ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2021-2022
ΜΜΦ Ι - Φύλλο ασκήσεων 3

1. Έστω f ακέραια συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(z)| \leq c(1+|z|^{8/7})$ για κάποιο $c>0$ και όλα τα $z \in \mathbb{C}$. Να δειχθεί ότι η f είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\int_{S(1)} \frac{z}{1+z-\cos z} dz \,.$$

3. Έστω $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$. Να δειχθεί ότι
$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2\theta \, d\theta = \pi f(0) + \frac{\pi}{4} f''(0) \,.$$

4. Να βρεθεί το ιδιάζον μέρος της σειράς Laurent με κέντρο το 0 της συνάρτησης
$$f(z) = \frac{1}{(e^z-1)^2}$$

5. Έστω $f(z)$ ακέραια συνάρτηση με $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Να αποδειχθεί ότι η $f(z)$ είναι πολυώνυμο. [*Υπόδειξη. Θεωρείστε την* $f(1/z)$]

6. Να αποδειχθεί ότι για $n \geq 2$ ισχύει
$$\int_{S(2)} \frac{dz}{z^n-1} = 0.$$

7. Έστω γ απλή κλειστή καμπύλη θετικής φοράς και $f(z)$ αναλυτική και διάφορη του μηδενός επί της γ. Υποθέτουμε ότι στο εσωτερικό της γ η f έχει πεπερασμένου πλήθους πόλους $\{p_k\}$ και πεπερασμένου πλήθους ρίζες $\{q_m\}$. Να απόδειχθεί η *αρχή του ορίσματος*:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_k [\text{πολλαπλότητα της ρίζας } p_k] \; - \; \sum_m [\text{τάξη του πόλου } q_m].$$