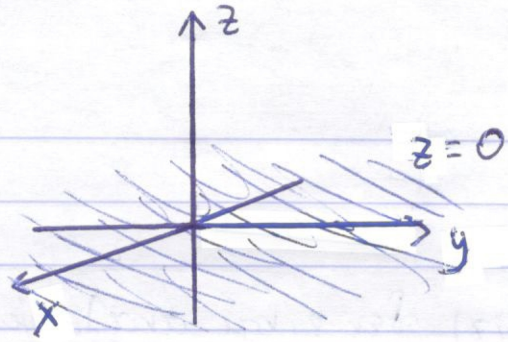
101.



dV/dt

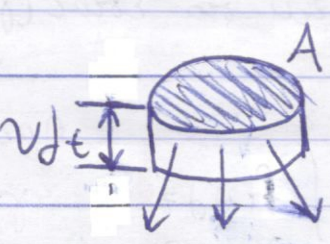
κάτι / χρόνο

Παροχή → ρυθμός με τον οποίο ο $\boxed{\text{όγκος}}$ του νερού περνά από μία διατομή.

Παροχή = σταθερή $\Rightarrow \dfrac{dV}{dt}$ = σταθερή, είναι;

$\dfrac{dV}{dt} = A\cdot v$, A: επιφάνεια
v: ταχύτητα ρευστού.

$Av = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m}{\rho}\right) = A v_r$ → λόγω ακτινικής συμμετρίας



→ $dV = A\cdot v\,dt$

$\dfrac{dV}{dt} = A\cdot v$ (διαισθητικά).

$\dfrac{d}{dt} = \rho(2\pi r)v_r = \text{σταθ.} \equiv B \Rightarrow v_r = \dfrac{k}{2\pi R}\cdot\dfrac{1}{r} = \dfrac{k}{r}$ ← ένταση πηγής

2

όπου $k = \dfrac{k}{2\pi R} > 0$

Άρα, $v_r = \dfrac{d\Phi}{dr} \Rightarrow \dfrac{k}{r} = \dfrac{d\Phi}{dr} \Rightarrow \boxed{\Phi(r) = k\ln(r)}$

Για $z = re^{i\theta}$, τότε $\underline{\Omega}(z) = k\,\mathrm{Log}(z) = \underbrace{k\ln(r) + ik\theta}_{\to\, k\ln(r)+ik\theta,\ \theta\in[0,2\pi)} + \cancel{k2\pi i}$

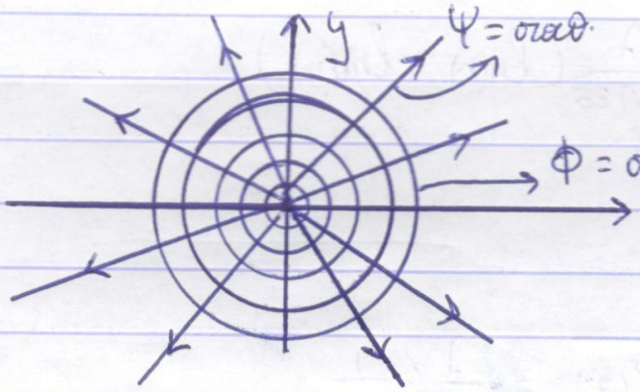
↑ μιγαδικό δυναμικό

$k\ln(r) = \Phi$ και $ik\theta = i\Psi$ → γραμμές ροής

$Im(\underline{\Omega}(z)) = \Psi =$ σταθ. => $\theta =$ σταθ. → "ακτίνες"

(ημιευθείες που ξεκινούν από την αρχή).

$Re(\underline{\Omega}(z)) = \Phi =$ σταθ. => $r =$ σταθ. → ομόκεντροι κύκλοι από την αρχή, με κέντρο την αρχή.



Αν η πηγή ήταν στο $z = z_0$ → $\underline{\Omega}(z) = k\log(z - z_0)$

Αν είχαμε καταβόθρα αντί για πηγή → $\underline{\Omega}(z) = -k\log(z - z_0)$.

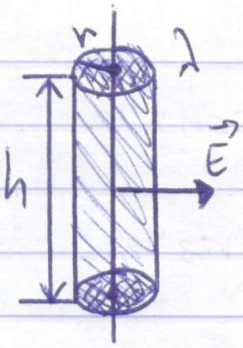
Αν είχαμε πηγή στο $z = -z_0$ και καταβόθρα στο $z = +z_0$ →
$\Omega(z) = k\log(z + z_0) - k\log(z - z_0)$

Παράδειγμα (Ηλεκτροστατική): Γραμμή με πυκνότητα φορτίου λ, κάθετη στο επίπεδο z, στο $z = 0$.

Πεδίο; Δυναμικό;

σελ. 103 →

103.



Νόμος Gauss: $\Psi_E = \oint \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{Q_{εγκ}}{\varepsilon_0}$

$E_r (2\pi \cancel{h} r) = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}}$

ακτινικό

$(dq = \lambda\, dl \Rightarrow Q_{εγκ} = \lambda \cdot h)$

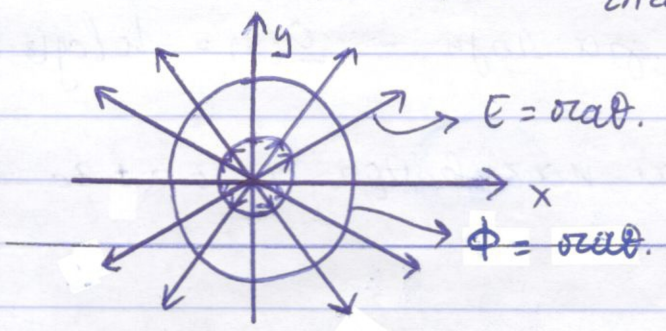
Για το δυναμικό: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \Rightarrow E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln(r) - \cancel{\ln(r_0)}^{\,0}\right)$

Άρα, $\underline{\Omega}(z) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{Log}(z)$

Προσοχή!: Εδώ $E = -\overline{\underline{\Omega}'(z)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z}$

και $|E| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|z|} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$



Το μιγαδικό δυναμικό

$\underline{\Omega}(z) = k\,\mathrm{Log}\,z \rightarrow$

$\rightarrow$ { Πηγή ρευστομηχανική γρ. κατανομή φορτίου στον ηλεκτρομαγνητισμό.

Παραλλαγή: Να μελετηθεί η ροή για το μιγαδικό δυναμικό

$\underline{\Omega}(z) = ik\,\mathrm{Log}(z)$, $k > 0$

στροβιλισμός

$$\left.\begin{aligned}\Omega(z) &= ik\,\mathrm{Log}\, z\\ z &= re^{i\theta}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Omega(z) = ik(\ln r + i\theta) \Rightarrow \Omega(z) = \Phi + i\Psi, \text{ με}$$

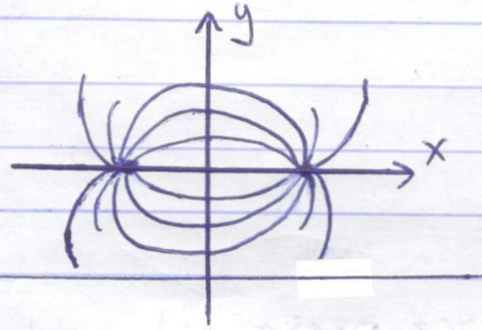
$$\Phi = -k\theta \text{ και } \Psi = k\ln r.$$

Άρα, γραμμές ροής $\Psi =$ σταθ. $\Rightarrow r =$ σταθ. $\rightarrow$ κύκλοι.

Ισοδυναμικές $\Phi =$ σταθ. $\Rightarrow \theta =$ σταθ. $\rightarrow$ ακτίνες και $V = \overline{\Omega'(z)} =$

$$= \frac{k\sin\theta}{r} - i\frac{k\cos\theta}{r} \Rightarrow |V| = |\overline{\Omega'(z)}| = \frac{k}{r}.$$

Παράδειγμα: Να μελετηθεί η ροή για το



$$\left.\begin{aligned}\Omega(z) &= k\,\mathrm{Log}\left(\frac{z+a}{z-a}\right)\\ z+a &= r_1 e^{i\theta_1}\\ z-a &= r_2 e^{i\theta_2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Omega(z) = \underbrace{k\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}_{\Phi} + \underbrace{ik(\theta_1 - \theta_2)}_{\Psi}$$

Όμως, $r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ και $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+a}\right)$, $\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right)$

105.

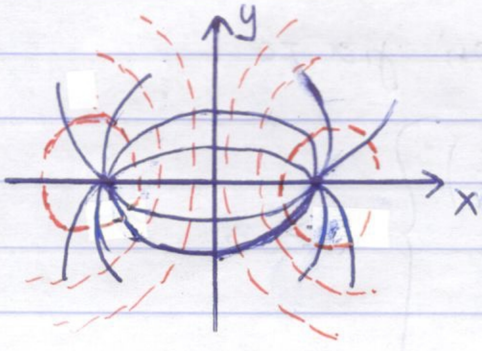
Ισοδυναμικές: $\Phi = \text{σταθ.} \equiv A \Rightarrow k\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = A \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[x - a\coth\left(\frac{a}{k}\right)\right]^2 + y^2 = A^2\,\mathrm{csch}^2\left(\frac{a}{k}\right) \longrightarrow$ κύκλοι με κέντρα $\left(a\coth\left(\frac{a}{k}\right), 0\right)$

Γραμμές ροής: $\Psi = \text{σταθ.} = B \Rightarrow \left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x+a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right)\right] =$

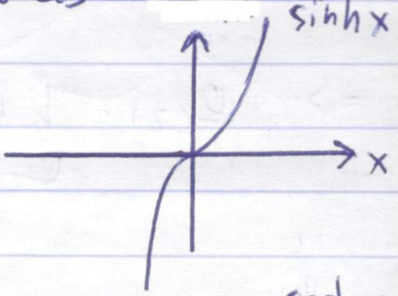
$= B/k \Rightarrow \dots \Rightarrow x^2 + \left[y + a\cot\left(\frac{B}{k}\right)\right]^2 = a^2\csc^2\left(\frac{B}{k}\right)$

κύκλοι με $\begin{cases} \text{κέντρο } \left(0, -a\cot\left(\frac{B}{k}\right)\right) \\ \text{ακτίνες } a|\csc(B/k)| \end{cases}$?

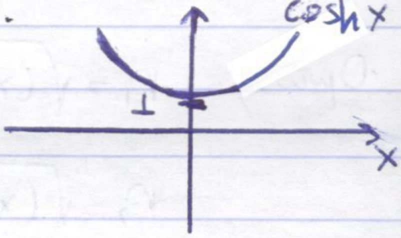


* Σημείωση: Υπερβολικές τριγωνικές συναρτήσεις

Υπερβολικό ημίτονο: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

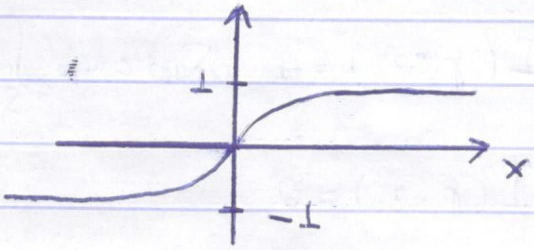


Υπερβολικό συνημίτονο: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

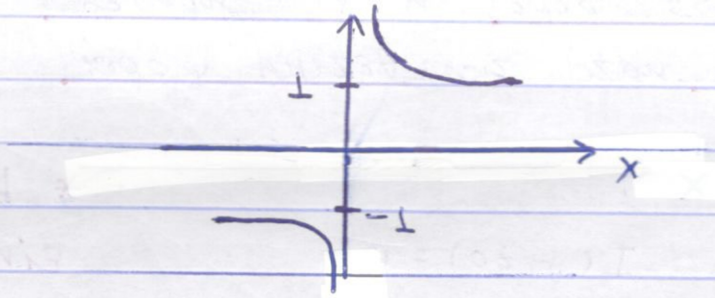


$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

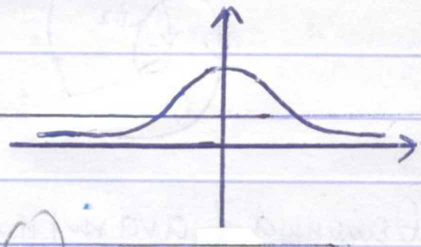
Υπερβολική εφαπτομένη: $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$



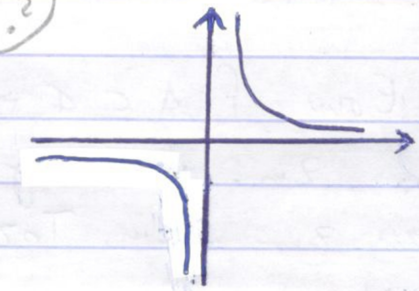
Υπερβολική συνεφαπτομένη: $\coth(x) = \dfrac{1}{\tanh(x)}$



Υπερβολική τέμνουσα: $\operatorname{sech}(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$



Υπερβολική συντέμνουσα: $\operatorname{csch}(x) = \dfrac{1}{\sin x}$?

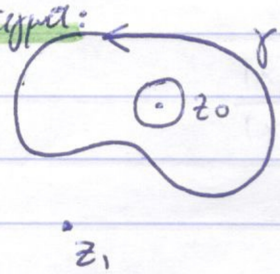


04/12/2018 # Διάλεξη 18η (Μπαρμπαλάτης).

Ορισμός: Έστω γ κλειστή καμπύλη και $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \notin$ ίχν(γ).
Ο αριθμός $I(\gamma, z_0) := \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$ ονομάζεται

δείκτης στροφής της γ ως προς το z_0.

Παράδειγμα:



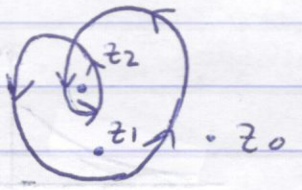
παραμέτρηση $\gamma(t) = z_0 + re^{i\theta}$

$I(\gamma, z_0) = 1$ διότι $\int_{S(z_0, r)} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$

$I(\gamma, z_1) = 0$

Παρατήρηση: ο $I(\gamma, z_0)$ είναι ακέραιος και δηλώνει πόσες φορές η γ "γυρνάει" γύρω από το z_0 κατά την θετική φορά

Παράδειγμα:



$I(\gamma, z_0) = 0$
$I(\gamma, z_1) = 1$
$I(\gamma, z_2) = 2$

* Η γ μπορεί να είναι οποιαδήποτε (και μη-απλή) κλειστή καμπύλη και τα $z_1, \dots, z_m$ δεν περικλείονται αναγκαστικά μέσα της.

Θεώρημα (αναγωγής σε μικρούς κύκλους):

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική εκτός από τα σημεία $z_1, z_2, \dots, z_m$. Έστω γ κλειστή καμπύλη που δεν διέρχεται από τα $z_1, \dots, z_m$. Τότε για $\delta > 0$ αρκετά μικρά, ισχύει

* $$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = I(\gamma, z_1)\int_{S(z_1,\delta)} f(z)\,dz + \dots + I(\gamma, z_m)\int_{S(z_m,\delta)} f(z)\,dz}$$ *

Θεώρημα (ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy):

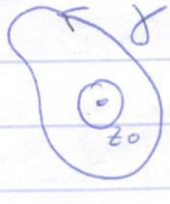
Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Έστω γ κλειστή καμπύλη στο A και έστω $z_0 \in A \setminus \text{ίχν}(\gamma)$, τότε για $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot I(\gamma, z_0)}$$

(108.)

Ειδικότερα, $\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\, I(\gamma, z_0)}$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι γ απλή κλειστή και $z_0 \in \text{Εσωτ}(\gamma)$
$\Rightarrow I(\gamma, z_0) = 1$



Θεωρούμε $\delta>0$ αρκετά μικρό ώστε να ισχύει το Θ. Αναγωγής σε μικρούς κύκλους. και ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \text{(ομοιόμορφη σύγκλιση).}$$

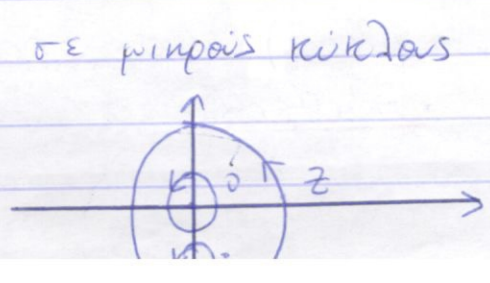
τότε, $$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \int_{S(z_0,\delta)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \int_{S(z_0,\delta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \int_{S(z_0,\delta)} \overbrace{(z-z_0)^{k-n-1}}^{=0 \text{ για } k\neq n}\,dz = 2\pi i\, \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $\int_{S(2)} \frac{e^z}{z^2(z+i)}\,dz$.

α' τρόπος: ανάλυση σε απλά κλάσματα $\frac{1}{z^2(z+i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{\Gamma}{z+i}$

β' τρόπος: αναγωγή σε μικρούς κύκλους



(109.)

$I(S(2),0) = 1 = I(S(2),-i)$

$$\int_{S(2)} \frac{e^z}{z^2(z+i)}\,dz = \int_{S(\delta)} \frac{\overbrace{\frac{e^z}{z+i}}^{f(z)}}{z^2}\,dz + \int_{S(-i,\delta)} \frac{\overbrace{\frac{e^z}{z^2}}^{g(z)}}{z+i}\,dz \overset{*}{\underset{**}{=}}$$

f αναλυτική στο $\bar{D}(\delta)$, $*$ ολοκλ. τύπος Cauchy (ειδ. περ.) για $g(z)$

g αναλυτική στο $\bar{D}(-i,\delta)$, $**$ ολοκλ. τύπος Cauchy για $f(z)$

$$\overset{*}{\underset{**}{=}} 2\pi i f'(0) + 2\pi i g(-i) = 2\pi i\left[\left[\frac{e^z}{z+i} - \frac{e^z}{(z+i)^2}\right]_{z=0} + (-e^{-i})\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{i} - (1/-1) - e^{-i}\right] = 2\pi i\left[\frac{1}{i} + 1 - e^{-i}\right]$$

Πρόταση (ανισότητες Cauchy):

Έστω f αναλυτική στο $A \subseteq \mathbb{C}$ και $\bar{D}(z_0,R) \subset A$. Αν $|f(z)| \le M$ $\forall z \in S(z_0,R)$, τότε,

$$\boxed{|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{M n!}{R^n}}$$

Απόδειξη: Από τον ολοκλ. τύπο Cauchy έχουμε:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{S(z_0,R)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\int_{S(z_0,R)} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\,|dz|$$

ολοκλ. 2ου τύπου

$$\le \frac{n!}{2\pi}\int_{S(z_0,R)} \frac{M}{R^{n+1}}\,|dz| = \frac{n!}{\cancel{2\pi}}\frac{M}{\cancel{R^{n+1}}}\cancel{2\pi R} = \frac{n!\,M}{R^n}$$

Θεώρημα (Liouville): Αν f αναλυτική στο $\mathbb{C}$, δηλ. $\overset{\text{ορ.}}{=}$ ακέραια, και φραγμένη, τότε είναι σταθερή.

110.

Απόδειξη: Θ.δ.ο. $f'=0$. Έστω $M>0$ τέτοιο ώστε $|f(z)|\leq M$ $\forall z\in\mathbb{C}$. Έστω $z_0\in\mathbb{C}$. Έστω $R>0$. Τότε, $|f'(z_0)|\leq \frac{M}{R}$

Παίρνοντας όριο $R\to+\infty$, παίρνουμε $f'(z_0)=0$

Άσκηση: Έστω f ακέραια και $f=u+iv$. Ν.δ.ο. αν η u είναι κάτω φραγμένη, τότε η f είναι σταθερή.

Θεώρημα (Θεμελιώδες Θεώρημα της άλγεβρας):

Κάθε μη-σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο, έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Δηλαδή αν $p(z)=a_n z^n+\ldots+a_1 z+a_0$ $(a_k\in\mathbb{C})$ τότε, $p(z)=a_n(z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_k)^{m_k}$, όπου $m_1+\ldots+m_k=n$.

Απόδειξη: Με άτοπο: Έστω αντίθετα ότι το $p(z)$ δεν έχει καμία ρίζα. Τότε, $p(z)\neq 0$ $\forall z\in\mathbb{C}$.
Η $f(z)=\frac{1}{p(z)}$, $z\in\mathbb{C}$ είναι τότε ακέραια. Ισχύει $p(z)\xrightarrow[z\to\infty]{}\infty$ άρα,

$$f(z)=\frac{1}{p(z)}\xrightarrow[z\to\infty]{}0 \qquad \left(\lim_{z\to\infty} f(z)=0\right)$$

άρα $(\varepsilon=1)$ $\exists R>0$: αν $|z|\geq R$ $(z\notin\bar{D}(R))$, τότε $|f(z)|<1$.

Επίσης, από τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων $|f(z)|\leq M$ $\forall z\in\bar{D}(R)$.

Άρα, $|f(z)|\leq M+1$ $\forall z\in\mathbb{C}$. Άρα από το Θ. Liouville είναι σταθερή, άτοπο.

10. Ανώμαλα σημεία

Πρόταση: Έστω f αναλυτική στο $A \subseteq \mathbb{C}$ μη σταθερή. Έστω το z_0 ρίζα της, δηλ. $f(z_0)=0$. Τότε $\exists$ μοναδικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ για τον οποίον ισχύουν τα εξής:

i) $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

ii) $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}$ $\exists$ στο $\mathbb{C}$ και είναι $\neq 0$.

iii) $\exists$ $g(z)$ αναλυτική τ.ω. $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$, $g(z_0) \neq 0$.

Παρατήρηση: Αν ισχύουν τα παραπάνω, τότε στον δίσκο σύγκλισης της σειράς Taylor η f συγκλίνει

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1} = (z-z_0)^k[\dots].$$

?

Ορισμός: Ο αριθμός k ονομάζεται πολλαπλότητα της ρίζας z_0.

Παράδειγμα: $f(z) = (z)^2(\sin(z))$, $z_0 = 0 \to n=3$
$z_1 = \pi \to n=1$

$g(z) = e^z(z-i)^5$, $z_2 = i \to n=5$

Ορισμός: Λέμε ότι το z_0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο για την συνάρτηση $f(z)$, αν $\exists$ κάποιο $\delta > 0$ ώστε η $f(z)$ να είναι αναλυτική στον $D(z_0,\delta) \setminus \{z_0\}$ → όχι στο z_0

112.

Ορισμός: Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f.

i) Αν το $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ∃ στο $\mathbb{C}$, τότε το z_0 λέγεται επουσιώδες ανώμαλο σημείο.

ii) Αν το $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, τότε το z_0 λέγεται πόλος.

iii) Αν το $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ∄ στο $\overline{\mathbb{C}}$, τότε το z_0 λέγεται ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

Παραδείγματα:

i) $f(z) = \begin{cases} z^2, & z \neq i \\ 3, & z = i \end{cases}$

Το $z = i$ → επουσιώδες α.σ. για την f.

ii) $g(z) = \frac{1}{\sin z}$ έχει πόλο σε κάθε ένα από τα σημεία $z_k = k\pi$.

iii) Έστω $h(z) = e^{1/z}$. Θ.δ.ο. Το $z=0$ είναι ουσιώδες α.σ.

Ορίζουμε $z_n = \frac{1}{n}$, $z_n' = -\frac{1}{n^2}$, τότε $z_n \to 0$, $z_n' \to 0$
όμως $h(z_n) = e^n \to \infty$, $h(z_n') = e^{-n} \to 0$

Άρα από κριτήριο μεταφοράς, το $\lim\limits_{z\to 0} h(z)$ ∄ στο $\overline{\mathbb{C}}$, άρα το 0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

10/12/2010 # Διάλεξη 19η (Φραγκισκάκης).

Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός Fourier

* μήπως:

$F(x, f(t)) = f(x, w)$?

Έστω μία συνάρτηση $f(x, t)$.

χώρος, χρόνος.

ενέργεια ← γωνιακή συχνότ.

Η συνάρτηση $F(x, w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\, e^{-iwt}\, dt$ ονομάζεται χρονικός μετασχηματισμός Fourier της $f(x,t)$, ενώ η συνάρτηση $F(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\, e^{-ikt}\, dx$ ονομάζεται χωρικός μετασχηματισμός Fourier.

$F(f(t)) \overset{?}{=} F(w)$ *, Πεδίο χρόνων → Πεδίο συχνοτήτων

$F(f(x)) = F(k)$, Πεδίο χώρων → Πεδίο κυματάριθμών

Μπορούμε να κάνουμε αυτή την δουλειά και προς την αντίθετη κατεύθυνση:

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Αν $F(f(t)) = F(w)$, τότε πρέπει $F^{-1}(F(w)) = f(t)$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός ορίζεται ως:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\, e^{iwt}\, dw$$

114.

Ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει (τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα) αν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet:

- η f είναι κατά τμήματα συνεχής·
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,t)|\,dt < +\infty$ για τον χρονικό μετασχηματισμό Fourier·
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,t)|\,dx < +\infty$ για τον χωρικό μετασχηματισμό Fourier·

!

Μετασχηματισμός Laplace:

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

αντίστοιχη με την συχνότητα

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier θα χρειαστούμε την συνάρτηση δ(t) (δέλτα του Dirac):

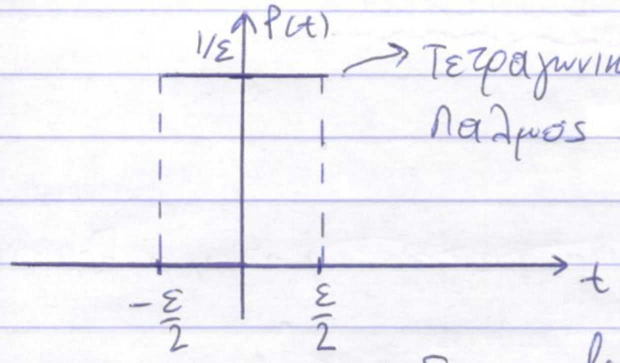
$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \neq 0 \\ \text{απροσδιόριστη}, & t = 0 \end{cases}}$$

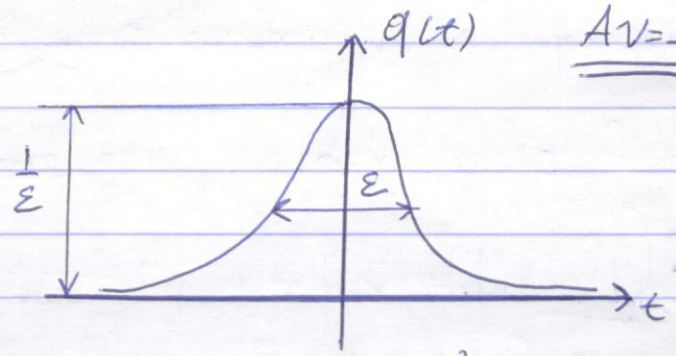
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1}$$

(A) Απειροστά μικρό πλάτος και απειροστά μικρό ύψος (ν)

Εποπτική περιγραφή της δ(t):

Αν=1





$$\delta(t) \sim \lim_{\varepsilon \to 0} p(t) \qquad q(t) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\varepsilon^2}$$

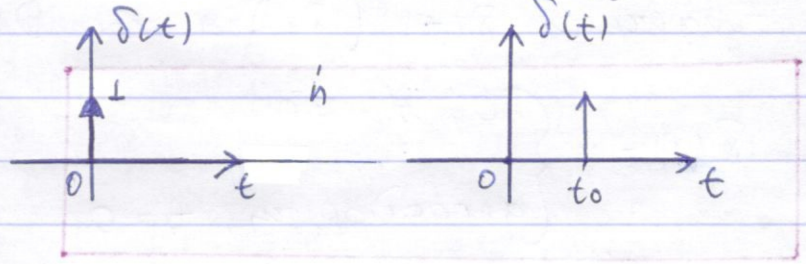
Η δ(t) ορίζεται από την θεωρία κατανομών ως εξής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0) \quad \text{ή} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\varphi(t)\,dt = \varphi(t_0)}$$

συνάρτηση δοκιμής
(ομαλή στο $t=0$)

Η συνάρτηση δ(t) είναι μία άρτια συνάρτηση.

Σύμβολο της δ(t): ή



Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier: $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\,d\omega$

Ευθύς μετασχηματισμός Fourier: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\,dt$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\, e^{-i\omega t'}\,dt'}_{F(\omega)}\, e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t'-t)}\,d\omega\right]dt' \quad (1)$$