$G_0 = \frac{1}{E-H_0}$, $G = \frac{1}{E-H}$, $H = H_0 + V$

$|\phi\rangle = |\phi_0\rangle + G_0 V |\phi\rangle$ (εξίσωση Lippman-Schwinger)

λύση της πλήρους

λύση της ομογενούς

ή καλύτερα

$|\psi^{(+)}\rangle = |\phi_0\rangle + G_0^{(+)} V |\psi^{(+)}\rangle$ θέλουμε λύσεις εξερχόμενες (outgoing)

Στην αναπαράσταση θέσης

$$\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}) = \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}\,' \; G_0^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}\,'; E)\, V(\vec{r}\,')\, \psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,') \quad (*)$$

Lippmann - Schwinger
στην αναπαράσταση θέση

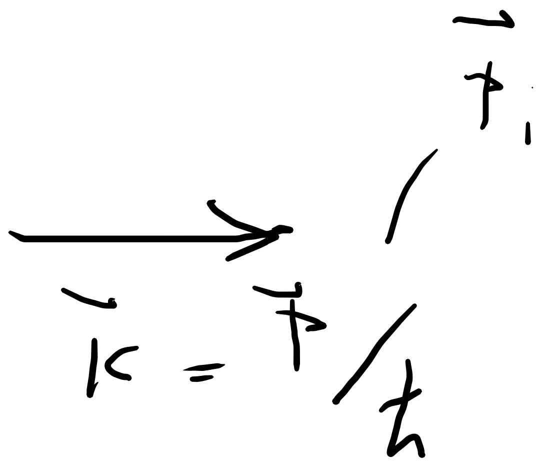
$$G_0^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}\,'; E) = \langle \vec{r} | \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} | \vec{r}\,' \rangle \; , \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

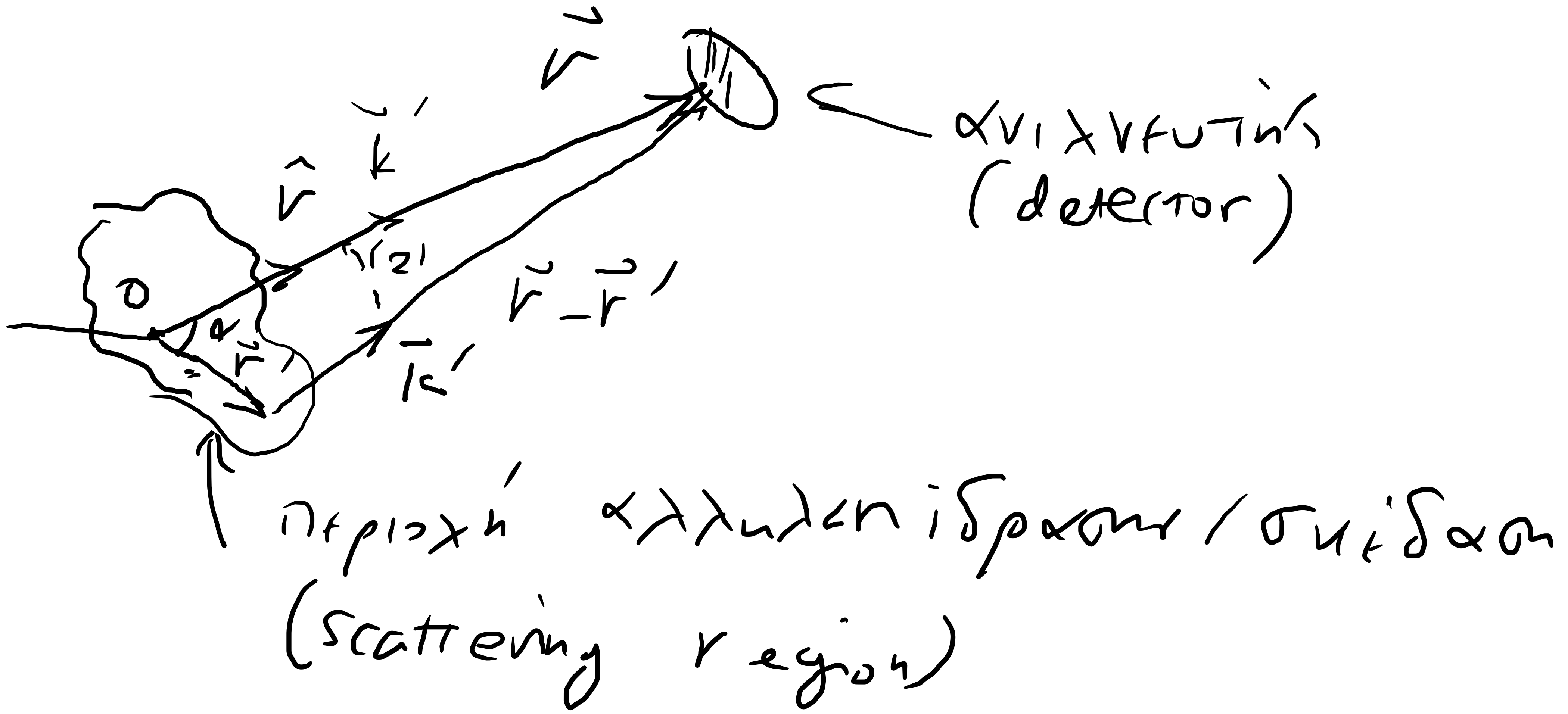
$$\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Από την ολοκλήρωση

$$G_0^{(+)}(\vec r, \vec r\,'; E) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\,\frac{e^{ik|\vec r - \vec r\,'|}}{|\vec r - \vec r\,'|} \quad 4$$

Όριο για μεγάλα $\vec r$, $r \gg r'$





1) $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq \left(r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'\right)^{1/2} = r\left(1 + \underbrace{\frac{r'^2}{r^2}} - 2\,\frac{\hat{r}\cdot\vec{r}'}{r}\right)^{1/2}$

$$\simeq r\left(1 - \frac{\hat{r}\cdot\vec{r}'}{r}\right) + O\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)$$

$$= r - \hat{r}\cdot\vec{r}' \quad (1)$$

2) ορίζουμε $\quad \vec{k}' \equiv k\hat{r} \quad (2)$

(1) & (2) $\quad k|\vec{r} - \vec{r}'| = kr - \vec{k}'\cdot\vec{r}' \quad (3)$

Άρα $r >> r'$ ((1) & (3))

$$G_0^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,';E) \xrightarrow[r>>r']{} -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}\,'}$$

(*) L-S εξίσωση

$$\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}) = \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}\,' \, G_0(\vec{r},\vec{r}\,';E)\, V(\vec{r}\,')\, \psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}\,') \qquad (*)(*)$$

$$* \quad \psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \underbrace{- \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3\vec{r}\,' \, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}\,'}\, V(\vec{r}\,')\, \psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}\,')}_{f(\vec{k},\vec{k}') = f(k,\vartheta)}$$

με $f(k,\theta) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2}(2\pi)^{3/2}\int d^3\vec{r}\,'\, e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}\,'}\, V(\vec{r}\,')\,\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,')$

πλάτος σκέδασης

$$(+)(*) \Longrightarrow \underbrace{\psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r})}_{\text{τελική}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\underbrace{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{\text{αρχική}} + \underbrace{f(k,\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{σκέδαση}}\right)$$

Σχέση Faxén–Holtsmark

Μπορούμε να δείξουμε ότι $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k,\theta)|^2$

$$\leadsto \sigma = \int |f(k,\theta)|^2 d\Omega$$

Έχουμε ήδη ότι

$$f(r,\theta) = \underbrace{-\frac{m}{2\pi\hbar^2}(2\pi)^{3/2}}_{-\frac{m\sqrt{2\pi}}{\hbar^2}} \int d^3\vec{r}\,' \, e^{-i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}\,'} \, V(\vec{r}\,')\, \psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,')$$

Επειδή $\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ μπορώ να ορίσω

$$\phi_{\vec{k}\,'}(\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}\,'} \rightsquigarrow \phi^*_{\vec{k}\,'}(\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}\,'}$$

Πλάτος σκέδασης

$$f(r,\theta) = f(\vec{k},\vec{k}\,') = -\frac{m\sqrt{2\pi}}{\hbar^2}(2\pi)^{3/2} \int d^3\vec{r}\,' \, \phi^*_{\vec{k}\,'}(\vec{r}\,')\, V(\vec{r}\,')\, \psi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,')$$

$|\vec{k}| = |\vec{k}\,'|$ ελαστική σκέδαση

$$\Rightarrow \quad f(\vec{k},\vec{k}') = f(k,\theta) = f(k,\hat{k}\cdot\hat{k}')$$

$$= -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle\phi_{\vec{k}'}|V|\psi_{\vec{k}}^{(+)}\rangle$$

▶ Επειδή ξέρουμε $\quad V|\psi_{\vec{k}}^{(+)}\rangle \equiv T|\phi_{\vec{k}}\rangle$

$$V|\phi\rangle \equiv T|\phi_0\rangle$$

Ακόμη καλύτερα:

$$f(\vec{k},\vec{k}') = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \phi_{\vec{k}'} | T | \phi_{\vec{k}} \rangle$$

Χρησιμοποιώ μόνο $\phi_{\vec{k}}$ ή $\phi_{\vec{k}'}$