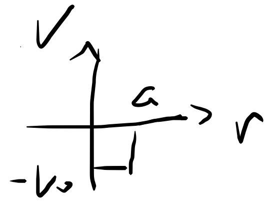
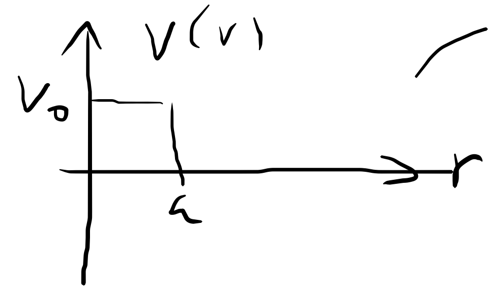
Σήμερα → Ανάλυση σε μερικά κύματα (Partial wave expansion) (*)

Παρασκευή → Οπτικό Θεώρημα

→ Δευτέρα → εφαρμογές → επαφή με γνωστά προβλήματα



ή

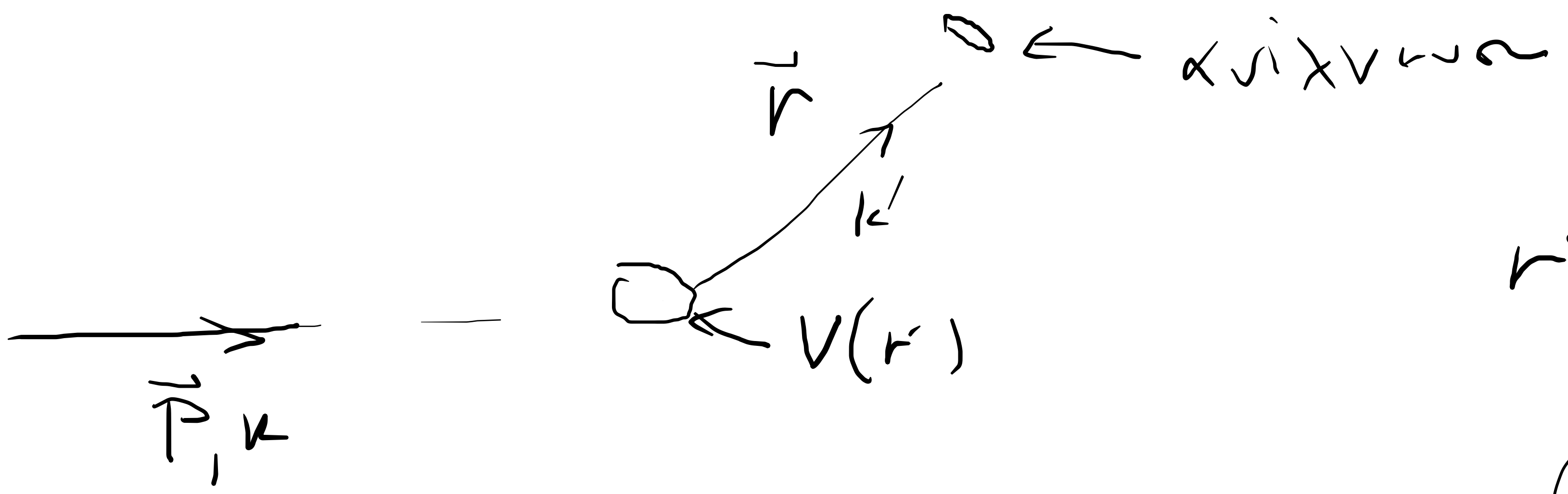


σ με χρυσό κανόνα Fermi στο επίπεδο Born.

επίσης στο όριο που το V_0

Παρασκευή → Τέλος

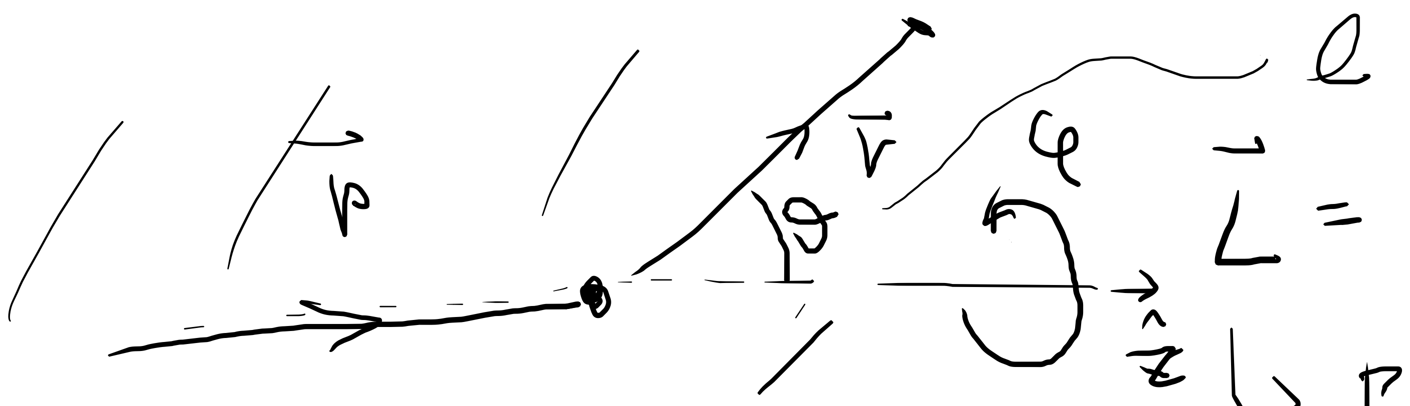
Ανάλυση με μερικά κύματα



$r \gg$ διάσταση της περιοχής σύγκρουσης

$(r \gg r')$

$$G_0(\vec k, \vec k'; E) \xrightarrow[r \gg r']{} \frac{e^{ikr}}{r}$$



$\vec L = \vec r \times \vec p$

↳ βρίσκεται σε διεύθυνση $\perp$ στο επίπεδο σύγκρουσης $(\vec p, \vec r)$

$V(\vec r) = V(r)$

και το επίπεδο σύγκρουσης και το $\vec L = \vec r \times \vec p$ δεν εξαρτώνται από το φ.

$T \; , \; S$

$$\underbrace{\langle \ell m | T | \ell m \rangle}_{T_\ell} \quad ή \quad \langle \ell m | S | \ell m \rangle$$

$$[L^2, H] = [\underset{z}{L_3}, H] = 0 \qquad \langle \ell m | T | \ell' m' \rangle = \delta_{\ell \ell'} \cancel{\delta_{m m'}}$$

$$\langle \ell m | T | \ell m \rangle = T_\ell$$ ισοδύναμο στη γωνία θ

σκέδαση θα σχετίζεται με το ℓ

διαφορική πληροφορία!

$T_\ell, S_\ell \longrightarrow f(k,\theta)$

$\nwarrow \ell$

Εισερχόμενα κύματα (incoming particle)

$$\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikr\cos\theta}$$

σφαιρικό επίπεδο λύση της Schrödinger για V=0

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα

$$\boxed{e^{ikr\cos\theta} = \sum_\ell i^\ell (2\ell+1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta)}$$

επίπεδο

Σχέση Rayleigh

θα δούμε πως η παρουσία το V (έχουμε σκέδαση) αλλάζει το l.

$\delta l \to V$

Χρονοανεξάρτητη Schrödinger σε σφαιρικές

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(r)\Psi = E\Psi$$ με λύση

$$\Psi_E(\vec{r}) = \sum_{lm} C_{lm}\, \underbrace{R_{El}}_{E \to k}(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$\to \varphi$

και επειδή $V(\vec{r}) = V(r)$, δεν αναμένω εξάρτηση από το φ

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) \to Y_{l0}(\theta, \varphi = 0) \Rightarrow P_l(\cos\theta)$$

$(2l+1) \to$ (εκφυλισμοί;) $\underline{(2l+1)}$

Για το ακτινικό μέρος, αν $u_{kl}(r) = rR_{kl}(r)$

$$\frac{d^2 u_{kl}(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u_{kl}(r) = 0$$

$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

γωνιακό μέρος

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_{kl}(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r)\, u_{kl}(r) \qquad (1)$$

$$R_{kl}(r)\, Y_{l0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta) \sim P_l(\cos\theta) \qquad \Big(\underset{\substack{\uparrow \\ L_3}}{m} = 0 \Big)$$

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell R_{k\ell}(r) P_\ell(\cos\theta) \quad (2).$$

Για τη λύση σκέδασης επερχόμενη

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Big(\underbrace{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{\text{Rayleigh}} + f(k,\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \Big)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k,\theta)|^2$$

$$\Rightarrow \psi(r,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Big[\sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta) + f(k,\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \Big] \quad (3).$$

Θα συγκρίνουμε τις (2) & (3) στην περιοχή $r\to\infty$
(ελεύθερη λύση)

Ξεκινάω απ' τη
(3) που περιέχονται $j_\ell(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} \dfrac{\sin(kr-\ell\pi/2)}{kr}$

$$(3) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[\sum_\ell i^\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) \frac{\sin(kr-\ell\pi/2)}{kr} + f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right]$$

Για τον όρο $\sin(kr-\ell\pi/2) = \dfrac{1}{2i}\left[e^{ikr}\underbrace{e^{-i\ell\pi/2}}_{(-i)^\ell} - e^{-ikr}\underbrace{e^{i\ell\pi/2}}_{i^\ell}\right]$

$$\psi(r,\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Bigg\{ -\frac{e^{-ikr}}{2ikr} \sum_{l} i^{2l} (2l+1) P_l$$

$$+ \frac{e^{ikr}}{r} \Big[f(k,\theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{l} i^{l} (-i)^{l} (2l+1) P_l \Big] \Bigg\} \quad (4)$$

(4) είναι το όριο της (3) για $r \to \infty$

Για την σύγκριση, θέλουμε το όριο (2), που είναι η λύση της (1) στο ίδιο όριο ($r \to \infty$)

πάει στο μηδέν πιο γρήγορα από $1/r$

$$(1) \sim \left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \left(r R_{kl}(r) \right) = \frac{2m}{\hbar^2} \underbrace{\{ V(r)\, r \}}_{\xrightarrow[r\to\infty]{} 0} R_{kl}(r)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R_{kl}(r)+k^2R_{kl}(r)=0$$

Είναι η εξίσωση του ακτινικού μέρους της ελεύθερης Schrödinger

$\rho = kr$ & $u = \rho R_{kl}(r)$

$$\frac{d^2u}{d\rho^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}u+u=0$$

{ ελεύθερο σωματίδιο σε 3D-shrödinger }

$R_{kl}(r)=A_l j_l(\rho)+B_l n_l(\rho)=A_l j_l(kr)+B_l n_l(kr)$

όπου $j_l(\overset{kr}{\rho}) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\sin\rho}{\rho}$

$$n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\cos\rho}{\rho}$$

στο όριο $\rho \to \infty$ $\quad j_l(\rho) \simeq \frac{1}{\rho}\sin\left(\rho - \frac{l\pi}{2}\right)$

$$n_l(\rho) \simeq -\frac{1}{\rho}\cos\left(\rho - \frac{l\pi}{2}\right)$$

στην αρχή $r=0$
δε είναι ορισμένη

$$j_l(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr} \quad ; \quad n_l(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} -\frac{\cos(kr - l\pi/2)}{kr}$$

Αυτό σημαίνει

$$R_{k\ell}(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} A_\ell \frac{\sin(kr - \ell\pi/2)}{kr} - B_\ell \frac{\cos(k - \ell\pi/2)}{kr}$$

Ορίζω

$$\left.\begin{aligned} A_\ell &= C_\ell \cos\delta_\ell \\ B_\ell &= -C_\ell \sin\delta_\ell \end{aligned}\right| \rightarrow \quad \begin{aligned} & C_\ell^2 = A_\ell^2 + B_\ell^2 \\ & \tan\delta_\ell = -\frac{B_\ell}{A_\ell} \quad \text{ή} \quad \delta_\ell = -\tan^{-1}\left(\frac{B_\ell}{A_\ell}\right) \end{aligned}$$

οπότε

$$R_{k\ell}(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{C_\ell}{kr}\left[\cos\delta_\ell \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) + \sin\delta_\ell \cos\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)\right]$$

$\downarrow \cos\alpha \sin\beta + \sin\beta \cos\alpha$

$$\boxed{R_{k\ell}(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{C_\ell}{kr} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right)} \quad (*)$$

Πραγματικά $\underline{V=0}$ παντού $R_\ell = 0 \Leftrightarrow \sin\delta_\ell = 0 \Leftrightarrow \delta_\ell = 0$

μετατόπιση φάσης

$\boxed{\delta_\ell = \text{μετατόπιση φάσης}} \leftarrow V \neq 0 \Leftrightarrow \delta_\ell \neq 0$

$$(2) \rightsquigarrow \psi(r,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\ell a_\ell R_{k\ell}(r)\, P_\ell(\cos\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{(*)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\ell a_\ell P_\ell(\cos\theta)\, \frac{\sin(kr - \ell\pi/2 + \delta_\ell)}{kr}$$

$$\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) = \frac{1}{2i}\left[e^{ikr} e^{-il\pi/2} e^{i\delta_l} - e^{-ikr} e^{il\pi/2} e^{-i\delta_l}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[(-i)^l e^{ikr} e^{i\delta_l} - i^l e^{-ikr} e^{-i\delta_l}\right]$$

$$\to \psi(r,\theta) \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{-3/2}}\left\{\frac{e^{-ikr}}{2ikr} \sum_l a_l i^l e^{-i\delta_l} P_l(\cos\theta)\right.$$

$$\left. + \frac{e^{ikr}}{2ikr} \sum_l a_l (-i)^l e^{i\delta_l} P_l(\cos\theta)\right\} \quad (5)$$

Συγκρίνοντας την (4) με την (5)

μπορούμε να σχετίσουμε τα a_ℓ και τα δ_ℓ

$$(4) \equiv (5) \rightarrow \quad i^{2\ell}(2\ell+1) = a_\ell \, i^{\ell} \, e^{-i\delta_\ell}$$

στο συντελεστή $\frac{e^{-ikr}}{r}$

$$\Rightarrow \boxed{a_\ell = (2\ell+1)\, i^{\ell} \, e^{i\delta_\ell}}$$

Επιστρέφοντας στην (5) για το συντελεστή $\frac{e^{ikr}}{r}$

που περιέχει τη πληροφορία της συνάρτησης $f(k,\theta)$

$$\frac{1}{2ik}\sum_{\ell}(2\ell+1)\, i^{\ell} e^{i\delta_\ell}(-i)^{\ell} e^{i\delta_\ell} P_\ell(\cos\theta)$$
$$= f(k,\theta) + \frac{1}{2ik}\sum_{\ell} i^{\ell}(-i)^{\ell}(2\ell+1) P_\ell(\cos\theta)$$

επειδή $\frac{e^{2i\delta_\ell}-1}{2i} = e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell$, $(-i)^{\ell}(+i)^{\ell} = 1$

$$\Rightarrow f(k,\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1) P_\ell(\cos\theta)\left(e^{2i\delta_\ell}-1\right) \rightarrow$$

$$f(k,\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) \sin\delta_\ell \, e^{i\delta_\ell}$$

ορίζοντας $f_\ell(k) = \frac{1}{k} e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell$

$$\Rightarrow \quad f(k,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f_\ell(k) P_\ell(\cos\theta)$$

$V=0$

a_ℓ

$\delta_\ell = 0$

$f_\ell(k) = 0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k,\theta)|^2$$