

Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2018-19
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 1

1. Να γραφούν σε πολική μορφή οι αριθμοί

$$z = \frac{(1-i)^{23}}{(\sqrt{3}-i)^{13}}, \quad w = \frac{1}{1 + \cos t + i \sin t} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2. (i) Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^3 - 2i}{2z^3 + 3 - 4i}$$

απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ στον εαυτό του.

3. (i) Έστω $p(z)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Ναδειχθεί ότι αν το z_0 είναι ρίζα του $p(z)$ τότε και το \bar{z}_0 είναι ρίζα. (ii) Να βρεθούν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 8z + 40$$

αφού επαληθευτεί ότι το $2 - i$ είναι μία ρίζα.

4. Χρησιμοποιώντας τον τύπο de Moivre βρείτε τριγωνομετρικές ταυτότητες για τα $\cos 5\theta$ και $\sin 5\theta$.

5. Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a| \neq |b|$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{az + b}{\bar{a} + \bar{b}z}$$

απεικονίζει τον ανοικτό μοναδιαίο κύκλο $S(1)$ στον εαυτό του.

6. Να αποδειχθεί ότι το πεδίο τιμών των συναρτήσεων $\cos z$ και $\sin z$ είναι όλο το \mathbb{C} .

7. Ναδειχθεί ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), ισχύει

$$\sin a + \sin(2a) + \dots + \sin(na) = \frac{\cos \frac{a}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})a}{2 \sin \frac{a}{2}}$$

8. Ναδειχθεί ότι $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$ (ως πλειότιμες συναρτήσεις).

9. Αποδείξτε ότι $\log z^2 \neq 2 \log z$ (ως πλειότιμες συναρτήσεις). Όμως $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$. Τι συμβαίνει ;

10. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι ανοικτά ή κλειστά και να βρεθεί το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του καθενός από αυτά:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + iy : n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R} \right\}, \quad B = \mathbb{Z} + i\mathbb{R}$$

11. Ναδειχθεί ότι ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του $\mathbb{C} \setminus A$ είναι κλειστό.
12. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0 η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} \frac{|z|^\alpha}{z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$