Εργασία ΚΜ 2021

Α. Μελέτη διορθώσεων ανώτερης τάξης για τη θεμελιώδη στάθμη αναρμονικού ταλαντωτή

Στις παραδόσεις για τις χρονοανεξάρτητες διαταραχές αναφέρθηκε ο αναρμονικός ταλαντωτής

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \alpha\hat{x}^3 + \beta\hat{x}^4, \ \ (\beta > 0)$$

και υπολογίστηκε η 1ης τάξης διόρθωση στην quartic και η 2ης τάξης στην cubic (η 1ης τάξης της cubic είναι μηδέν)

$$E_n = \hbar\omega\,(n+1/2) + \frac{3\beta}{4}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2(2n^2+2n+1) - \frac{15}{4}\frac{\alpha^2}{\hbar\omega}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3\left(n^2+n+11/30\right) \qquad (\mathbf{1})$$

[βλέπε Landau-Lifchitz QM p132]
Θέτοντας $\alpha = 0$ και χρησιμοποιώντας την αδιάστατη σταθερά $\lambda\left(\beta = \lambda\frac{m^2\omega^3}{\hbar}\right)$ η διαταραχή (quartic) γράφεται $\lambda(\hbar\omega)\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2\hat{x}^4$. Οι διορθώσεις ανώτερης τάξης για τη θεμελιώδη κατάσταση υπολογίζονται σαν

$$E_0(\lambda) = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(1 + \frac{3}{2}\lambda - \frac{21}{4}\lambda^2 + \frac{333}{8}\lambda^3 - \frac{30885}{64}\lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^5)\right) \qquad (\mathbf{2})$$

[βλέπε Bender and Wu: Phys. Rev. 184 (1969) 1231]

1) Στο μάθημα υπολογίστηκε η 1ης τάξης $\frac{3\lambda}{4}$ διόρθωση. Υπολογίστε την 2η τάξη $-\frac{21\lambda^2}{8}$ και δώστε ερμηνεία του αρνητικού προσήμου.

2) Η σειρά **(2)** αποκλίνει και ανήκει στην κατηγορία των "singular perturbation series"

$$(\hbar\omega)^{-1}E_0(\epsilon) \simeq \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\epsilon - \frac{21}{8}\epsilon^2 + \frac{333}{16}\epsilon^3, \quad \epsilon \to 0^+$$

[βλέπε Bender-Orszag sect 7, p330, "Asympt. Method and Perturbation Theory" (χρησ. κεφ. 6 & 7)]. Για μεγάλη τάξη ($N \gg 1$) ο συντελεστής A_N της σειράς συμπεριφέρεται ασυμπτωτικά ως:

$$A_N \simeq -(-3)^n\Gamma(N+1/2)\,\sqrt{6}/\pi^{3/2}\,.$$

Να γίνει η μελέτη αυτής της συμπεριφοράς [βλέπε Bender and Wu: app E,F & G και Bender and Wu: Anharmonic Oscillator II].

3) Χρησιμοποιείστε την εξίσωση Riccati για να υπολογίσετε τους όρους της σειράς **(2)**. [βλέπε N. Bessis and G. Bessis; Fernandez and Castro Eq 19].

4) Για όσους θέλουν στο διαδίκτυο μπορούν να βρουν το BenderWuMATHEMATICA (βλέπε σχετική αναφορά).

Β. Υπολογισμός δ_λ για το δυναμικό $V(r)$

α) Με χρήση της μεθόδου των Wroskians αποδείξτε την σχέση

$$\tan\delta_l = -k\int_0^\infty j_l(kr)\,U(r)\,R_l(r)\,r^2\,dr$$

όπου $U(r) = \frac{2mV(r)}{\hbar^2}$ και $R_l(r)$ η ακτινική λύση της Schrödinder.

β) Δείξτε ότι στο όριο χαμηλών ενεργειών

$$\delta_0 \simeq -\frac{2m}{\hbar^2 k}\int_0^\infty \sin^2(kr)\,V(r)\,dr$$

γ) Συγκρίνετε το αποτέλεσμα από τη σχέση αυτή με ένα γνωστό για το δ_0 που συζητήθηκε στο μάθημα, πχ σκληρή σφάιρα, πηγάδι δυναμικού.

[βλέπε Joachain, Quantum Collision Theory, sect 4.3 και Constantinescu, Magyari, Problems in QM, ch 10]