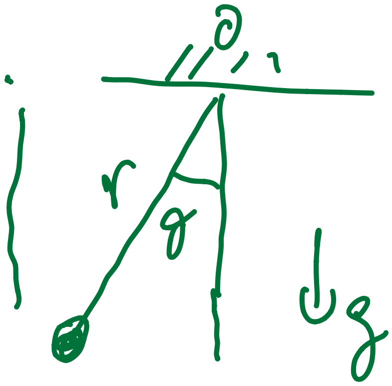
Εξέταση Μηχ. ΙΙ
Σεπτέμβριος 2020

---

1. 

Δύο βαθμοί ελευθερίας για κίνηση στο επίπεδο επιλέγω πολικές (r, θ).

Τότε η κινητική ενέργεια είναι : $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

και η δυναμική ενέργεια

$$V = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2$$

άρα

$$h = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2$$

2. $L_0 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$

εάν $L = f(t) L_0$

οι εξισώσεις κίνησης της L θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(f \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}}\right) - f \frac{\partial L_0}{\partial x} = 0$$

ή

$$\underbrace{\frac{\dot{f}}{f} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}}}_{\frac{\dot{f}}{f} m \dot{x}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_0}{\partial x}}_{m\ddot{x} + \frac{dV}{dx}} = 0$$

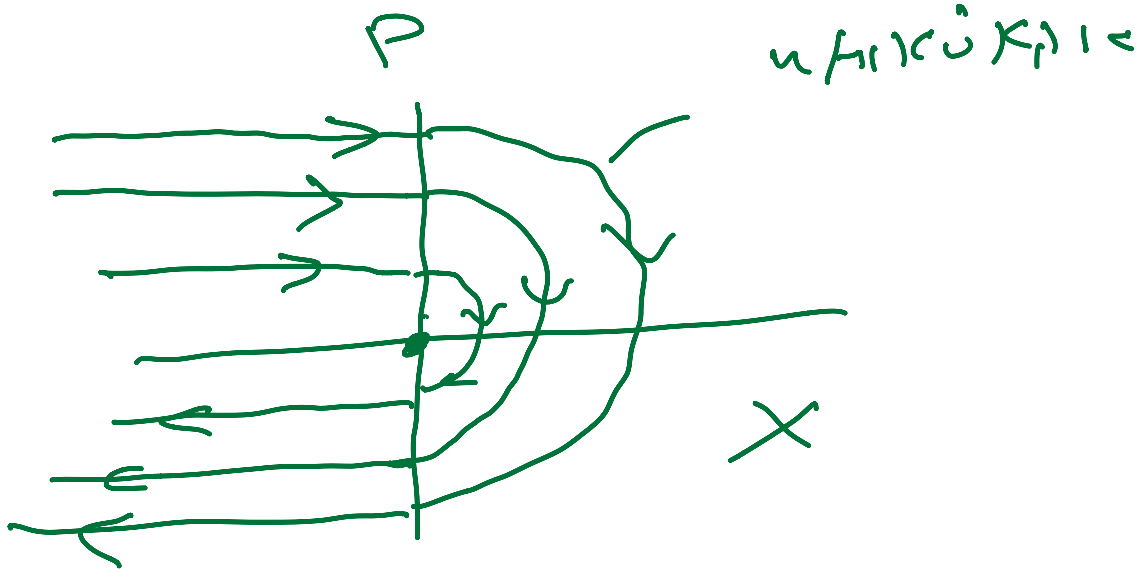
ή

δηλαδή $m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} + \frac{\dot{f}}{f} m \dot{x} = 0$

άρα θέτω $\frac{\dot{f}}{f} m = \alpha$, δηλαδή $f(t) = e^{\frac{\alpha}{m} t}$

(ή οπαδθεί μηορά χεγ υί λμφά 1].

3.



$$\dot{x} = p$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{dx} = -x\,\Theta(x) - \frac{x^2}{2}\delta(x)$$

αλλά $\quad x^2\delta(x) = 0$

άρα οι εξισώσεις Χάμιλτον

είναι $\quad \dot{x} = p$

$$\dot{p} = -x\,\Theta(x)$$

Σημείο ισορροπίας το: $x=0,\ p=a$

Αλλά και όταν

$x < 0 \quad \Theta(x) = 0$

οπότε $\forall\, x < 0$

Είναι συνεχής

ισορροπίας

συνάρτηση γιά

με τιμή ισορροπία

εκεί ή

η [illegible] $x \leq 0$

[Το σημείο φαίνεται και από διότι όταν $x \geq 0$ $H = p^2/2 + x^2/2$ και $x=0, p=0$ ευσταθές ισορροπία

όταν $x<0$ $H = p^2/2$.

οπότε και κάθε $x<0$ είναι σημείο ισορροπίας, δεδομένου ότι το σωματίδιο θα παραμένει στη θέση αυτή, αν είναι ακίνητο].

4. Σημεία ισορροπίας έχουμε

$$\dot{x} = \dot{y} = 0 \quad \& \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x[1+x^2+y^2] + (x^2+y^2)x$$

Άρα $\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = y[1+x^2+y^2] + (x^2+y^2)y$$

Άρα $\partial V/\partial y = 0 \Rightarrow y = 0$

άρα $(x, y) = (0,0)$ είναι το
μόνο σημείο ισορροπίας
και η γραμμικοποιημένη
Λαγκρανζιανή είναι η

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{x^2+y^2}{2}$$

≡ Αμέσως βλέπουμε ότι
το σημείο ισορροπίας είναι

το $\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

& $\omega_1 = 1$ & $\omega_2 = 0$

$\downarrow$

με κανονικό τρόπο $\psi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

μη κανονικό τρόπο $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

η δυναμική ενέργεια είναι

$$\frac{1}{2} x'^T K x',$$ όπου x' η απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας

και η εξίσωση κίνησης

$$M \ddot{x}' + K x' = 0$$

όπου $x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix}$

εφόσον $\omega_1 = 1$ & $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ένας τρόπος ταλάντωσης

και $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ θα έχω

$$-\omega_1^2 \cdot 1 + k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 1 = 0$$

δηλαδή $k_1 + k_2 = 1$ $(\omega_1 = 1)$

ομοίως $-\omega_1^2 \cdot 1 + k_2 \cdot 1 + k_3 \cdot 1 = 0$

άρα $k_3 + k_2 = 1$

Επίσης για $\omega_2 = 0$, $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ κανονικό τρόπο

συνεπάγεται ότι

$$-\omega_2^2 \cdot 1 + k_1 \cdot 1 + k_2(-1) = 0$$

άρα $k_1 = k_2$

και $-\omega_2^2 \cdot 1 + k_2 \cdot 1 + k_3(-1) = 0$

άρα $k_2 = k_3$

συνεπώς $k_1 = k_2 = k_3 = 1/2$

κ $K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

$$V = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}x_1' & x_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1' & x_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' + x_2' \\ x_1' + x_2' \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_1'^2 + 2\, x_1' x_2' + x_2'^2 \right)$$

επειδή δε $x_1' = x_1 - 1$

$x_2' = x_2$ θα είναι:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left((x_1 - 1)^2 + 2x_2(x_1 - 1) + x_2^2 \right)$$

<u>6</u> Προφανής συμμετρία

$$x_1 \to x_1 + \varepsilon$$

$$x_2 \to x_2 + \varepsilon$$

Attention.

$$p_1 = \dot{x}_1 \quad , \quad p_2 = 2\dot{x}_2$$

$$\mathcal{H} = \dot{x}_1 p_1 + \dot{x}_2 p_2 - \frac{1}{2}\left(p_1^2 + 2\frac{p_2^2}{4} - V\right)$$

$$= p_1^2 + \frac{p_2^2}{2} - \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{4} + V$$

$$= \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{4} + V$$

$$\{p_1 + p_2, \mathcal{H}\} = \{p_1, \mathcal{H}\} + \{p_2, \mathcal{H}\}$$

$$\{p_1, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad , \quad \{p_2, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial V}{\partial x_2}$$

$$\{p_1 + p_2, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$$

Sion $\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_2}$

4α ṡ $P_1 + P_2$ δι α Tuʃhizer,

Πρ: β>uk<

$\boxed{A}$ $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right] - mf(r)$

ṡ $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - f(r)\right.$

$\left. ([illegible] \right]$

$\boxed{B}$ $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = \dot r$, $\frac{\partial L}{\partial r} = r\dot\theta^2 + r\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 - f'$

$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = r^2\dot\theta$, $\frac{\partial L}{\partial \theta} = r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2$

$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi$, $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

Άρα (1) $\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi\right) = 0$

ή $p_\varphi = r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi =$ σταθερή

(2) $\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\theta\right) = r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2$

(3) $\ddot r = r\dot\theta^2 + r\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 - f'(r)$

Η κίνηση $\Theta(t) = \pi/2$ είναι συμβατή με τις εξισώσεις.

η (1) απαιτεί $r^2 \dot{\varphi} =$ σταθερή

η (2) ικανοποιείται διότι [illegible] καθώς ο όρος της είναι μηδέν.

Και η (3) απαιτεί

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + f'(r) = 0$$

$$r^2 \dot{\varphi} = h_z$$

ή

$$\ddot{r} - \frac{h_z^2}{r^3} + f'(r) = 0$$

$$\ddot{r} + \frac{d}{dr}\left(f + \frac{h_z^2}{2r^2} \right) = 0$$

Ποιά είναι κίνηση

ακτινική στο

δυναμικό $f + \frac{L_z^2}{2r^2}$

η οποία δίνει επιτρεπτές

κινήσεις

$\boxed{\Gamma.}$ αν $r = R,\ \theta = \pi/2\ \ \phi(t) = \omega t$

τι θα πάθει η (2) ικανο-

ποιείται η (1) επίσης

διότι $\boxed{P_\varphi = R^2 \omega}$ είναι πράγματι σταθερό

και από την (1) έχω την απαίτηση

$$\boxed{R\omega^2 = f'(R)}$$

να ικανοποιείται

$\boxed{\Delta}$ Τώρα $\forall t$ $p_\varphi = 0$, δηλ. $\dot{\varphi} = 0$

η (2) ικανοποιείται $\forall t$ και η (3)

δίνει $\ddot{r} = -f'(r)$

εφ' όσον $\ddot{r} = -\alpha$, $f'(r) = \alpha$

συνεπώς $f(r) = \alpha r$

συνεπώς η δράση θα είναι

$$S = \int_\gamma dt \left[\frac{m}{2}\dot{r}^2 - m\alpha r\right]$$

στη διαδρομή $\theta(t) = \pi/2$, $\varphi(t) = 0$

$r_1(t) = r_0$, $r_2(t) = r_0/2$

θα είναι στο $r_0/2$ στο χρόνο T

$$r_0 - \alpha T^2/2 = r_0/2,$$

$$\frac{\alpha T^2}{2} = + r_0/2,$$

$$T = \sqrt{\frac{r_0}{\alpha}}, \quad \dot{r} = -\alpha t$$

$$S = \frac{1}{2} m \int_0^{\sqrt{r_0/\alpha}} dt \left[\alpha^2 t^2 - \alpha r_0 + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} m \int_0^{\sqrt{r_0/\alpha}} dt \left(\frac{3\alpha^2 t^2}{2} - \alpha r_0 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\frac{\alpha^2 r_0^{3/2}}{2\alpha^{3/2}} - \alpha \frac{r_0^{3/2}}{\alpha^{1/2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^{1/2} r_0^{3/2}}{2} - \alpha^{1/2} r_0^{3/2}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\alpha^{1/2} r_0^{3/2}$$