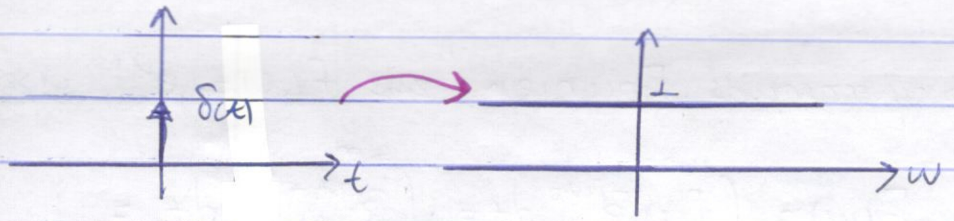
116.

Για να λάβουμε από την (1) την ταυτότητα $f(t)=f(t)$, θα πρέπει

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t'-t)}\,d\omega = \delta(t'-t) \quad \text{ή} \quad \delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\,d\omega \Rightarrow$$

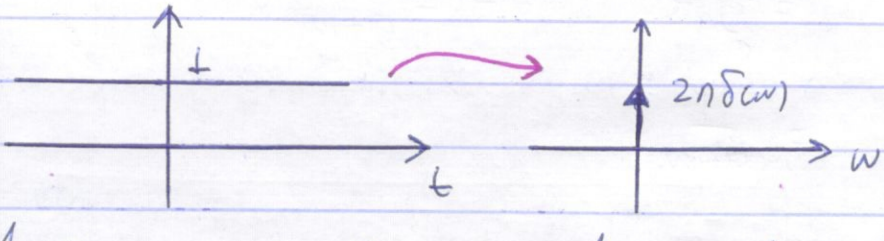
$\Rightarrow$ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της μονάδας είναι $= \delta(t)$.

Άρα για την $\delta(t)$ είναι $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\, e^{-i\omega t}\,dt = e^{0} = 1$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot e^{-i\omega t}\,dt = 2\pi\delta(\omega)$



Απειροστά μικρό στο πεδίο του χρόνου.

Απείρως επεκταμένο στο πεδίο της συχνότητας

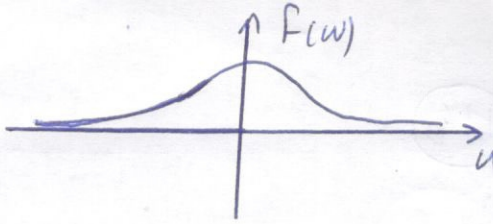


Απείρως επεκταμένο στο πεδίο του χρόνου

Απειροστά μικρό στο πεδίο της συχνότητας

Υποδεικνύει ότι το {εύρος στο πεδίο του χρόνου} × $\{\underbrace{\text{εύρος ζώνης}}_{\text{ένταση στο πεδίο συχνότητας}}\}$ = constant (σταθερό).

(117.) $\rightarrow ⊛ = \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \longrightarrow$



Οι αρνητικές συχνότητες δεν έχουν κάποιο φυσικό νόημα.

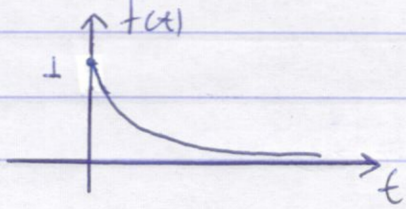
Η $f(t)$ κεντραρισμένη γύρω από το $t=0$ είναι:

$$\left.\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \xrightarrow{\omega=0} F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \xrightarrow{t=0} f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, d\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt}{f(0)}}_{\text{εύρος στο πεδίο του χρόνου}} \cdot \underbrace{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,d\omega}{F(0)}}_{\text{εύρος ζώνης}} = 2\pi$$

Αρχή Heisenberg

Παραδείγματα:

1) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t) = e^{-at}$, $a>0$, και $t>0$.



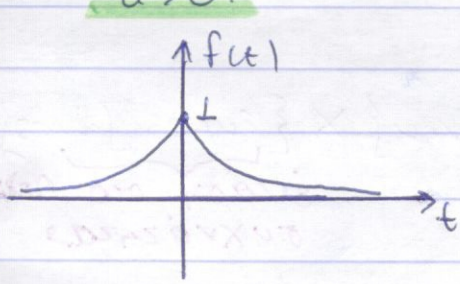
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at-i\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{(-a-i\omega)t}\, dt = \frac{-1}{a+i\omega}\, e^{(-a-i\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{a+i\omega}$$

Άρα, $F(e^{-at}) = \frac{1}{a+i\omega}$, $a>0$, $t>0$.

2.) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t) = e^{-a|t|}$, $a>0$.



$$f(t) = \begin{cases} e^{at}, & t<0 \\ e^{-at}, & t>0 \end{cases}$$. Άρα, έχουμε:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{(-a-i\omega)t}\, dt = \frac{1}{a-i\omega}\, e^{(a-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{a+i\omega}\, e^{-(a+i\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty} = ⊛ \uparrow$$

118.

11/12/2018 # Διάλεξη 20η (Μπαρμπάτσης).

Φύλλο Ασκήσεων:

2.) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(n+i)^2 e^{(3-i)nz}}_{\equiv f_n(z)}$. Νδο συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο

$E_a = \{x+iy : 3x+y+a \leq 0\}, \forall a>0.$

Λύση: Έστω $a>0$. Έστω $z \in E_a$. Τότε, $|f_n(z)| = |n+i|^2 \cdot |e^{(3-i)nz}| =$

$= (n^2+1) \cdot |e^{(3-i)\cdot n(x+iy)}| = (n^2+1) \cdot |e^{3nx + 3nyi - nxi + ny}| = (n^2+1) \cdot e^{n(3x+y)} \leq$

$\leq \underbrace{\boxed{(n^2+1) e^{-na}}}_{M_n}$ (διότι $3x+y+a \leq 0$)

Έχουμε, $\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{((n+1)^2+1) e^{-(n+1)a}}{(n^2+1)\cdot e^{-na}} = \frac{[(n+1)^2+1]}{n^2+1} \cdot \frac{\cancel{e^{-na}} \cdot e^{-a}}{\cancel{e^{-na}}} \rightarrow$

$\rightarrow 1 \cdot e^{-a} = e^{-a} < 1$. Από το κριτήριο λόγου έπεται ότι $\sum M_n < +\infty$, άρα από το M-κριτήριο έπεται ότι η $\sum f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E_a.

4.) Να βρεθούν τα $a \in \mathbb{C}$ για τα οποία ισχύει:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(1)} \frac{e^{az} + e^{-az}}{z^5} dz = 1$$

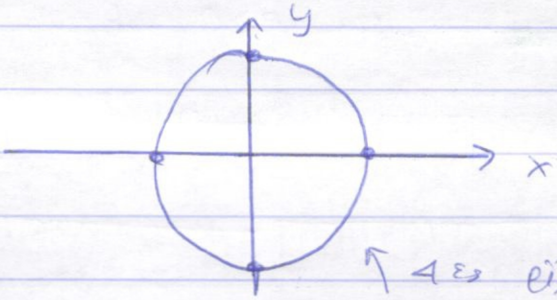
ολοκλ. τύπος Cauchy: $\frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Εφαρμόζουμε για $\begin{cases} f(z) = e^{az} + e^{-az} \\ n = 4 \\ z_0 = 0 \end{cases}$, και έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(1)} \frac{f(z)}{z^5}\, dz = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{\alpha^4 e^{\alpha z} + (-\alpha)^4 e^{\alpha z}}{4!}\Bigg|_{z=0}.$$

Άρα αρκεί $\alpha^4 = 12$ ($\alpha \in \mathbb{C}$!!!). Τελικά, πρέπει

$\alpha = \sqrt[4]{12}\, e^{\frac{k\pi}{2} i}$, $k = 0,1,2,3.$ $\rightarrow$



(το κάναμε στην αρχή → εύρεση n-οστών ριζών ενός αριθμού $\in \mathbb{C}$).

↑ 4ες ρίζες του 12.

5.) $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$ είναι απλή + κλειστή. Ν.δ.ο: $\int_\gamma \bar{z}\, dz \in i\mathbb{R}$ (αμιγώς φανταστικός αριθμός).

Λύση: Έχουμε, $\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_0^1 \overline{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)\, dt$, $(\gamma(t) = x(t) + i y(t))$

Άρα, $I = \int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_0^1 [x(t) - i y(t)] \cdot [x'(t) + i y'(t)]\, dt$

Το $\operatorname{Re} I = \int_0^1 \left(x(t)x'(t) + y(t)y'(t)\right) dt = \int_0^1 \left(\frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2}\right)' dt =$

$= \frac{1}{2}\left[x^2(t) + y^2(t) - x^2(0) - y^2(0)\right] = 0$ $(\gamma(0) = \gamma(1))$.

(120.)

↑ εγγυάται ότι ο κύκλος $S(1)$ δεν διέρχεται από το b, άρα $\exists$ το ολοκλ.

7.) $a, b \in \mathbb{C}$, $|b| \neq 1$ και $m, n \in \mathbb{N}$. Να υπολογισθεί το

$$I = \int_{S(1)} \frac{(z-a)^n}{(z-b)^m} dz.$$

Λύση: Διακρίναμε περιπτώσεις:

i) $|b| > 1$. Τότε, $I = 0$ από το Θ. Cauchy.

ii) $|b| < 1$. Εφαρμόζουμε τον ολοκλ. τύπο Cauchy που έχουμε για

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^n \\ z_0 &= b \\ n &= m-1 \end{aligned}\right\}$$, παίρνουμε ότι:

$$2\pi i \frac{f^{(m-1)}(b)}{(m-1)!} = \frac{2\pi i}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^n \right|_{z=b} =$$

a) Αν $m-1 > n$, τότε $= 0$.

b) Αν $m-1 \leq n$, τότε $\frac{d}{dz}(z-a)^n = n(z-a)^{n-1}$

$$\frac{d^2}{dz^2}(z-a)^n = n(n-1)(z-a)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^n = n(n-1)\cdots(n-[(m-1)-1])\cdot(z-a)^{n-(m-1)} =$$

$$= n(n-1)\cdots(n-m+2)\cdot(z-a)^{n-m+1}$$

Άρα, $I = \frac{2\pi i}{(m-1)!} n(n-1)\cdots(n-m+2)\cdot(b-a)^{n-m+1}$

(121.)

Πρόταση: Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $f(z)$. Τ.α.ε.ι.:

i) Το z_0 είναι ελασσιώδες α.σ.
ii) Η f είναι φραγμένη σε μία περιοχή του z_0
iii) "Η f μπορεί να γίνει αναλυτική, αν αλλάξουμε την τιμή της στο z_0".

Εννοούμε ότι $\exists$ g αναλυτική στο z_0, τέτοια ώστε $f = g \ \forall z \neq z_0$

iv) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

Πρόταση: Έστω z_0 πόλος της συνάρτησης f (δηλ. $f \xrightarrow[z \to z_0]{} \infty$). Υπάρχει τότε $k \in N$ τ.ω.

i) Η $f(z)$ γράφεται ως $\frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + g(z)$, όπου $b_k \neq 0$ και $g(z)$ αναλυτική στο z_0.

ii) $\exists$ συνάρτηση $h(z)$ αναλυτική στο z_0 με $h(z_0) \neq 0$ έτσι ώστε $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k}$

iii) Το $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z)$ υπάρχει στο $\mathbb{C}$ και είναι $\neq 0$.

Αν βάζαμε μεγαλύτερο k, τότε το $\lim = 0$ και αν βάζαμε μικρότερο k, τότε το $\lim = \infty$.

iv) Το z_0 είναι ρίζα τάξης k της $W(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$

Ορισμός: Το $k \in \mathbb{N}$ ονομάζεται τάξη του πόλου.

Παραδείγματα:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z\sin(z)}$, $z=0$ είναι πόλος (ο παρανομαστής μηδενίζεται). τάξης 2.

$z=\pi$ είναι πόλος τάξης 1

2) $f(z) = \dfrac{(z-1)^2}{\sin^5(z-1)}$, $z=1$ είναι πόλος τάξης 3.

3) $\dfrac{z(e^z-1)}{\sin^2 z}$, $z=0$ είναι πόλος μηδενικής τάξης, όμως δεν το λέμε έτσι. Είναι επουσιώδες α.σ. γτ το όριο $=1$.

Παρατήρηση: Έστω $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, όπου g και h αναλυτικές στο z_0 και $h(z_0)=0$. Αν το z_0 είναι ρίζα τάξης $m \geq 1$ της h και ρίζα τάξης $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ της g τότε (i) αν $m>n$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $m-n$, (ii) αν $m \leq n$ τότε το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο.

Παρατήρηση: Έστω z_0 ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f(z)$. Τότε $\forall w \in \mathbb{C}$, εκτός ίσως από ένα, και $\forall\, \delta>0$ η εξίσωση $f(z)=w$, έχει άπειρες λύσεις στο $D(z_0,\delta)$

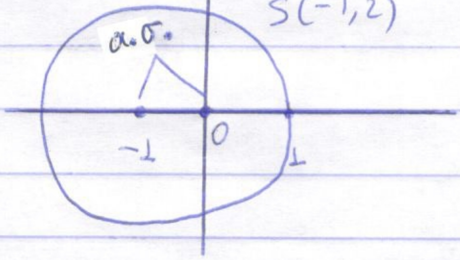
Φύλλο ασκήσεων:

6.) Υπολογίστε $\displaystyle\int_{S(-1,2)} \frac{e^z}{z^3+z^2}\,dz$

123

(*) ολοκλ. τύπος Cauchy.

Λύση:



Ανάγουμε σε μικρούς κύκλους. Η $f(z)$ έχει δύο μεμονωμένα α.σ. το 0 και −1. Από το Θ. Αναγωγής σε μ.κ. έχουμε ότι για μικρά $\delta>0$

$$I = \int_{S(-1,\delta)} f(z)\,dz + \int_{S(0,\delta)} f(z)\,dz = \int_{S(-1,\delta)} \frac{e^z/z^2}{z+1}\,dz + \int_{S(0,\delta)} \frac{e^z/(z+1)}{z^2}\,dz =$$

$$\overset{(*)}{=} 2\pi i \left.\frac{e^z}{z^2}\right|_{z=-1} + 2\pi i \left.\left(\frac{e^z}{z+1}\right)'\right|_{z=0} = 2\pi i \frac{1}{e} + 2\pi i \left.\frac{e^z(z+1)-e^z}{(z+1)^2}\right|_{z=0} =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{e}\right)$$

8.) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική. $f(0)=1$ και $f'(0)=-2$. Υπολογίστε το

$$J = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos\theta \, d\theta$$

σκέψεις: $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.
$\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$

$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \Rightarrow \cos\theta = e^{i\theta} - i\sin\theta$.
ακόμη, $\cos\theta := \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

Λύση: Έχουμε, $J = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \left(\frac{1}{2}\right) \left[e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right] d\theta$.

$z = e^{i\theta} = \gamma(\theta)$

(*) Θ. Cauchy

$dz = ie^{i\theta}\,d\theta \Rightarrow d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$

→ καλύτερα αυτό γιατί $\bar{z}$ όχι αναλυτική

$$J = \frac{1}{2}\int_{S(1)} f(z)\left(z + \frac{1}{z}\right)\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i}\left[\cancel{\int_{S(1)} f(z)\,dz}^{\,0\,(*)} + \int_{S(1)} \frac{1}{z^2} f(z)\,dz\right] = \frac{1}{2i}\int_{S(1)} \frac{1}{z^2} f(z)\,dz =$$

$= \frac{1}{2i} 2\pi i f'(0) = -2\pi.$

10.) f αναλυτική στο A, $\bar{D}(z_0,r) \subset A$. Ν.δ.ο.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi} I$$

(Θεώρημα Μέσης τιμής για μιγαδικούς)

Λύση: Θέτουμε $z = z_0 + re^{i\theta}$

$dz = ire^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{ire^{i\theta}} = \frac{dz}{i(z-z_0)}$

Άρα, $I = \int_{S(z_0,r)} f(z)\frac{dz}{i(z-z_0)} = \frac{1}{i}2\pi i f(z_0) = 2\pi f(z_0)$

17/12/2018 # Διάλεξη 21 (Φρατζεσκάκης)

Άσκηση: Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t) = e^{-at^2}$, $a>0$

Λύση:

$$F(w) = \int_0^{+\infty} e^{-at^2-iwt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at(t+\frac{iw}{a})}\,dt$$

Έστω $y = t + c \Rightarrow t = y - c$, οπότε

$$-at\left(t+\frac{iw}{a}\right) = -a(y-c)\left(y-c+\frac{iw}{a}\right)$$

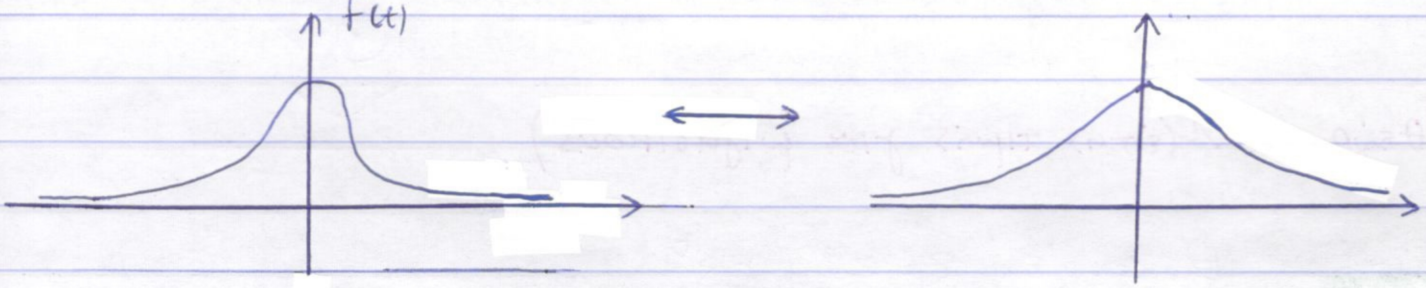
Επιλέγουμε $-c+\frac{iw}{a} = c \Leftrightarrow 2c = \frac{iw}{a} \Leftrightarrow c = \frac{iw}{2a}$, οπότε

$$-at\left(t+\frac{iw}{a}\right) = -a(y-c)\left(y-c+\frac{iw}{a}\right) = -a\left(y^2+\frac{w^2}{4a^2}\right)$$

125.

Συνεπώς, $F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(y^2+\frac{w^2}{4\alpha^2}\right)}\,dy = e^{-\frac{w^2}{4\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\; e^{-\frac{w^2}{4\alpha}}$

·Όσο πιο στενός είσαι στο πεδίο του χρόνου, τόσο πιο στενός είσαι στο πεδίο της συχνότητας.



$e^{-\alpha t} \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha+iw}$

$e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+w^2}$ $\quad \left(\begin{array}{c} t>0 \\ \alpha>0 \end{array}\right)$

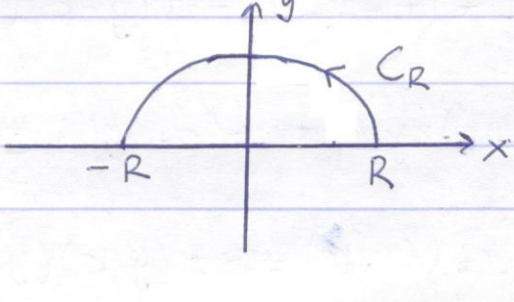
$e^{-\alpha t^2} \longleftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\; e^{-\frac{w^2}{4\alpha}}$

Συνάρτηση $\longleftrightarrow$ Μετασχ. Fourier.

Λήμμα του Jordan.

·Έστω $f(z)$ στο $C_R = \{Re^{i\theta} : R>0, \theta\in[0,\pi]\}$ και οι μόνες ανωμαλίες της είναι πόλοι, τότε:

$I = \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} e^{imz} f(z)\,dz \le \frac{\pi}{\alpha}M_R,\quad M_R = \max_{\theta\in[0,\pi]}|f'(Re^{i\theta})|,\quad m>0.$



Αν $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$, τότε $I=0$.

(126.)

Απόδειξη: Στο $C_R: z = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ και
$dz = iRe^{iR\theta}d\theta$

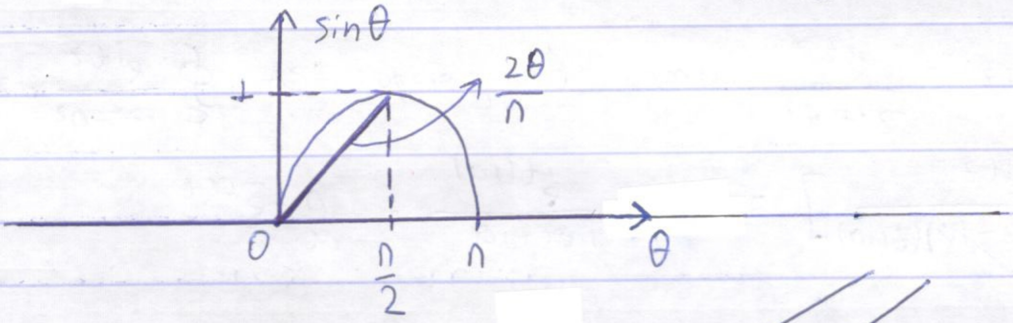
Άρα: $\int_{C_R} e^{imz} f(z)dz = \int_0^{\pi} e^{imR\cos\theta - mR\sin\theta} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}d\theta$

Επειδή $|e^{i\alpha}| = 1$ και $|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$, θα είναι:

$$\left|\int_{C_R} e^{imz} f(z)dz\right| \le R\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}|f(Re^{i\theta})|d\theta \le RM_R\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}d\theta =$$

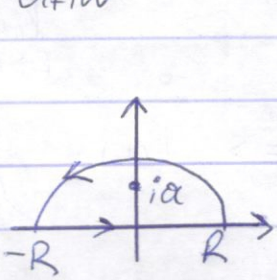
$$= 2RM_R\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta}d\theta \le 2RM_R\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2mR\theta}{\pi}}d\theta = M_R\frac{\pi}{a}(1-e^{-mR})$$

$\le \frac{\pi}{a}M_R$. Αν $M_R \to 0$, τότε $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} e^{imz} f(z)dz = 0$.



Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier της $F(w) = \frac{1}{a+iw}$, $a>0$, είναι:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iwt}}{a+iw}dw$$



Θεωρούμε $f(z) = \frac{e^{izt}}{a+iz}$, με πόλο $z = ia$

Άρα, $I = \oint \frac{e^{izt}}{a+iz}dz = 2\pi i \lim_{z\to ia}[(z-ia)f(z)] = 2\pi i \lim_{z\to ia}\left[\cancel{(z-ia)}\frac{e^{itz}}{\cancel{z-ia}}\right] =$

$= 2\pi e^{it(ia)} = 2\pi e^{-at}$

Λήμμα Jordan

Όμως, $I = \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \cancel{\int_{C_R} f(z)\,dz}^{\,0} = 2\pi\, e^{-at}$ $\Rightarrow$

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\, e^{iwt}\, dw$

$\Rightarrow F^{-1}\left[\frac{1}{a+iw}\right] = e^{-at}, \quad a>0, \; t>0$

* Υπενθύμιση:

$F(e^{-a|t|}) = \frac{2a}{w^2+\pi^2}$

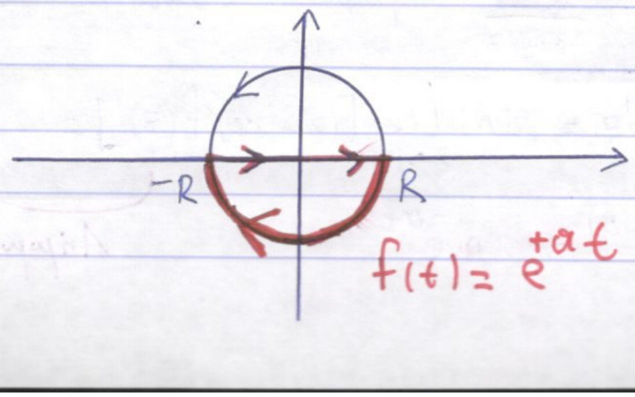
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\, e^{iwt}\, dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{w^2+\pi^2}\, e^{iwt}\, dw = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iwt}}{w^2+a^2}\, dw$

Έστω $f(z) = \frac{e^{itz}}{z^2+a^2}$ και θεωρούμε το $\oint_C \frac{e^{itz}}{z^2+\pi^2}\,dz = 2\pi i \lim_{z\to ia}\left[\cancel{(z-ia)}\frac{e^{itz}}{\cancel{(z-ia)}(z+ia)}\right] = 2\pi i\, \frac{e^{it(ia)}}{ia+ia} = \frac{\pi}{a}\, e^{-at}$

Όμως, $\oint f(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{a}\, e^{-at}$ $\Rightarrow$

$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \lim_{R\to+\infty}\cancel{\int_{C_R} f(z)\,dz}^{\,0\ (\text{Jordan})} = \frac{\pi}{a}\, e^{-at}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(t) = \cancel{\frac{a}{\pi}}\cdot\cancel{\frac{\pi}{a}}\, e^{-at}, \quad t>0.$



128.

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

2

1) Γραμμική ιδιότητα: $\mathcal{F}[\alpha f(t) + b g(t)] = \alpha F(w) + b\, G(w)$

2 δηλαδή είναι γραμμικός μετασχηματισμός, βλ. γραμμική άλγεβρα.

2) Μετασχηματισμός της παραγώγου: $\underset{t \to w}{\mathcal{F}}\left[\frac{d^n f}{d t^n}\right] = (iw)^n F(w)$

$$\underset{x \to k}{\mathcal{F}}\left[\frac{d^n f}{d x^n}\right] = (ik)^n F(k)$$

3) Μετατόπιση στον χρόνο: $\mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-iwt_0} F(w)$, $t_0 \in \mathbb{R}$

Μετατοπίσεις μίας συνάρτησης δεν αλλοιώνουν το μέτρο, παρά μόνο την φάση.

4) Μετατόπιση στη συχνότητα:

$$\mathcal{F}[f(t) e^{iw_0 t}] = F(w - w_0)$$

ή

$$\mathcal{F}[f(t)\cos(w_0 t)] = \frac{1}{2}[F(w-w_0) + F(w+w_0)]$$

$$\mathcal{F}[f(t)\sin(w_0 t)] = \frac{1}{2}[F(w-w_0) + F(w+w_0)]$$

129.

5) Συμμετρική ιδιότητα:

Αν $\mathcal{F}[f(t)] = F(w) \Rightarrow \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-w)$

6) Λήμμα Riemann-Lebergue:

Αν $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt < \infty$, τότε $\lim_{|w|\to\infty} F(w) = 0$

7) Θεώρημα του Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2 dw$$

↳ Φυσική σημασία: $f(t)$: Ηλεκτρική τάση ή Ρεύμα.

$\underset{P}{\underset{\parallel}{f^2(t)}}$: Ισχύς $\left(P = V\cdot I = I^2R = \frac{V^2}{R}\right)$

$E = \int P(t)\,dt = \int f^2(t)\,dt$

↳ Μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς το πεδίο συχνοτήτων

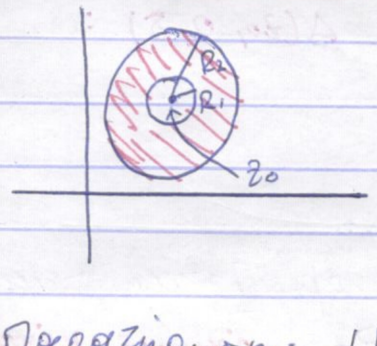
18/12/2018 # Διάλεξη 22 (Μπαρμπάτης)

11. Σειρές Laurent

Ορισμός: Ονομάζουμε σειρά Laurent μία σειρά της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Πρόταση: Υπάρχουν $R_1, R_2 \in [0,+\infty]$ τ.ω. η σειρά να συγκλίνει απόλυτα στον δακτύλιο $\Delta(z_0,R_1,R_2) := \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$, ενώ αποκλίνει αν $|z-z_0| < R_1$ ή αν $|z-z_0| > R_2$.



Δακτύλιος σύγκλισης της σειράς Laurent.

Παρατήρηση: Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ονομάζεται ομαλό ή αναλυτικό μέρος της σειράς Laurent.

Η σειρά $\sum_{-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n \overset{n=-k}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$ λέγεται ιδιάζον μέρος της σειράς Laurent.

Εξ' ορισμού, η σειρά Laurent συγκλίνει, όταν συγκλίνουν και οι δύο παραπάνω σειρές.

Παρατήρηση: Ενδέχεται, $R_1 \geq R_2$. Οπότε, ο δακτύλιο σύγκλισης θα είναι κενός. $\Delta(z_0,R_1,R_2) = \emptyset$.

131.

Πρόταση: i) Έστω ότι η σειρά Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ έχει μη κενό δακτύλιο σύγκλ. $\Delta(z_0, R_1, R_2)$. Τότε η συνάρτηση $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in \Delta(z_0, R_1, R_2)$ είναι αναλυτική στον $\Delta(z_0, R_1, R_2)$.

ii) Αντίστροφα, έστω $f(z)$ αναλυτική στον δακτύλιο $\Delta(z_0, R_1, R_2)$. Τότε η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent στον δακτύλιο αυτόν.

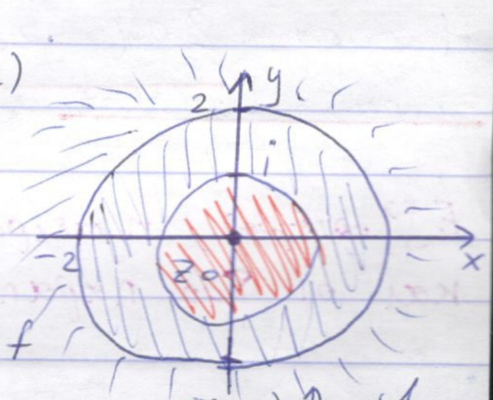
Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $f(z)$. Τότε $\exists \delta > 0$ ώστε η f να είναι αναλυτική στον δακτύλιο $\Delta(z_0, 0, \delta)$. Άρα η $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Laurent στον $\Delta(z_0, 0, \delta)$:

$$f(z) = \sum^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Ορισμός: Η παραπάνω σειρά Laurent ονομάζεται σειρά Laurent της f γύρω από το z_0, όχι με κέντρο το z_0!

Παράδειγμα: Έστω $f(z) = \dfrac{e^z \cos z}{z(z-i)\cdot(z+2)}$.

Θεωρούμε το $z_0 = 0$.



Ορίζονται 3 δακτύλιοι με κέντρο το $z_0 = 0$, σε καθε έναν από τους οποίους η f είναι αναλυτική (το 0, το ανάμεσα, και το απέξω). Άρα, σε κάθε έναν από αυτούς η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent επομένως έχουμε 3 σειρές Laurent, όσοι και οι δακτύλιοι, όλες με κέντρο το $z_0 = 0$. Η σειρά Laurent γύρω από το z_0, είναι αυτή που συγκλίνει στο $\Delta(0,0,1)$, δηλ. "κοντά - κοντά".