



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη ΜΗΧΑΝΙΚΗ II

4 Σεπτεμβρίου 2020

Απάντησε οπωσδήποτε σε τουλάχιστον 4 από τα ακόλουθα 6 ερωτήματα, προκειμένου να πάρεις προβιβαστικό βαθμό. Αν απαντήσεις και στα 6 θα πάρεις βαθμό 6. Συνέχισε μετά με το πρόβλημα που ακολουθεί για ακόμη μεγαλύτερο βαθμό.

1 Εκκρεμές μάζας m , η ράβδος του οποίου είναι αβαρής και ελαστική και συμπεριφέρεται ως ελατήριο φυσικού μήκους l_0 με σταθερά ελαστικότητας k , βρίσκεται σε κατακόρυφο ομογενές βαρυτικό πεδίο έντασης g και μπορεί να κινείται **μόνο** σε κατακόρυφο επίπεδο. Πόσοι οι βαθμοί ελευθερίας του; Γράψε τη Λαγκρανζιανή που διέπει την κίνησή του.

2 Γράψε τη Λαγκρανζιανή $L_0(x, \dot{x})$ σωματιδίου μάζας m που κινείται σε 1 διάσταση υπό την δράση ενός πεδίου που περιγράφεται από τη δυναμική ενέργεια $V(x)$. Προσδιόρισε κατάλληλη χρονο-εξαρτώμενη συνάρτηση $f(t)$, έτσι ώστε η Λαγκρανζιανή $L = f(t)L_0(x, \dot{x})$ να περιγράφει την κίνηση του παραπάνω σωματιδίου, στο οποίο να ασκείται **επιπλέον** και η αναλωτική δύναμη $F_{\text{αναλ}} = -\alpha\dot{x}$, όπου $\alpha > 0$ θετική σταθερά.

3 Να κατασκευαστεί ο χώρος των φάσεων ενός συστήματος με 1 βαθμό ελευθερίας αν η Χαμιλτονιανή αυτού είναι

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}\Theta(x),$$

όπου $\Theta(x)$ είναι συνάρτηση η οποία για $x \geq 0$ λαμβάνει την τιμή 1 και για $x < 0$ την τιμή 0. Γράψε τις εξισώσεις του Χάμιλτον και προσδιόρισε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος.

4 Αφού βρείς τα σημεία ισορροπίας της Λαγκρανζιανής

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2} (1 + x^2 + y^2)$$

γραμμικοποίησέ την περί αυτά.

5 Παρατηρείς την ακόλουθη μικρή ταλάντωση συστήματος 2 βαθμών ελευθερίας, x_1, x_2 :

$$x_1 = 1 + \sin t \quad , \quad x_2 = \sin t,$$

ενώ αν αλλάξεις τις αρχικές του συνθήκες παρατηρείς την κίνηση:

$$x_1 = 1 + t \quad , \quad x_2 = -t.$$

Προσδιόρισε: το σημείο ισορροπίας του συστήματος, τις ιδιοσυχνότητές του, και τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσής του. Αν η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$ προσδιόρισε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος $V(x_1, x_2)$.

6 Δύο σωματίδια που κινούνται σε μία διάσταση περιγράφονται από τη Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_2^2) - V(x_1 - x_2).$$

Ανακάλυψε μια χωρική συμμετρία του συστήματος και υπολόγισε την αγκύλη Poisson $\{p_1 + p_2, H\}$, όπου p_1, p_2 οι γενικευμένες ορμές των δύο σωματιδίων και H η Χαμιλτονιανή του συστήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ένα σωματίδιο μάζας M κινείται στο χώρο υπό τη δράση του πεδίου $V(\vec{r}) = Mf(r)$, όπου $r = |\vec{r}|$, \vec{r} η θέση του σωματιδίου, και f μία συνάρτηση που προσπαθούμε να προσδιορίσουμε από παρατηρήσεις,

1. Γράψε τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες και δείξε ότι η κίνηση αυτού είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του M .
2. Γράψε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου και δείξε ότι μια κίνηση στο “ισημερινό” επίπεδο $\theta(t) = \pi/2$ είναι συμβατή με τις εξισώσεις αυτές (επιτρέπεται από τις εξισώσεις).
3. Αν το σωματίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά της μορφής $r(t) = R$, $\theta(t) = \pi/2$, $\phi(t) = \omega t$, υπολόγισε την τιμή της γενικευμένης ορμής p_ϕ του σωματιδίου και την τιμή της $f'(R)$ (την παράγωγο της f στο R).
4. Αν το σωματίδιο κινείται ακτινικά ακολουθώντας την τροχιά $r(t) = r_0 - \alpha t^2/2$, $\theta(t) = \pi/2$, $\phi(t) = 0$, βρες τη μορφή της συνάρτησης f και υπολόγισε τη δράση της φυσικής αυτής διαδρομής για να μεταβεί το σωματίδιο από τη θέση $r_1 = r_0$, $\theta_1 = \pi/2$, $\phi_1 = 0$ στη θέση $r_2 = r_0/2$, $\theta_2 = \pi/2$, $\phi_2 = 0$ σε χρόνο T .