Μετασχηματισμός Fourier (MF).

Έστω μια συνάρτηση $f(x,t)$

χρόνος χώρος

Η συνάρτηση

$$\boxed{F(x;\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\, e^{-i\omega t}\, dt}$$

ονομάζεται χρονικός μετ/σμός Fourier της $f(x,t)$

χρόνος → συχνότητες

Ενώ η συνάρτηση

$$\boxed{F(k;t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\, e^{-ikx}\, dx}$$

χώρος → κυματαριθμούς (ορμές)

ονομάζεται χωρικός μετ/σμός Fourier της $f(x,t)$

Ο μετ/σμός Fourier υπάρχει αν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet:

- η f είναι κατά τμήματα συνεχής
- υπάρχει το ολοκλήρωμα:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,t)|\, dt < \infty, & \text{για το χρονικό MF} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,t)|\, dx < \infty, & \text{—''— χωρικό MF} \end{cases}$$

Σε αρκετά προβλήματα έχουμε (αντί της $f(x,t)$)

συναρτήσεις $f(t)$ ⟶ χρησιμοποιούμε το χρονικό MF.

Αυτός σχετίζεται, όπως θα δούμε, με το μετ/σμό Laplace:

$$F(s)=\int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Ο αντίστροφος MF.

Η συνάρτηση $\delta(t)$

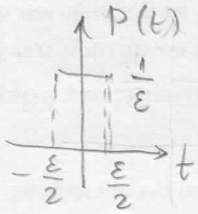
Η συνάρτηση $\delta(t)$ μπορεί να περιγραφεί (ΟΧΙ οριστεί!) ως:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall\, t \neq 0 \\ \text{απροσδιόριστη}, & t = 0 \end{cases}$$

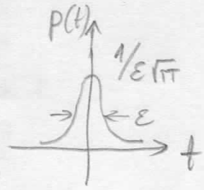
και $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)\,dt = 1$$

Ένας τρόπος για την εποπτική περιγραφή της $\delta(t)$ είναι:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} p(t)$$



ή $$p(t) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$



Η $\delta(t)$ ορίζεται από τη θεωρία κατανομών ως μια γενικευμένη συνάρτηση — ή κατανομή — ως εξής.

Θεωρείται μια συνάρτηση $\phi(t)$: συνάρτηση δοκιμής που είναι συνεχής στο $t=0$ και μηδενίζεται για $t \to \pm\infty$.

Τότε

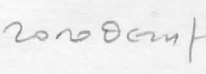
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\phi(t)\,dt = \phi(0)$$

και γενικότερα:

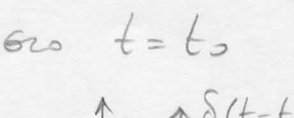
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)\,dt = \phi(t_0)$$

αν η $\delta(\ )$ είναι τοποθετημένη στο $t = t_0$

Σύμβολο:



ή



Ο αντίστροφος MF ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega}$$

Τότε:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\, e^{-i\omega t'}\, dt'\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t'-t)}\, d\omega\right] dt' \qquad (1)$$

Για να πάρουμε το προφανές/αναμενόμενο αποτέλεσμα $f(t)=f(t)$

πρέπει:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t'-t)}\, d\omega = \delta(t'-t)$$

οπότε η (1) γίνεται $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\,\delta(t'-t)\, dt' = f(t)$

Αυτό σημαίνει ότι

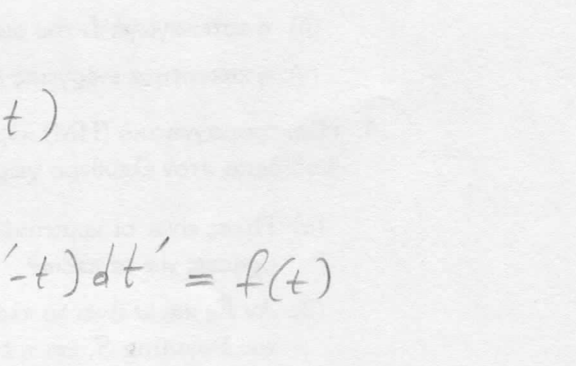
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot e^{-i\omega t}\, d\omega = \delta(t)$$

δηλ. ο αντίστροφος MF της μονάδας είναι $\delta(t)$.

Επίσης ο MF της $\delta(t)$ είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = e^{0} = 1$$

και $\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot e^{-i\omega t}\, dt = 2\pi\,\delta(\omega)$



Είναι: $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \omega=0: (1): \quad F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \\ \text{Για } t=0: (2): \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, d\omega \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt}{f(0)}}_{\text{χρονική διάρκεια}} \cdot \underbrace{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,d\omega}{F(0)}}_{\text{εύρος ζώνης}} = 2\pi}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις δείχνουν ότι

$$\{\text{χρον. διάρκεια}\} \times \{\text{εύρος ζώνης}\} = \text{σταθ.}$$

δηλ. όσο πιο μεγάλη έκταση καταλαμβάνει μια συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου τόσο πιο μικρό είναι το εύρος ζώνης της.

Αν το $t=0$ <u>δεν</u> είναι το κέντρο συμμετρίας της $f(t)$ αλλά είναι το $t=t_0$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} f(t+t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+i\omega(t+t_0)} d\omega \\ F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{array}\right\} \xrightarrow[\omega=0]{t=0} \begin{array}{l} f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \\ F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt}{f(t_0)} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t_0}\,d\omega}{F(0)} = 2\pi}$$

Παραδείγματα:

2) Να βρεθεί ο ΜF. της $f(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$.

Είναι: $f(t)=\begin{cases} e^{\alpha t}, & t<0 \\ e^{-\alpha t}, & t>0 \end{cases}$ οπότε:

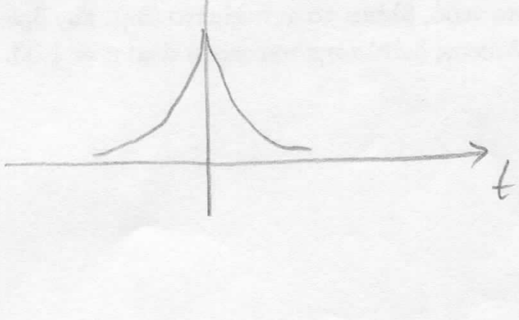
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{0} e^{+\alpha t}e^{-i\omega t}\,dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-i\omega t}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega)t}\,dt+\int_{0}^{+\infty} e^{(-\alpha-i\omega)t}\,dt=$$

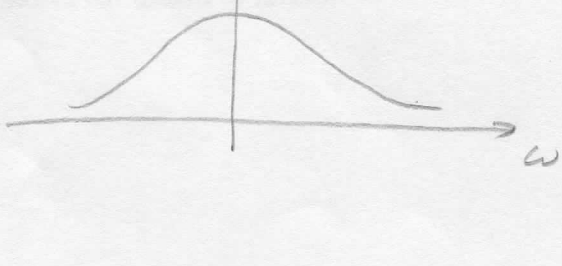
$$=\frac{1}{\alpha-i\omega}e^{(\alpha-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{-(\alpha+i\omega)}e^{-(\alpha+i\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\alpha-i\omega}+\frac{1}{\alpha+i\omega}=\frac{\alpha+\cancel{i\omega}+(\alpha-\cancel{i\omega})}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

Άρα: $\mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t|}\right]=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$



$\longrightarrow$



3) Να βρεθεί ο Μ.F. της $f(t) = e^{-\alpha t^2}$, $\alpha > 0$.

Είναι: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2 - i\omega t}\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t\left(t + \frac{i\omega}{\alpha}\right)}\, dt$$

Έστω $y = t + c \Rightarrow t = y - c$ οπότε

$$-\alpha t\left(t + \frac{i\omega}{\alpha}\right) = -\alpha (y - c)\left(y - c + \frac{i\omega}{\alpha}\right)$$

και θέλουμε $-c + \frac{i\omega}{\alpha} = c \Rightarrow 2c = \frac{i\omega}{\alpha} \Rightarrow c = \frac{i\omega}{2\alpha}$

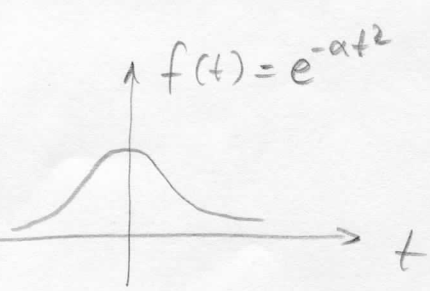
Έτσι ώστε:

$$-\alpha t\left(t + \frac{i\omega}{\alpha}\right) = -\alpha\left(y - \frac{i\omega}{2\alpha}\right)\left(y + \frac{i\omega}{2\alpha}\right) = -\alpha\left(y^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right)$$

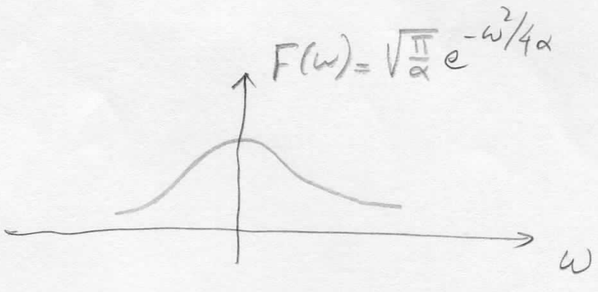
Άρα:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(y^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right)}\, dy = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\, dy$$

και επειδή $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ είναι: $F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\omega^2/4\alpha}$



$\longrightarrow$



4) <u>Παραδείγματα</u>: Να βρεθεί ο αντίστροφος MF της

$$F(\omega) = \frac{1}{\alpha+i\omega} \quad \left[\underline{\text{Υπενθύμιση}}: \mathcal{F}\left[e^{-\alpha t}\right] = \frac{1}{\alpha+i\omega},\ \alpha>0,\ t>0 \right]$$

Είναι: $$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega}\, d\omega$$

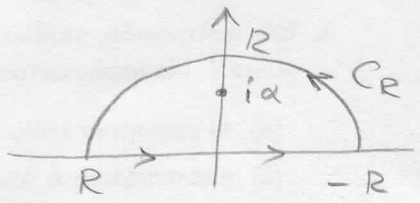
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{e^{izt}}{\alpha+iz}$

που έχει πόλο στο $iz+\alpha=0 \Rightarrow z=i\alpha$ και θεωρούμε

το $\oint_C f(z)dz$ όπου C η

καμπύλη του σχήματος που περικλείει

τον πόλο $z=i\alpha$



Άρα: $$\oint_C \frac{e^{itz}}{\alpha+iz}dz = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i\alpha}\left[(z-i\alpha)f(z)\right] =$$

$$= 2\pi \cancel{i} \lim_{z\to i\alpha}\left[(z-i\alpha)\frac{e^{itz}}{\cancel{i}(z-i\alpha)}\right] = 2\pi e^{it(i\alpha)} = 2\pi e^{-\alpha t}$$

Όμως $$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi e^{-\alpha t}$$

Για το $$\int_{C_R} f(z)dz = \frac{1}{i}\int_0^{\pi} \frac{e^{itRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}-i\alpha}\, iRe^{i\theta} d\theta \le \int_0^{\pi} |\cdots| d\theta$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{e^{-tR\sin\theta}}{|Re^{i\theta}-i\alpha|}\, d\theta \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Συνεπώς: $$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\alpha+i\omega}\right] = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\cancel{2\pi} e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t},\ \alpha>0,\ t>0.$$

4) <u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί ο αντίστροφος MF της

$$F(\omega)=\frac{1}{\alpha+i\omega}\quad\left[\text{Υπενθύμιση: } \mathcal{F}\left[e^{-\alpha t}\right]=\frac{1}{\alpha+i\omega},\ \alpha>0,\ t>0\right]$$

Είναι: $$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega}\,d\omega$$

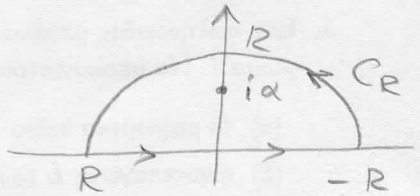
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{e^{izt}}{\alpha+iz}$

που έχει πόλο στο $iz+\alpha=0 \Rightarrow z=i\alpha$ και θεωρούμε

το $\oint_C f(z)\,dz$ όπου C η

καμπύλη του σχήματος που περικλείει

τον πόλο $z=i\alpha$



Άρα: $$\oint_C \frac{e^{itz}}{\alpha+iz}\,dz=2\pi i\cdot\lim_{z\to i\alpha}\left[(z-i\alpha)f(z)\right]=$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i\alpha}\left[(z-i\alpha)\frac{e^{itz}}{i(z-i\alpha)}\right]=2\pi e^{it(i\alpha)}=2\pi e^{-\alpha t}$$

Όμως $$\oint_C f(z)\,dz=\int_{-R}^{R} f(z)\,dz+\int_{C_R} f(z)\,dz=2\pi e^{-\alpha t}$$

Για το $$\int_{C_R} f(z)\,dz=\frac{1}{i}\int_0^{\pi}\frac{e^{itRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}-i\alpha}\,iRe^{i\theta}\,d\theta\le\int_0^{\pi}|\ldots|\,d\theta$$

$$\le\int_0^{\pi}\frac{e^{-tR\sin\theta}}{|Re^{i\theta}-i\alpha|}\,d\theta\xrightarrow[R\to+\infty]{}0.$$

Συνεπώς: $$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\alpha+i\omega}\right]=\frac{1}{2\pi}2\pi e^{-\alpha t}=e^{-\alpha t},\ \alpha>0,\ t>0.$$

5) <u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί ο αντίστροφος ΜF της

$$F(\omega) = \frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2} \quad \left[\text{Υπενθύμιση: } \mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t|}\right] = \frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2} \right]$$

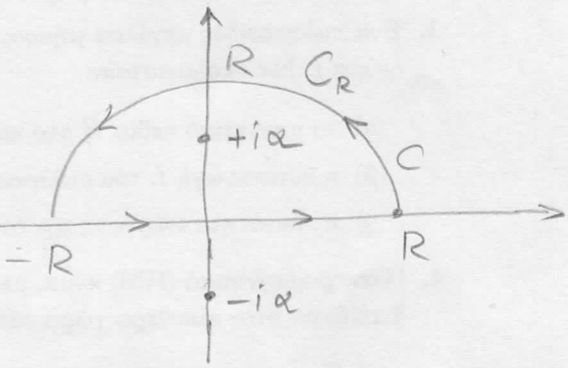
Είναι:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2+\alpha^2}\, d\omega$$

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \underbrace{\frac{e^{itz}}{z^2+\alpha^2}}_{=f(z)}\, dz$$



με C όπως στο σχήμα, να περικλείει τον πόλο $z = i\alpha$.

Άρα $$\oint_C \frac{e^{itz}}{z^2+\alpha^2}\, dz = 2\pi i \lim_{z\to i\alpha}\left[\cancel{(z-i\alpha)}\, \underbrace{\frac{e^{itz}}{\cancel{(z-i\alpha)}(z+i\alpha)}}_{f(z)}\right] =$$

$$= 2\pi i\, \frac{e^{it(i\alpha)}}{i\alpha+i\alpha} = \cancel{2}\pi\cancel{i}\, \frac{e^{-\alpha t}}{\cancel{2}\cancel{i}\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}\, e^{-\alpha t}$$

Όμως είναι:

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{\alpha}\, e^{-\alpha t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{\alpha}\, e^{-\alpha t}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2+\alpha^2}\, d\omega + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha t}$$

όπου πρέπει να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz$

Πάνω στο C_R είναι:

$$z = Re^{i\theta} \Rightarrow dz = iRe^{i\theta}\,d\theta$$

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_0^{\pi}$$

οπότε:

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{itRe^{i\theta}}}{R^2 e^{2i\theta}+\alpha^2}\, iRe^{i\theta}\,d\theta$$

Είναι:

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{e^{itRe^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}+\alpha^2}\, iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \leq \int_0^{\pi}\left|\ \cdots\ \right| d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{Re^{-tR\sin\theta}}{\left|R^2e^{2i\theta}+\alpha^2\right|}\,d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2Re^{-\frac{2tR\theta}{\pi}}}{R^2-\alpha^2}\,d\theta\ ,\ \boxed{t>0}$$

γιατί $\left|R^2e^{2i\theta}+\alpha^2\right| \geq \left|R^2e^{2i\theta}\right| - \alpha^2 = R^2-\alpha^2$

και $\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \Rightarrow -\sin\theta \leq -\frac{2\theta}{\pi}$ στο $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Άρα το τελευταίο ολοκλήρωμα δίνει:

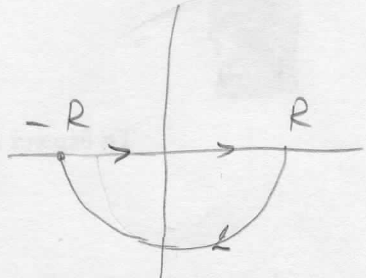
$$\frac{2R}{R^2-\alpha^2}\,\frac{\pi}{2tR}\left(1-e^{-tR\theta}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Συνεπώς $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$

Άρα:

$$f(t) = \cancel{\frac{\alpha}{\pi}}\,\cancel{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\alpha t}, \quad t>0$$

Αν $t<0$ παίρνουμε τον δρόμο:



και παίρνουμε

$$f(t) = e^{+\alpha t}, \quad t<0$$

Συνεπώς $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}\right] = e^{-\alpha|t|}$.