ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2021-2022
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 1

1. (i) Έστω $p(z)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Να δειχθεί ότι αν το z_0 είναι ρίζα του $p(z)$ τότε και το $\overline{z_0}$ είναι ρίζα. (ii) Να βρεθούν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου
$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$$
αφού επαληθευθεί ότι το $1 + i$ είναι μία ρίζα.

2. Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a| \neq |b|$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση
$$f(z) = \frac{az + b}{\overline{a} + \overline{b}z}$$
απεικονίζει τον ανοικτό μοναδιαίο κύκλο $S(1)$ στον εαυτό του.

3. Να δειχθεί ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^n = w$ έχουν άθροισμα 0.

4. Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ισχύει
$$1 + \cos x + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) = \cos(\frac{nx}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} .$$

5. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (δηλ. το σύνολο) όλων των $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία $\mathrm{Im}(\frac{1}{z}) = 2$.

6. Να αποδειχθεί ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου αν και μόνο αν
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 .$$

7. Να δειχθεί ότι το πεδίο τιμών των συναρτήσεων $\cos z$ και $\sin z$ είναι όλο το $\mathbb{C}$.

8. Να υπολογιστεί το i^i.

9. Να δειχθεί ότι $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$ ως πλειότιμες συναρτήσεις.

10. Αποδείξτε ότι $\log z^2 \neq 2\log z$ (ως πλειότιμες συναρτήσεις). Όμως $\log(z_1z_2) = \log z_1 + \log z_2$. Τι συμβαίνει ;