

Τμήμα Φυσικής. Ακαδημαϊκό έτος 2016-17
Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής I - Φύλλο ασκήσεων 2

1. Ναδειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+i)^2 z^n}{z^n + i}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στον δίσκο $\overline{D}(r)$ για κάθε $r < 1$.

2. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-i)(n!)^2}{(1-i)^n (2n)!} z^n.$$

3. Ναδειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις $f(z)$ και $\overline{f(z)}$ είναι και οι δύο αναλυτικές στο \mathbb{C} , τότε $f(z) = \text{σταθερά}$.
4. Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, τα σημεία όπου η συνάρτηση $f(z) = z \operatorname{Re} z + \overline{z} \operatorname{Im} z + \overline{z}$ είναι παραγωγίσιμη.
5. Να εξεταστεί αν είναι παραγωγίσιμη στο $z = 0$ η συνάρτηση $f(z) = \sqrt{|xy|}$ ($z = x + iy$).
6. Έστω $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ακτινικά συμμετρική συνάρτηση,

$$u(x, y) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ναδειχθεί ότι αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε

$$(\Delta u)(x, y) = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r).$$

7. Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι αρμονική και να βρεθεί η συζυγής αρμονική.
8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \overline{z} dz$ όπου γ το κάτω μισό του κύκλου $S(1+i, 1)$ με αρχή το i και τέλος το $2+i$.
9. Έστω $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, απλή κλειστή καμπύλη. Ναδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \overline{z} dz$ είναι φανταστικός αριθμός.