_1, m_2 της παραπάνω Λαγκρανζιανής δεν έχουν στην κατασκευή μας το φυσικό νόημα της μάζας των σωματιδίων, αφού ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας που είχαμε εισαγάγει στη Λαγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου, στην οποία βασίσαμε την κατασκευή μας, ήταν εντελώς αυθαίρετος. Η σχέση μεταξύ αυτών των παραμέτρων μπορεί να καθοριστεί πειραματικά με τον ίδιο ουσιαστικά τρόπο που ο Νεύτωνας επιχείρησε να μετρήσει την αδράνεια των σωμάτων. Οι σχετικές επιταχύνσεις των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων είναι αντιστρόφως ανάλογες με το λόγο των παραμέτρων m_1 και m_2, όπως μπορεί να αποδείξει κανείς από τις εξισώσεις Euler - Lagrange για την παραπάνω Λαγκρανζιανή. Έτσι, θεωρώντας τη m_1 ίση με τη μονάδα, μπορεί κανείς να "ζυγίσει" τις παραμέτρους–μάζες όλων των άλλων σωματιδίων και μάλιστα ανεξάρτητα από τη μορφή του δυναμικού αλληλεπίδρασης της εκάστοτε μάζας με τη μάζα–πρότυπο.

Πώς προκύπτουν οι μάζες;

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε τη Λαγκρανζιανή ενός απομονωμένου συστήματος n σωματιδίων, τα οποία αλληλεπιδρούν με νευτώνειες δυνάμεις και στα οποία δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη,

Η Λαγκρανζιανή απομονωμένου συστήματος σωματιδίων

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i|\dot{\vec{x}}_i|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)\ . \tag{3.13}$$

Το $1/2$ στο διπλό άθροισμα έχει συμπεριληφθεί έτσι ώστε όλα τα ζεύγη των δυναμικών αλληλεπίδρασης να λαμβάνονται μόνο μία φορά.

Η Λαγκρανζιανή αυτή δεν είναι η πιο γενική Λαγκρανζιανή που μπορούμε να κατασκευάσουμε για ένα τέτοιο σύστημα τηρώντας τις συμμετρίες του χώρου και του χρόνου και επιλέγοντας αλληλεπιδράσεις που εξαρτώνται μόνο από τις θέσεις των σωματιδίων. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να θεωρήσουμε δυναμικά αλληλεπίδρασης που εξαρτώνται από τις θέσεις τριών ή και περισσότερων σωματιδίων. Απλώς η Λαγκρανζιανή της σχέσης (3.13) είναι η απλούστερη επέκταση της Λαγκρανζιανής των δύο σωματιδίων. Από φυσικής άποψης η Λαγκρανζιανή της έκφρασης (3.13) θα μπορούσε να δικαιολογηθεί, αν το σωματίδιο–φορέας της αλληλεπίδρασης, το οποίο ανταλλάσσεται μεταξύ των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων, έχει τόσο ασθενή σταθερά σύζευξης ώστε η ανταλλαγή περισσότερων του ενός τέτοιων σωματιδίων–φορέων μεταξύ δύο σωματιδίων να είναι εξαιρετικά απίθανο να συμβεί. Αυτό ισχύει για τις ηλεκτρασθενείς και τις βαρυτικές, όχι όμως και για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.1. *Δείξτε ότι η Λαγκρανζιανή (3.13) οδηγεί σε αλληλεπιδράσεις, οι οποίες ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, δηλαδή οι δυνάμεις που ασκούνται από το ένα σωματίδιο στο άλλο ικανοποιούν τις σχέσεις* $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

3.3 Το εύρος ισχύος της αρχής του Χάμιλτον

Είδαμε ότι η φυσική κίνηση ενός σωματιδίου σε συντηρητικό πεδίο όπου η δύναμη προκύπτει από κάποιο δυναμικό V,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \ ,$$

ικανοποιεί την αρχή ελάχιστης δράσης του Χάμιλτον με Λαγκρανζιανή

$$L = T - V \ ,$$

όπου T η κινητική ενέργεια του σωματιδίου και V η δυναμική του ενέργεια.[4] Σε αυτή την περίπτωση οι νόμοι του Νεύτωνα είναι ισοδύναμοι με την αρχή του Χάμιλτον. Εδώ βεβαίως αναφερόμαστε μόνο στους δύο πρώτους νόμους· ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα αποτυπώνεται στη μορφή της κινητικής ενέργειας T που εισέρχεται στη λαγκρανζιανή συνάρτηση, ενώ ο δεύτερος νόμος αποτυπώνεται με τον όρο της δυναμικής ενέργειας που εισέρχεται αθροιστικά (και όχι πολλαπλασιαστικά ή με άλλο τρόπο) στη λαγκρανζιανή συνάρτηση. Οι νόμοι του Νεύτωνα, όμως, είναι υπό μια έννοια γενικότεροι από την αρχή του Χάμιλτον, αφού για ένα οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα δεν υπάρχει κατ' ανάγκη λαγκρανζιανή συνάρτηση, η οποία να οδηγεί μέσω των εξισώσεων Euler - Lagrange στις εξισώσεις κίνησης του συστήματος. Για παράδειγμα, για συστήματα στα οποία υπάρχει ανάλωση ενέργειας, εξαιτίας, λόγου χάρη, της τριβής, δεν είναι εν γένει εφικτή η κατασκευή λαγκρανζιανής συνάρτησης που να περιγράφει το σύστημα. Έτσι, ενώ η κίνηση ενός ιδανικού ρευστού, που είναι ένα συνονθύλευμα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων, μπορεί να προκύψει μέσω των εξισώσεων Euler - Lagrange από μία κατάλληλη Λαγκρανζιανή, η κίνηση πραγματικών ρευστών με ιξώδες στα οποία υπεισέρχεται ανάλωση δεν μπορεί[5] να περιγραφεί από κάποια Λαγκρανζιανή.

Βασιζόμενοι επίσης στην αρχή του Χάμιλτον, όπως τουλάχιστον την έχουμε διατυπώσει, αδυνατούμε να περιγράψουμε την κίνηση σωματιδίων σε γενικότερα μη συντηρητικά πεδία. Τέλος, όταν το δυναμικό εξαρτάται από τις ταχύτητες, οπότε οι δυναμικοί νόμοι δεν είναι αναλλοίωτοι στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, η φυσική κίνηση δεν διέπεται συνήθως από κάποια Λαγκρανζιανή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.2. *Η Λαγκρανζιανή* $L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}e^{\gamma t/m}(m\dot{x}^2 - kx^2)$ *περιγράφει κάποιο γνωστό σας φυσικό σύστημα; Πρόκειται για κίνηση σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων;*

[4] Στο εξής στο βιβλίο θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα T και V, αντί των $E_{\text{κιν}}$, $E_{\text{δυν}}$, ακολουθώντας τη διεθνή βιβλιογραφία.

[5] Για να είμαστε πιο σαφείς, δεν έχει βρεθεί έως τώρα τέτοια Λαγκρανζιανή.

Άσκηση 3.3. *Να βρεθεί η Λαγκρανζιανή που περιγράφει τη μονοδιάστατη κίνηση σωματιδίου μάζας m, που κινείται υπό την επενέργεια μιας χρονοεξαρτώμενης δύναμης της μορφής $F(t)$.*

Όλα, όμως, τα θεμελιώδη πεδία δυνάμεων που γνωρίζουμε είναι συντηρητικά και ως εκ τούτου η δυναμική συμπεριφορά τους μπορεί να προκύψει από κάποια Λαγκρανζιανή. Παρά το γεγονός, λοιπόν, ότι οι νόμοι του Νεύτωνα εφαρμόζονται σε ευρύτερα μηχανικά συστήματα απ᾽ ό,τι η αρχή της ελάχιστης δράσης του Χάμιλτον, η αρχή του Χάμιλτον έχει ευρύτερη φυσική σημασία από τους νόμους του Νεύτωνα, διότι μας δίνει τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε σε πιο θεμελιώδες επίπεδο τους νόμους της φύσης, είτε αυτοί αναφέρονται σε μηχανικά συστήματα είτε όχι, να αντιληφθούμε από πού προέρχονται οι διατηρούμενες ποσότητες και να διαμορφώσουμε ένα πλαίσιο με το οποίο να μπορούμε να χειριστούμε τις νεώτερες θεωρίες της Φυσικής. Επιπλέον, όπως είδαμε ήδη στην περίπτωση του ελεύθερου σωματιδίου, η Λαγκρανζιανή μπορεί να κατασκευαστεί με τη χρήση γενικών επιχειρημάτων που βασίζονται στις συμμετρίες του φυσικού συστήματος. Η λαγκρανζιανή θεώρηση μάς δίνει τη δυνατότητα να προβλέπουμε τις εξισώσεις κίνησης όταν αυτές δεν είναι γνωστές, και βασιζόμενοι στο παράδειγμα της νευτώνειας μηχανικής να οικοδομούμε φυσικές θεωρίες που περιγράφουν φαινόμενα για τα οποία οι νόμοι που τα διέπουν μας είναι άγνωστοι. Η δράση σε αυτήν τη θεώρηση προκύπτει ως μια ποσότητα εξέχουσας φυσικής σημασίας, η οποία επιβιώνει κατά τη μετάβαση από την κλασική στην κβαντική μηχανική και μάλιστα αποκτά ιδιαίτερο φυσικό νόημα. Μέσω της δράσης, για παράδειγμα, είναι δυνατή η θεμελίωση της κβαντικής μηχανικής με έναν ιδιαίτερα διαισθητικό και πρωτότυπο τρόπο μέσω των *ολοκληρωμάτων διαδρομής* (path integrals), που εισήγαγαν οι Paul Adrien Maurice Dirac [1902-1984] και Richard Phillips Feynman [1918-1988].

3.4 Λαγκρανζιανή φορτισμένου σωματιδίου

Έχουμε μάθει έως τώρα πώς να κατασκευάζουμε Λαγκρανζιανές για σωματίδια ή γενικά για μηχανικά συστήματα που κινούνται σε δυναμικά πεδία που έχουν καθαρά χωρική εξάρτηση. Εξετάσαμε επίσης παραδείγματα συστημάτων με ανάλωση για τα οποία είναι δυνατή η κατασκευή της αντίστοιχης Λαγκρανζιανής (βλ. Ασκήσεις 2,3). Τι μπορούμε, όμως, να κάνουμε σε περιπτώσεις που η δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο εξαρτάται από την ταχύτητα του σωματιδίου; Ένα παρόποιο πρόβλημα έχουμε ήδη αντιμετωπίσει, όταν δοκιμάσαμε να περιγράψουμε με λαγκρανζιανό τρόπο την αντίσταση σε κάποιο μέσο, όταν αυτή είναι ανάλογη της ταχύτητας. Η γενική αντιμετώπιση τέτοιων δυνάμεων, μολονότι δεν είναι πάντοτε εφικτή, δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού τέτοιου είδους δυνάμεις δεν είναι θεμελιώδεις δυνάμεις· είναι απλώς ένα

Δυσκολίες κατασκευής Λαγκρανζιανής για δυνάμεις εξαρτώμενες από την ταχύτητα.

στατιστικό αποτέλεσμα ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων που ασκούνται σε μικροσκοπικό επίπεδο. Υπάρχει, ωστόσο, μια δύναμη εξαρτώμενη από την ταχύτητα, η οποία, μολονότι είναι θεμελιώδης και συντηρητική, δεν μπορεί να προέλθει από κάποιο δυναμικό. Πρόκειται για τη δύναμη που διέπει την κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, η οποία οδηγεί στην εξίσωση κίνησης

$$m\ddot{\vec{x}} = q\left(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}\right) \,, \tag{3.14}$$

όπου $\vec{E}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και $\vec{B}$ η μαγνητική επαγωγή στη θέση $\vec{x}$ που βρίσκεται το φορτισμένο με φορτίο q σωματίδιο τη χρονική στιγμή t.

Η δυσκολία κατασκευής της αντίστοιχης Λαγκρανζιανής έγκειται στο γεγονός, ότι, αφού η δύναμη

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}\right) \,, \tag{3.15}$$

εξαρτάται από την ταχύτητα, πρέπει ο συνήθης όρος της δυναμικής ενέργειας στη Λαγκρανζιανή, αν βέβαια υπάρχει Λαγκρανζιανή, να εμπεριέχει την ταχύτητα. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, η γενικευμένη ορμή που εμφανίζεται στις εξισώσεις Euler - Lagrange εκτός από την κλασική της μορφή που προέρχεται από την παραγώγιση της κινητικής ενέργειας θα περικλείει και άλλον έναν όρο εξαιτίας της εξάρτησης της δυναμικής ενέργειας από την ταχύτητα. Αυτό περιπλέκει τη δυναμική εξίσωση κίνησης και πρέπει να είναι κανείς αρκετά τυχερός για να καταφέρει να αναπαραγάγει το δυναμικό νόμο (3.14) ρυθμίζοντας κατάλληλα τη μορφή της λαγκρανζιανής συνάρτησης.

Έστω ότι η επιθυμητή Λαγκρανζιανή έχει την κλασική μορφή

$$L = T - V \,, \tag{3.16}$$

όπου T η κινητική ενέργεια του σωματιδίου και V η δυναμική του ενέργεια, η οποία προφανώς θα εξαρτάται από την ταχύτητα του σωματιδίου με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατόν να αναπαραχθεί η εξαρτώμενη από την ταχύτητα δύναμη Lorentz. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι, αν είναι δυνατή η κατασκευή μιας τέτοιου τύπου Λαγκρανζιανής, η δυναμική ενέργεια πρέπει να έχει το πολύ γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητα, ώστε ο όρος

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{x}}}\right) - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}}$$

Ο στόχος μας επιβάλλει μια δυναμική ενέργεια γραμμική ως προς την ταχύτητα

της εξίσωσης Euler - Lagrange να παράγει μια δύναμη το πολύ γραμμική ως προς την ταχύτητα, όπως είναι η δύναμη Lorentz. Οποιαδήποτε άλλη μη γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας για τη δυναμική ενέργεια θα είχε ως αποτέλεσμα μια δύναμη μη γραμμική ως προς την ταχύτητα, όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς άμεσα. Συνεπώς, θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια έχει τη μορφή

$$V(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = q\left[-\vec{A}(\vec{x}, t) \cdot \dot{\vec{x}} + \phi(\vec{x}, t)\right] . \tag{3.17}$$

Η δυναμική ενέργεια, όντας μέρος της Λαγκρανζιανής, δεν μπορεί παρά να είναι μια βαθμωτή ποσότητα, γεγονός που δικαιολογεί την ύπαρξη του εσωτερικού γινομένου.[6] Παράλληλα, η παρουσία του φορτίου ως πολλαπλασιαστικού παράγοντα επιβάλλεται από την απαίτηση να είναι η δύναμη ανάλογη του φορτίου q του σωματιδίου. Τέλος, η παρουσία του αρνητικού προσήμου στον πρώτο όρο εντός της αγκύλης δεν έχει κανένα ουσιαστικό λόγο· το πρόσημο επιλέχθηκε αυθαίρετα με σκοπό να αποκτήσουν οι ποσότητες $\vec{A}, \phi$ συγκεκριμένο φυσικό περιεχόμενο στο τέλος της ανάλυσης.

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange για μια Λαγκρανζιανή με τέτοια δυναμική ενέργεια καταλήγουν στις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$m\ddot{\vec{x}} \;=\; q\left(-\frac{d\vec{A}(\vec{x},t)}{dt}+\vec{\nabla}\left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x},t)\right)-\vec{\nabla}\phi\right)\ . \tag{3.18}$$

Άσκηση 3.4. *Εκτελέστε τις πράξεις εντός των εξισώσεων Euler - Lagrange και επιβεβαιώστε τη σχέση (3.18).* ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Η παραπάνω εξίσωση θα μπορούσε να λάβει τη μορφή της δυναμικής εξίσωσης για το σωματίδιο, αν είχαμε τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε ποσότητες $\vec{A}, \phi$ τέτοιες ώστε να ισχύει

$$-\frac{d\vec{A}(\vec{x},t)}{dt}+\vec{\nabla}\left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x},t)\right)-\vec{\nabla}\phi=\vec{E}+\dot{\vec{x}}\times\vec{B}\ . \tag{3.19}$$

Η πρώτη παράγωγος που εμφανίζεται στο αριστερό σκέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι η ολική χρονική παράγωγος του ανυσματικού πεδίου $\vec{A}$ κατά μήκος της τροχιάς του σωματιδίου. Σε αυτήν περιλαμβάνεται η μεταβολή του $\vec{A}$ εξαιτίας της μεταβολής του χρόνου καθώς επίσης και η μεταβολή του $\vec{A}$ εξαιτίας της μεταβολής της θέσης του σωματιδίου στον αντίστοιχο χρόνο. Συγκεκριμένα, επειδή το $\vec{x}$ έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο, θα ισχύει

$$\frac{d\vec{A}(\vec{x},t)}{dt}=\frac{\partial\vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t}+\left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}(\vec{x},t)\ .$$

Έτσι, το αριστερό σκέλος της (3.19) μπορεί να γραφεί ως

$$-\frac{\partial\vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t}-\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}(\vec{x},t)+\vec{\nabla}\left(\vec{u}\cdot\vec{A}(\vec{x},t)\right)-\vec{\nabla}\phi(\vec{x},t)\ , \tag{3.20}$$

[6] Μια άλλη ίσως δυνατότητα κατασκευής βαθμωτού μεγέθους, που ίσως μοιάζει γραμμικό ως προς την ταχύτητα, θα ήταν το $|\vec{C}\times\vec{u}|$, ή το $|\vec{u}|$. Όμως και οι δύο αυτές ποσότητες, μολονότι βαθμωτές, δεν είναι πραγματικά γραμμικές ως προς την ταχύτητα, αφού η αντικατάσταση της $\vec{u}$ με $\vec{u}_1+\vec{u}_2$ δεν οδηγεί, εν γένει, σε άθροισμα αντίστοιχων ποσοτήτων.

όπου συμβολίσαμε με $\vec{u} \equiv \dot{\vec{x}}$ τη ταχύτητα του σωματιδίου.

Αν επικαλεστούμε και τη μαθηματική ταυτότητα[7]

$$\vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{A}) - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \,, \tag{3.21}$$

που ισχύει όταν το διάνυσμα $\vec{u}$ δεν έχει εξάρτηση από το $\vec{x}$ (όπως εδώ θεωρούμε ότι συμβαίνει με τις μεταβλητές $\vec{x}$ και $\dot{\vec{x}}$), μπορούμε να ξαναγράψουμε τη σχέση (3.19) με μια μικρή ανακατανομή των όρων ως ακολούθως:

$$\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B} = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi(\vec{x},t) + \vec{u} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x},t)\right) \,. \tag{3.22}$$

Προτού προσπαθήσουμε να συνδέσουμε τους όρους του δεξιού σκέλους της (3.22) με το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, ας θυμηθούμε τις σχέσεις που ικανοποιούν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο μέσω των εξισώσεων Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \,, \tag{3.23}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \,, \tag{3.24}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \,, \tag{3.25}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \,, \tag{3.26}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα φορτίου και $\vec{j}$ η πυκνότητα ρεύματος, ποσότητες που θεωρούνται δεδομένες και παίζουν το ρόλο των πηγών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Επιπλέον, οι πυκνότητες $\rho, \vec{j}$ ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \,. \tag{3.27}$$

Οι εξισώσεις του James Clerk Maxwell [1831-1879] έχουν γραφεί σε μονάδες Heaviside, δηλαδή σε τέτοιες μονάδες ώστε η δύναμη Coulomb μεταξύ δύο φορτίων να είναι,

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi r^2}$$

ενώ η ταχύτητα του φωτός έχει ληφθεί $c = 1$.

Από την $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ προκύπτει ότι η μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$ μπορεί να γραφεί ως ο στροβιλισμός κάποιου πεδίου

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \,, \tag{3.28}$$

όπου $\vec{A}$ το ανυσματικό δυναμικό.[8] Αντικαθιστώντας αυτή τη μορφή του μαγνητικού πεδίου στην (3.26) θα έχουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \,, \tag{3.29}$$

---

[7] Βλ. Μαθηματικό Παράρτημα.

[8] Προς το παρόν η ομοιότητα των συμβόλων για το ανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ και το ηλεκτρικό δυναμικό ϕ, που θα συναντήσουμε αμέσως στη συνέχεια, με τα αγνώστου ταυτότητας πεδία που εισαγάγαμε στη Λαγκρανζιανή είναι καθαρά συμπτωματική. Στο τέλος, όμως, της ανάλυσης θα φανεί γιατί επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε τα ίδια σύμβολα.

λόγω μεταθετικότητας των χρονικών με τις χωρικές παραγώγους. Συνεπώς, η έκφραση εντός της παρένθεσης, όντας αστρόβιλη, είναι η βαθμίδα κάποιου βαθμωτού πεδίου

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \,, \tag{3.30}$$

όπου ϕ το ηλεκτρικό δυναμικό. Έτσι, το ηλεκτρικό πεδίο εκφράζεται μέσω του ανυσματικού και του ηλεκτρικού δυναμικού ως

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \,. \tag{3.31}$$

Αν τώρα απαιτήσουμε η έκφραση (3.22) να επαληθεύεται ταυτοτικά, θεωρώντας ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο έχουν αντικατασταθεί από τις ισοδύναμες εκφράσεις τους (3.31,3.28), διαπιστώνουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{A}$ και το βαθμωτό πεδίο ϕ που εισαγάγαμε στη δυναμική ενέργεια της Λαγκρανζιανής δεν είναι τίποτε άλλο από το ανυσματικό δυναμικό και το ηλεκτρικό δυναμικό αντίστοιχα.

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι ένα φορτισμένο σωματίδιο μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφεται από τη Λαγκρανζιανή

Ιδού η πολυπόθητη Λαγκρανζιανή!

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 + q\vec{A}(\vec{x},t)\cdot\dot{\vec{x}} - q\phi(\vec{x},t) \,, \tag{3.32}$$

με τον προφανή συμβολισμό των διάφορων ποσοτήτων που παρουσιάζονται σε αυτή.[9]

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η γενικευμένη ορμή του σωματιδίου δεν είναι η κλασική $m\vec{u}$, αλλά η

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\vec{u} + q\vec{A} \,.$$

Ιδού και η ιδιόμορφη ορμή του συστήματος!

Την επιπλέον ποσότητα $q\vec{A}$ θα μπορούσαμε να την ερμηνεύσουμε ως συνεισφορά του μαγνητικού πεδίου στην ίδια την ορμή του σωματιδίου. Το γεγονός αυτό έχει άμεσες συνέπειες κυρίως σε κβαντομηχανικά συστήματα όπου η ορμή, που σε κάποιες περιπτώσεις είναι κβαντισμένη, είναι η γενικευμένη ορμή, όπως διατυπώθηκε στην προηγούμενη σχέση, και όχι η συνήθης.

Αξίζει επίσης να αναφέρουμε μια άλλη κοινή περίπτωση Λαγκρανζιανής με δυναμική ενέργεια που εξαρτάται από την ταχύτητα· πρόκειται για την περίπτωση σωματιδίου που κινείται σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Η αναλογία μάλιστα με το φορτισμένο σωματίδιο σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι πλήρης, αφού το ρόλο του μαγνητικού πεδίου τον παίζει η γωνιακή ταχύτητα. Θα κατασκευάσουμε την αντίστοιχη Λαγκρανζιανή με διαφορετικό τρόπο εκτελώντας απλώς έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων, όταν ασχοληθούμε στο Κεφάλαιο 6 με το θέμα των στροφών.

[9] Στην παραπάνω κατασκευή θεωρήσαμε την ταχύτητα του φωτός ίση με τη μονάδα, όπως μπορείτε να διαπιστώσετε από τη γραφή των εξισώσεων του Maxwell. Αν θέλουμε να επαναφέρουμε τη σταθερά αυτή στις εκφράσεις μας ώστε να εργαζόμαστε με συνήθεις μονάδες ο όρος $q\vec{A}(\vec{x},t)$ θα πρέπει να αντικατασταθεί με τον όρο $q\vec{A}(\vec{x},t)/c$.

3.5 Λαγκρανζιανή δεσμευμένης κίνησης σωματιδίων

Έχουμε επιτύχει έως τώρα να κατασκευάσουμε Λαγκρανζιανές για σωματίδια που κινούνται μέσα σε συντηρητικά πεδία, τα οποία πηγάζουν από δυναμικά, ή μέσα σε πεδία που, αν και είναι συντηρητικά, εξαρτώνται από τις ταχύτητες των σωματιδίων. Εκτός, όμως, από την αδυναμία κατασκευής Λαγκρανζιανής στην περίπτωση μη συντηρητικών πεδίων –αδυναμία που, όπως αναφέραμε, δεν έχει ουσιαστική σημασία– γεννάται ένας γενικότερος προβληματισμός σχετικά με την ύπαρξη Λαγκρανζιανής για μηχανικά συστήματα που υπόκεινται σε κάποιον περιορισμό όσον αφορά στην κίνησή τους. Οι περιορισμοί αυτοί ονομάζονται γενικότερα *σύνδεσμοι*. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα θα εξετάσουμε την περίπτωση ενός σωματιδίου, το οποίο βρίσκεται μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας, αλλά είναι υποχρεωμένο να κινείται επάνω στο οριζόντιο επίπεδο $z = 0$. Από τους νόμους του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη, ομαλή κίνηση στο επίπεδο $z = 0$ και ότι σε αυτό ασκείται μια κατακόρυφη δύναμη ίση και αντίθετη με τη δύναμη της βαρύτητας. Αν δεν υπήρχε κανένας περιορισμός στην κίνηση του σωματιδίου, η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου εκπεφρασμένη σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα ήταν

Πώς κατασκευάζουμε τη Λαγκρανζιανή ενός συστήματος με συνδέσμους;

Αν υπάρχει κάποιος σύνδεσμος γράφουμε τη Λαγκρανζιανή σαν να μην υπάρχει...

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \, . \tag{3.33}$$

Θα δείξουμε ότι η Λαγκρανζιανή που προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε στην προηγούμενη Λαγκρανζιανή την *εξίσωση του συνδέσμου*

$$z = 0 \, ,$$

...και εκ των υστέρων επιβάλλουμε τις εξισώσεις των συνδέσμων

περιγράφει σωστά την κίνηση του σωματιδίου. Αν και κάτι τέτοιο φαίνεται εύλογο, δεν είναι και τόσο προφανές ότι ισχύει. Επιθυμώντας να μετατρέψουμε το σύστημα μας σε ένα σύστημα που περιγράφεται από ένα συντηρητικό πεδίο δυνάμεων και να το απαλλάξουμε από τους περιορισμούς των συνδέσμων, η αντιμετώπιση των οποίων προκαλεί αμηχανία, ας υποθέσουμε ότι το σωματίδιο μπορεί να κινείται σε όλο το χώρο αλλά βρίσκεται ταυτόχρονα μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο καθώς επίσης και σε ένα νέο πεδίο με δυναμικό

$$V^{(k)}(z) = \frac{1}{2}kz^2 \, .$$

Φανταζόμαστε ότι κάτω από το δάπεδο υπάρχουν ελατήρια σκληρότητας k το άνω άκρο των οποίων φθάνει έως το $z = 0$ όταν αυτά βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος. Ίσως σκεφτείτε ότι το νέο σύστημα δεν έχει καμία σχέση με το αρχικό! Ας αναλογιστούμε, όμως, τι συμβαίνει στο όριο που $k \to \infty$. Η νέα Λαγκρανζιανή

$$L' = L - V^{(k)}(z)$$

περιγράφει ένα σωματίδιο που κινείται μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης, αλλά συγχρόνως κάποιο πολύ σκληρό ελατήριο δεν του επιτρέπει να απομακρυνθεί πολύ από το επίπεδο $z = 0$. Το σωματίδιο, όντας ένα μηχανικό σύστημα, η κίνηση του οποίου περιγράφεται από τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές (x, y, z), εξελίσσεται βάσει των τριών εξισώσεων Euler - Lagrange

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0\,, \\ m\ddot{y} &= 0\,, \\ m\ddot{z} + mg + kz &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Η τρίτη εξίσωση έχει ως λύση την

$$z = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{mg}{k}\,.$$

Αν σε αυτή την εξίσωση επιβάλουμε αρχικές συνθήκες $z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 0$ –οι οποίες είναι συμβατές με το σύνδεσμο $z = 0$–, θα καταλήξουμε στη λύση

$$z = \frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - 1\right]\,,$$

η οποία εμφανώς οδηγεί στην αναμενόμενη λύση $z = 0$ στο όριο $k \to \infty$. Ουσιαστικά επιστρέψαμε στην αρχική εξίσωση του συνδέσμου. Οι υπόλοιπες εξισώσεις κίνησης είναι αυτές που θα λαμβάναμε, αν θέταμε εξ αρχής στη Λαγκρανζιανή του συστήματος άνευ συνδέσμου,L, την εξίσωση του συνδέσμου $z = 0$. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι στη λύση του προβλήματος ουδεμία αναφορά γίνεται στην αντίδραση του επιπέδου! Αυτό άλλωστε ήταν και το πλεονέκτημα που είχαν οι εξισώσεις Euler - Lagrange, όταν πρωτοδιατυπώθηκαν από τον Lagrange· δεν χρειαζόταν να γίνεται καμία αναφορά στις δυνάμεις που αναπτύσσονται στους συνδέσμους σε αντίθεση με τη νευτώνεια θεωρία. Με την εισαγωγή, όμως, του φαινομενολογικού δυναμικού του συνδέσμου, $V^{(k)}$, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε και την αντίδραση του συνδέσμου, η οποία δεν είναι τίποτε άλλο από τη δύναμη που ασκούν στο σωματίδιο τα υποθετικά ελατήρια

$$F = -\frac{\partial V^{(k)}}{\partial z}\,.$$

Από την εξίσωση Euler - Lagrange για τη νέα Λαγκρανζιανή L' έχουμε

Η αντίδραση βρίσκεται από την εξίσωση Euler - Lagrange που αντιστοιχεί στο σύνδεσμο

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial z}\,, \tag{3.35}$$

δηλαδή,

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z}\,. \tag{3.36}$$

Στο εν λόγω πρόβλημα η δύναμη καταλήγει να είναι

$$F = m\ddot{z} + mg\,.$$

Στο όριο $k \to \infty$ όπου η λύση για τη συντεταγμένη z είναι, όπως αναφέραμε, $z = 0$, η δύναμη είναι η γνωστή μας αντίδραση του δαπέδου, mg. Ας είμαστε, όμως, λίγο πιο προσεκτικοί και ας αντικαταστήσουμε τη λύση στην οποία καταλήξαμε πριν από λίγο για $k \neq \infty$ για να λάβουμε τελικά το όριο $k \to \infty$. Τότε θα διαπιστώσουμε ότι η δύναμη είναι

$$F = mg\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] .$$

Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης ταλαντώνεται τόσο γρήγορα, όταν $k \to \infty$, ώστε να έχει νόημα μόνο η μέση τιμή αυτού, η οποία είναι μηδέν. Για άλλη μια φορά, λοιπόν, οδηγούμαστε στην αναμενόμενη αντίδραση $F = mg$. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι η επιβολή του φαινομενολογικού δυναμικού του συνδέσμου και οι ιδιομορφίες κάποιων αποτελεσμάτων, όπως αυτό της ταχύτατα μεταβαλλόμενης αντίδρασης, βρίσκονται πολύ πιο κοντά στην πραγματική φύση των συνδέσμων. Όλα τα σώματα, ακόμη και αυτά που ονομάζουμε στερεά, όντας ελαστικά, δεν μπορούν να επιβάλλουν στα μηχανικά συστήματα παρά μόνο προσεγγιστικές εξισώσεις συνδέσμων.

Το πρακτικό συμπέρασμα στο οποίο οδηγούμαστε είναι ότι, επιβάλλοντας την εξίσωση του συνδέσμου $z = \dot{z} = \ddot{z} = \cdots = 0$ στην αντίστοιχη εξίσωση Euler - Lagrange (3.35), υπολογίζουμε τελικά την αντίδραση του συνδέσμου ως εξής:

$$F = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z}\right]_{z=\dot{z}=\ddot{z}=0} . \tag{3.37}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.5. *Γράψτε τη Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες. Υποθέστε στη συνέχεια πως θέλετε να επιβάλετε τον περιορισμό κίνησης του σωματιδίου σε μια κυκλική στεφάνη ακτίνας a. Επιλέξτε ένα κατάλληλο δυναμικό που να εξαναγκάζει το σωματίδιο να κινείται ακτινικά σύμφωνα με την εξίσωση $r = a$. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή L' που προκύπτει ύστερα από την πρόσθεση του νέου δυναμικού και λύστε τη γωνιακή εξίσωση Euler - Lagrange επιβάλλοντας τη συνθήκη $r = a$. Υπολογίστε την ακτινική αντίδραση της στεφάνης. [Απάντηση: $F_r = -ma\dot{\theta}^2$]*

Δείξαμε λοιπόν ότι, αν η κίνηση ενός μηχανικού συστήματος περιορίζεται από δεσμούς, τότε η Λαγκρανζιανή που περιγράφει την κίνηση του συστήματος είναι η διαφορά μεταξύ κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος, όπου στον υπολογισμό των ενεργειών αυτών έχουν ληφθεί υπόψη όλοι οι περιορισμοί που επιβάλλονται από τους δεσμούς. Στο επόμενο κεφάλαιο θα ακολουθήσουμε μια τελείως διαφορετική θεώρηση των δεσμών που σχετίζεται με την πραγματική ιστορική πορεία που ακολούθησε η αναλυτική μηχανική και θα μάθουμε πώς να γράφουμε τη Λαγκρανζιανή σε περιπτώσεις ακόμη πιο σύνθετων δεσμών όπου δεν υπάρχει απλώς μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ των συντεταγμένων. Ωστόσο, παρά τις οποιεσδήποτε τεχνικές δυσκολίες που ενδέχεται να έχει η εισαγωγή πιο περίπλοκων μορφών δεσμών στο λαγκρανζιανό φορμαλισμό, η ουσία είναι ότι κάθε σύνδεσμος μπορεί από φυσικής άποψης να αντικατασταθεί από κάποιο κατάλληλο "σκληρό" υποθετικό δυναμικό και επομένως το μηχανικό σύστημα να περιγραφεί πλήρως μέσω συντηρητικών πεδίων.

3.6 Προβλήματα

1. Αποδείξαμε, χρησιμοποιώντας την αρχή της ελάχιστης δράσης, ότι οι Λαγκρανζιανές L και L' που συνδέονται με μετασχηματισμό βαθμονόμησης
$$L'(x,\dot{x},t) = L(x,\dot{x},t) + \frac{df(x,t)}{dt}$$
οδηγούν στις ίδιες εξισώσεις κίνησης. Δείξτε με κατευθείαν αντικατάσταση ότι η εξίσωση Euler - Lagrange για τη νέα συνάρτηση L' οδηγεί στην ίδια εξίσωση με εκείνη που οδηγεί η L.

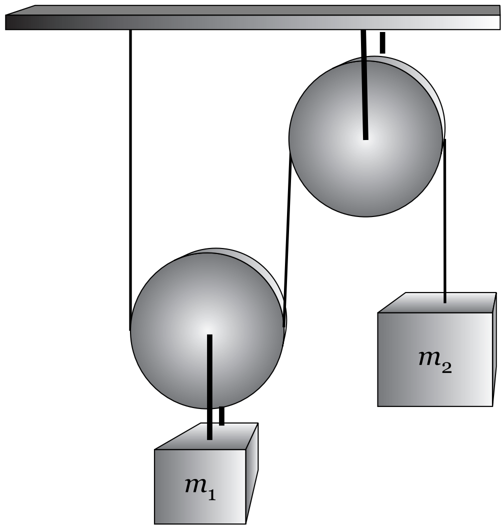
2. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός του ανυσματικού και ηλεκτρικού δυναμικού
$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \ , \ \phi \to \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \ ,$$
δεν μεταβάλλει το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο και αναβαθμονομεί τη Λαγκρανζιανή ενός φορτισμένου σωματιδίου ως εξής:
$$L' = L + q\frac{d\psi}{dt} \ .$$

3. Ένα σωματίδιο, διασχίζοντας μια κοσμική σήραγγα (wormhole), εγκαταλείπει το ισότροπο και ομογενές στο χώρο και χρόνο Σύμπαν μας και εισέρχεται σε ένα άλλο Σύμπαν, το οποίο είναι ομογενές στο χώρο και το χρόνο, αλλά δεν διαθέτει την ισοτροπία του δικού μας. Αντί της ισοτροπίας του δικού μας Σύμπαντος, δηλαδή του αναλλοίωτου χαρακτήρα της Λαγκρανζιανής σε οποιαδήποτε στροφή, το νέο Σύμπαν είναι συμμετρικό μόνο σε στροφές γύρω από κάποιο συγκεκριμένο άξονα, ας πούμε τον άξονα-z. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή ενός ελεύθερου σωματιδίου που κινείται μέσα στο νέο αυτό Σύμπαν. [Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι το νέο Σύμπαν είναι αναλλοίωτο και στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.]

4. Οι μηχανές του Atwood είναι συστήματα που αποτελούνται από ιδανικές αβαρείς τροχαλίες, αβαρή σχοινιά και μάζες που συνδέονται, για παράδειγμα, όπως στο Σχήμα. Γράψτε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση που διέπει τη δυναμική της μηχανής του Atwood που απεικονίζεται στο Σχήμα και υπολογίστε την επιτάχυνση της μάζας m_2;

5. Μια χάντρα είναι περασμένη σε ένα σύρμα, το οποίο βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο και το σχήμα του προσδιορίζεται από τη συνάρτηση $z = f(x)$. Η χάντρα κινείται ελεύθερα στο σύρμα υπό την επενέργεια της βαρύτητας. Να γραφεί η Λαγκρανζιανή της χάντρας και να μελετηθεί η κίνησή της κοντά σε ένα τοπικό ελάχιστο της καμπύλης που σχηματίζει το σύρμα.

6. *Φαινόμενο Aharonov-Bohm:* (α) Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό ενός άπειρου κυλινδρικού σωληνοειδούς ακτίνας R, είναι σταθερό,



ενώ στο εξωτερικό του είναι μηδέν. Δείξτε ότι το ανυσματικό δυναμικό

$$\vec{A}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{B}{2}(-y,x,0), & \text{για } x^2+y^2<R^2 \\ \frac{1}{2}\frac{BR^2}{x^2+y^2}(-y,x,0), & \text{για } x^2+y^2 \geq R^2. \end{cases}$$

παράγει ένα τέτοιο μαγνητικό πεδίο. Στην παραπάνω έκφραση $\vec{x} = (x,y,z)$ και ο άξονας z έχει ληφθεί κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου. (β) Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή ενός φορτισμένου σωματιδίου που κινείται μέσα στο παραπάνω πεδίο και δείξτε ότι όσο το σωματίδιο βρίσκεται εκτός πεδίου η Λαγκρανζιανή περιγράφει την κίνηση ελεύθερου σωματιδίου. [Υπόδειξη: Θα σας φανεί χρήσιμη η ταυτότητα

$$\frac{d}{dt}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-y\dot{x}+x\dot{y}}{x^2+y^2} \text{ .]}$$

(γ) Υπολογίστε τη δράση για μία φυσική διαδρομή που βρίσκεται εξολοκλήρου εκτός του σωληνοειδούς με αρχική θέση $\vec{x}_1$ στο χρόνο 0 και τελική θέση $\vec{x}_2$ στο χρόνο t. (δ) ΄Ενα σωματίδιο που έρχεται από άπειρη απόσταση μακριά από το σωληνοειδές και περνά έξω απο το σωληνοειδές, είτε από πάνω (π.χ. θεωρήστε την ευθύγραμμη διαδρομή από το $(-\infty,R,0)$ στο $(\infty,R,0)$), είτε από κάτω από αυτό (π.χ. θεωρήστε τη διαδρομή από το $(-\infty,-R,0)$ στο $(\infty,-R,0)$), περιγράφεται από μία κυματοσυνάρτηση της μορφής $\exp(\imath S/\hbar)$ όπου S είναι η δράση που αντιστοιχεί στη διαδρομή και $\hbar$ η σταθερά του Planck. Προκειμένου οι κυματοσυναρτήσεις να είναι οι ίδιες είτε από πάνω είτε από κάτω, τι συμπέρασμα συνάγετε για τη μαγνητική ροή $\Phi = \pi R^2 B$ στο εσωτερικό του σωληνοειδούς;

7. ΄Εστω η Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{m}{2}\left(|\dot{\vec{x}}|^2 - \frac{1}{\omega^2}|\ddot{\vec{x}}|^2\right) \text{ .}$$

Γράψτε τις εξισώσεις Euler - Lagrange που διέπουν την κίνηση και δείξτε ότι η τροχιά του συστήματος δίδεται από την

$$\vec{x}(t) = \vec{a} + \vec{b}\, t + \vec{c}\, \sin(\omega t) + \vec{d}\, \cos(\omega t)\ .$$

Θέτοντας τις σταθερές $\vec{a}$, $\vec{b}$ αντιστοίχως ίσες με το κέντρο μάζας και την ορμή του κέντρου μάζας δύο σωματιδίων ίδιας μάζας, δείξτε ότι η Λαγκρανζιανή αυτή περιγράφει την κίνηση δύο σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή. (Φ. Χατζηϊωάννου)