ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

πτυχιακές Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ

16 Μαρτίου 2022

Απαντήστε στα ακόλουθα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα.
Σύνολο μονάδων 120 (άριστα το 100).
Καλή σας επιτυχία.

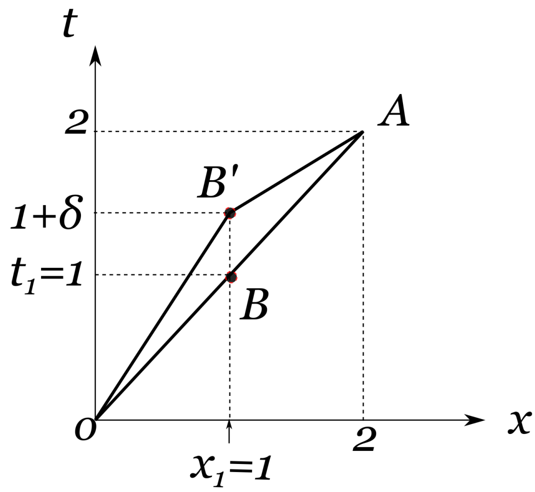
Πρόβλημα Α [40 μονάδες]

Ένα **ελεύθερο** σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται στον άξονα x, ξεκινώντας από το $x(0) = 0$ και φτάνει στο $x(2) = 2$ τη χρονική στιγμή $T = 2$.

1 Λύνοντας την εξίσωση Euler-Lagrange του φυσικού συστήματος, βρείτε το είδος της κίνησης που εκτελεί το σωματίδιο και ρυθμίστε τις παραμέτρους της ώστε το σωματίδιο να ικανοποιεί τις δοθείσες συνοριακές συνθήκες.

2 Ποια η τιμή της δράσης που αντιστοιχεί στην φυσική διαδρομή που βρήκατε;

3 Αν υποθέσουμε ότι το σωματίδιο δεν εκτελεί την φυσική διαδρομή ΟΒΑ, αλλά μια παραλλαγμένη της μορφής ΟΒ΄Α που φαίνεται στο παράπλευρο σχήμα, να υπολογίσετε εκ νέου την τιμή της δράσης σαν συνάρτηση του χρονικού διαστήματος δ, κατά το οποίο η κίνηση αποκλίνει από το να διέλθει το σωματίδιο από το ενδιάμεσο σημείο $x_1 = 1$, στην ενδιάμεση τιμή του χρονικού διαστήματος T, $t_1 = T/2 = 1$.



4 Πώς θα εξηγούσατε με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα, (2) και (3), ότι η κίνηση ΟΒΑ είναι η φυσική κίνηση και όχι η ΟΒ΄Α.

Πρόβλημα Β [40 μονάδες]

Ένα **ελεύθερο** σωματίδιο μάζας m κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σωματίδιο αυτό είναι δεμένο με μη εκτατό νήμα το οποίο διέρχεται από μια μικρή τρύπα του επιπέδου, στο άλλο άκρο του οποίου κρέμεται μια δεύτερη μάζα M (ένα μέρος του νήματος είναι πάνω στο επίπεδο και το υπόλοιπο μέρος αυτού είναι κατακόρυφο). Το σύστημα βρίσκεται μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης, έντασης g, ενώ το νήμα έχει μήκος L.

1 Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος, αφού πρώτα καθορίσετε πόσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος (προτείνεται η χρήση πολικών συντεταγμένων για τον καθορισμό της θέσης της m).

2 Βρείτε κατάλληλες αρχικές συνθήκες για το σύστημα, ώστε η μάζα m να εκτελεί κυκλική κίνηση. Συγκεκριμένα βρείτε τη σχέση της ταχύτητάς της με την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

3 Χρησιμοποιήστε πολλαπλασιαστή Lagrange στο πρόβλημα ώστε να βρείτε την τάση του νήματος όταν η m εκτελεί κυκλική τροχιά.

Πρόβλημα Γ [40 μονάδες]

Ένα φυσικό σύστημα περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{p^2}{4} e^{-2x} \; .$$

1 Γράψτε τις εξισώσεις Hamilton και δείξτε μέσω αυτών ότι η Χαμιλτονιανή είναι σταθερά της κίνησης.

2 Έστω ότι αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $x(0) = 0$ και έχει ορμή $p(0) = 2$. Ποια είναι η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου; Πώς θα εξελίσσεται η ορμή του σωματιδίου με βάση την εξίσωση Hamilton για την $\dot{p}$ και τη σταθερότητα της H;

3 Κατασκευάστε την αντίστοιχη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου και εξηγήστε τι φυσικό σύστημα περιγράφει.

4 Λύστε τις εξισώσεις Euler-Lagrange με τις αρχικές συνθήκες του ερωτήματος (2).

Λύσεις

Πρόβλημα A

1. Ελεύθερο σωμάτιο: $L = \frac{1}{2}mv^2$. Από εξισώσεις Euler-Lagrange: $\ddot{x} = 0$ ομαλή κίνηση (το ευθύγραμμη δεν λέει τίποτε αφού είναι σε 1 διάσταση),$\Rightarrow$ $x(t) = t$ από συνοριακές συνθήκες.
2. $$S = \int_0^2 (\frac{1}{2}mv^2)dt = \int_0^2 (1)dt = 1$$
3. $$S = \int_0^2 (\frac{1}{2}mv^2)dt = \int_0^{1+\delta} \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^2 dt + \int_{1+\delta}^2 \left(\frac{1}{1-\delta}\right)^2 dt = \frac{1}{1-\delta^2}$$
4. Αναπτύσσοντας την δράση γύρω από το $\delta = 0$ βρίσκουμε
$$S = 1 + \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^4)$$
επομένως η ΟΒΑ ($\delta = 0$) είναι φυσική διαδρομή, σύμφωνα με την αρχή του Hamilton.

Πρόβλημα B

1. Το πρόβλημα χαρακτηρίζεται μόνο από 2 συντεταγμένες (r, θ), αυτές που καθορίζουν τη θέση της m στο επίπεδο. Η θέση της M προκύπτει άμεσα μέσω του ότι $r + z = L$ (το z μετράει πόσο κάτω από το επίπεδο βρίσκεται η δεύτερη).
$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{z}^2 - Mg(-z) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2 - Mg(r - L) \end{aligned}$$
2. Από εξισώσεις Euler-Lagrange
$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - Mg \\ \frac{d}{dt}mr^2\dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$
Αντικαθιστώντας στις παραπάνω $r = R =$ σταθ βρίσκουμε
$$\begin{aligned} Mg &= mR\omega^2 \\ mR^2\omega &= \text{σταθ} \end{aligned}$$
επομένως αρρκεί να προσδώσουμε αρχική ταχύτητα στην m, $v_0 = \omega R = \sqrt{\frac{MgR}{m}}$ και το κομμάτι του νήματος πάνω στο επίπεδο να έχει μήκος R.

3.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{z}^2 - Mg(-z) + \lambda(r + z - L) \tag{1}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrangeείναι

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 + \lambda \\ \frac{d}{dt}mr^2\dot{\theta} &= 0 \\ M\ddot{z} &= Mg + \lambda \\ r + z - L &= 0 \end{aligned}$$

Θέτοντας $r = R \Rightarrow z = L - R \Rightarrow \lambda = -Mg \Rightarrow mR\omega^2 = Mg$. Οπότε η τάση του νήματος είναι

$$T = -\lambda\frac{\partial(r + z - L)}{\partial z} = -\lambda = Mg$$

Πρόβλημα Γ

1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{2}e^{-2x} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{p^2}{2}e^{-2x} = 2H \end{aligned}$$
$$dH/dt = \partial H/\partial t + \{H, H\} = 0$$

2.

$$\dot{x} = \frac{p}{2}e^{-2x} \Rightarrow \dot{x}(0) = \frac{p(0)}{2}e^{-2x(0)} = 1$$

και

$$\dot{p} = 2H = 2H(0) = 2 \Rightarrow p(t) = p(0) + 2t = 1 + 2t$$

3.

$$L = p\dot{x} - H = 2\dot{x}^2e^{2x} - \frac{(2\dot{x}e^{2x})^2}{4}e^{-2x} = \dot{x}^2e^{2x}$$

με εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}2\dot{x}e^{2x} = 2\dot{x}^2e^{2x} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ddot{x} = -\dot{x}^2$$

κίνηση σε μέσο με αντίσταση ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας.

4.

$$\frac{dv}{dt} = -v^2 \Rightarrow -\int_{v_0}^{v(t)}\frac{dv}{v^2} = t \Rightarrow \frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v_0} = t \Rightarrow v(t) = \frac{1}{1+t}$$