

ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2021-2022  
ΜΜΦ Ι - Φύλλο ασκήσεων 2

1. Ναδειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{1-z^n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο  $\bar{D}(r)$  για κάθε  $r \in (0, 1)$ .

2. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-i)(n!)^2}{(1-i)^n(2n)!} z^n.$$

3. Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, τα σημεία όπου η συνάρτηση  $f(z) = z\operatorname{Re} z + \bar{z}\operatorname{Im} z + \bar{z}$  είναι παραγωγίσιμη.
4. Ναδειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις  $f(z)$  και  $\overline{f(z)}$  είναι και οι δύο αναλυτικές στο  $\mathbb{C}$ , τότε  $f(z) = \text{σταθερά}$ .
5. Έστω  $f = u + iv$  αναλυτική συνάρτηση. Ναδειχθεί ότι οι ισοσταθμικές καμπύλες των  $u$  και  $v$  τέμνονται κάθετα.
6. Να εξεταστεί αν είναι παραγωγίσιμη στο  $z = 0$  η συνάρτηση  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  ( $z = x + iy$ ).
7. Να βρεθεί το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $u(x, y) = x^3 - y + \alpha xy^2$  να είναι αρμονική και στη συνέχεια να βρεθεί η συζυγής αρμονική  $v(x, y)$ .
8. (i) Έστω  $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  ακτινικά συμμετρική συνάρτηση,

$$u(x, y) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ναδειχθεί ότι αν η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε

$$(\Delta u)(x, y) = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r).$$

- (ii) Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση  $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$  είναι αρμονική. Τι μπορείτε να πείτε για τη συζυγή αρμονική;