

Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2017-18
 ΜΜΦ Ι - Φύλλο 3

1. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ανώμαλα σημεία των συναρτήσεων:

$$f(z) = \frac{\sin 4z - 4z}{z^2} \quad , \quad g(z) = \frac{e^z - 1}{\sin^2 z} \quad , \quad h(z) = \sin\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

2. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο δακτύλιο $\Delta(0, r, R)$. Ναδειχθεί ότι υπάρχει συνάρτηση f_1 αναλυτική στο δίσκο $D(R)$ και συνάρτηση f_2 αναλυτική στο δακτύλιο $\{z : |z| > r\}$, ώστε

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \quad , \quad \text{για κάθε } z \in \Delta(0, r, R).$$

3. Έστω f αναλυτική συνάρτηση με μία μοναδική απλή ρίζα $z_0 \in D(1)$. Ναδειχθεί ότι

$$\int_{S(1)} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = z_0.$$

4. Έστω $f(z)$ ακέραια συνάρτηση με $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$. Να αποδειχθεί ότι η $f(z)$ είναι πολυώνυμο.

5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{S(1)} \frac{z}{1 + z - \cos z} dz.$$

6. Να βρεθεί το ιδιάζον μέρος της σειράς Laurent με κέντρο το 0 της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$$

7. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_{S(3)} \frac{dz}{z^{2017} - 1} = 0.$$

8. Έστω γ απλή κλειστή καμπύλη και f αναλυτική και διάφορη του μηδενός επί της γ ενώ στο εσωτερικό της γ η f έχει πεπερασμένου πλήθους πόλους $\{p_k\}$ και πεπερασμένου πλήθους ρίζες $\{q_m\}$. Να αποδειχθεί η αρχή του ορίσματος:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_k [\text{πολλαπλότητα της ρίζας } p_k] - \sum_m [\text{τάξη του πόλου } q_m].$$

9. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{ccc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 9} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} & \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad (|a| < 1) & \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + x + 1)^2} dx & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx & \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 9)^2} dx \end{array}$$