

# ΕΝΟΤΗΤΑ Ι.

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Το περιεχόμενο της Ενότητας Ι, αφορά σε απομονωμένα (κλειστά) κβαντικά συστήματα. Πολλά από αυτά που αναφέρονται είναι γνωστά από τα βασικά μαθήματα Κβαντικής Μηχανικής αλλά υπάρχουν επιπλέον επισημάνσεις και έννοιες που είναι απαραίτητες για τις επόμενες ενότητες οι οποίες αφορούν σε ανοικτά κβαντικά συστήματα. Σε κάθε περίπτωση, θεωρείται δεδομένη η καλή γνώση των θεμελιακών εννοιών της Κβαντικής Μηχανικής και η επαρκής εξοικείωση με τον αντίστοιχο μαθηματικό φορμαλισμό. Από τα πάρα πολλά και πολύ καλά συγγράμματα μπορούμε, ενδεικτικά, να αναφέρουμε αυτά που βρίσκονται στις αναφορές [1-5].

**(1) Κβαντική κατάσταση** (quantum state) είναι η πλήρης περιγραφή ενός φυσικού συστήματος. Είναι στοιχείο (:άνυσμα) ενός διανυσματικού χώρου Hilbert  $H$  και συμβολίζεται ως  $|\psi\rangle$ . Ο όρος «κβαντική κατάσταση» αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο μέσω του οποίου μπορεί να υπολογισθεί με ακρίβεια η πιθανότητα εμφάνισης των αποτελεσμάτων όλων των μετρήσεων οι οποίες είναι δυνατόν να γίνουν σε ένα συγκεκριμένο **κβαντικό σύστημα**. Ο τελευταίος όρος αναφέρεται σε συγκεκριμένη πειραματική διαδικασία η οποία **προετοιμάζει** την κατάσταση επί της οποίας διεξάγονται οι μετρήσεις. Ως ένα παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την κατάσταση ενός σωματιδίου με σπιν  $1/2$ :

$$|\psi\rangle = a|1/2\rangle_z + b|-1/2\rangle_z \quad (\text{I.1})$$

Στην έκφραση αυτή οι καταστάσεις  $|\pm 1/2\rangle$  είναι καταστάσεις στις οποίες εάν μετρηθεί η προβολή του σπιν στη διεύθυνση του άξονα  $z$  θα βρεθεί, με βεβαιότητα, η τιμή  $\pm \hbar/2$ . Η κατάσταση (I.1) μπορεί να **προετοιμαστεί** με την ακόλουθη διαδικασία: Μετράται (ας πούμε μέσω μιας διάταξης Stern-Gerlach) η προβολή του σπιν σε μια συγκεκριμένη διεύθυνση (η οποία καθορίζεται από τους συντελεστές  $a, b$ ) και επιλέγεται το αποτέλεσμα  $\hbar/2$ .

Υπάρχουν πολλές μαθηματικές ιδιότητες ενός χώρου Hilbert οι οποίες έχουν ιδιαίτερη σύνδεση με τη φυσική και μάλιστα με την Κβαντική Μηχανική. Για τις πολύ ενδιαφέρουσες αυτές ιδιότητες καθώς και τη σχέση τους με τις έννοιες της Κβαντικής Μηχανικής παραπέμπουμε στα σχετικά μαθήματα και τα αντίστοιχα βιβλία.

Το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο Hilbert, είναι η αντιστοίχιση ενός διατεταγμένου ζεύγους στοιχείων του χώρου σε έναν μιγαδικό αριθμό:

$$H \ni \{|\varphi\rangle, |\psi\rangle\} \rightarrow \langle\varphi|\psi\rangle \in \mathbb{C} \quad (\text{I.2})$$

Οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου είναι απλές:

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle > 0 \quad \forall |\psi\rangle \neq 0, \quad \langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^* \\ \langle\varphi|(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\langle\varphi|\psi_1\rangle + b\langle\varphi|\psi_2\rangle \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Το μέτρο ενός ανύσματος στον χώρο Hilbert ορίζεται ως

$$\|\psi\|_{\text{ορσ}} = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} < \infty \quad (\text{I.4})$$

Στο πλαίσιο της Κβαντικής Μηχανικής, το μέτρο ενός στοιχείου του χώρου Hilbert έχει ιδιαίτερη σημασία: Δηλώνει τη συνολική πιθανότητα να εμφανισθεί κάποιο από τα δυνατά αποτελέσματα σε μετρήσεις επί της συγκεκριμένης κβαντικής κατάστασης. Για τον λόγο αυτό συζητάμε για **κανονικοποιημένες** καταστάσεις:

$$\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad (\text{I.5})$$

Όταν  $\langle\varphi|\psi\rangle = 0$  και  $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \neq 0$  τα δύο ανύσματα λέγονται **ορθογώνια** και οι αντίστοιχες καταστάσεις **ορθογώνιες**. Ένα παράδειγμα ορθογώνιων καταστάσεων είναι οι αμοιβαία αποκλειόμενες καταστάσεις  $|1/2\rangle_z$  και  $|-1/2\rangle_z$  στην (I.1). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η ορθογωνιότητα,  ${}_z\langle 1/2|-1/2\rangle_z = 0$ , οφείλεται στο γεγονός ότι σε κάθε μία από τις επιμέρους καταστάσεις το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι βέβαιο και διαφορετικό. Γενικότερα, δυο διαφορετικές καταστάσεις είναι ορθογώνιες μεταξύ τους εάν είναι δυνατόν να τις διαχωρίσουμε με μία μόνο μέτρηση (δες τη συζήτηση στην Ενότητα II).

Οι κβαντικές καταστάσεις έχουν χαρακτηριστικά τα οποία δεν έχουν κλασικό ανάλογο. Ένα από τα πιο σημαντικά είναι η λεγόμενη **κβαντική συνοχή**. Για να καταλάβουμε την έννοια αυτή μπορούμε να αναφερθούμε, και πάλι, στην κατάσταση (I.1). Εάν την χρησιμοποιήσουμε για να μετρήσουμε την προβολή του σπιν στον άξονα  $z$  θα βρούμε με πιθανότητα  $\text{Prob}_z(1/2) = |a|^2$  την τιμή  $\hbar/2$  και με πιθανότητα

$\text{Prob}_z(-1/2) = |b|^2 = 1 - |a|^2$  την τιμή  $-\hbar/2$ . Ο λόγος είναι ότι η κατάσταση (I.1) έχει γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αμοιβαίως αποκλειομένων ενδεχομένων σε ό,τι αφορά στην εν λόγω μέτρηση. Εντούτοις, όπως αναφέραμε στην αρχή, η κατάσταση (I.1) περιέχει το σύνολο των πληροφοριών που αφορούν στην εμφάνιση όλων των πιθανών αποτελεσμάτων όλων των δυνατών μετρήσεων επί του συγκεκριμένου

συστήματος. Εάν επιχειρήσουμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε πιθανότητες που αφορούν στον άξονα  $x$  θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι

$$|\pm 1/2\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1/2\rangle_x \pm |-1/2\rangle_x) \quad (\text{I.6})$$

Έτσι, θα γράψουμε την (I.1) με διαφορετικό τρόπο:

$$|\psi\rangle = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)|1/2\rangle_x + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)|-1/2\rangle_x \quad (\text{I.7})$$

Έχοντας γράψει την κατάσταση (I.1) ως γραμμικό συνδυασμό αμοιβαία αποκλεισμένων ενδεχομένων αμέσως μπορούμε να βρούμε ότι:

$$\text{Prob}_x(1/2) = \frac{1}{2}|a+b|^2 = \frac{1}{2} + |a||b|\cos(\theta_b - \theta_a), \quad \text{Prob}_x(-1/2) = 1 - \text{Prob}_x(1/2) \quad (\text{I.8})$$

Παίζοντας το ίδιο παιχνίδι με τον άξονα  $y$  θα γράψουμε:

$$|\psi\rangle = \left(\frac{a+ib}{\sqrt{2}}\right)|1/2\rangle_y + \left(\frac{a-ib}{\sqrt{2}}\right)|-1/2\rangle_y \quad (\text{I.9})$$

Οι αντίστοιχες πιθανότητες βρίσκονται αμέσως να είναι:

$$\text{Prob}_y(1/2) = \frac{1}{2}|a+ib|^2 = \frac{1}{2} + |a||b|\sin(\theta_b - \theta_a), \quad \text{Prob}_y(-1/2) = 1 - \text{Prob}_y(1/2) \quad (\text{I.10})$$

Το σημαντικό που πρέπει να υπογραμμισθεί εδώ είναι το γεγονός ότι οι πληροφορίες που περιέχονται στην κβαντική κατάσταση (I.1) είναι διαμοιρασμένες και στους δύο μιγαδικούς συντελεστές  $a, b$ . Εάν απομονωθεί οποιοσδήποτε από αυτούς ή δεν ληφθεί υπόψη η μεταξύ τους διαφορά φάσης, μέρος αυτών των πληροφοριών χάνεται.

Αυτό κάνει την επαλληλία κβαντικών καταστάσεων -η (A.1) αποτελεί μόνο ένα από τα απλούστερα παραδείγματα- να έχει ένα ιδιαίτερο είδος συνοχής το οποίο δεν έχει κλασικό ανάλογο και ονομάζεται **κβαντική συνοχή (coherence)**. Μια κατάσταση της μορφής (I.1) είναι ο κανόνας μέσω του οποίου συνθέτουμε ανεξάρτητα ενδεχόμενα στην κβαντική μηχανική, κανόνας ο οποίος διαφέρει θεμελιακά από τον αντίστοιχο της κλασικής θεωρίας πιθανοτήτων.

**(2) Παρατηρήσιμο ή φυσικό μέγεθος** είναι μια μετρήσιμη ιδιότητα ενός κβαντικού συστήματος. Ένα τέτοιο μέγεθος αντιπροσωπεύεται από κάποιον αυτοσυζυγή τελεστή ο οποίος δρα στις καταστάσεις του χώρου Hilbert.

Στη γενικότητά του, ο τελεστής είναι ένας μαθηματικός χειρισμός μέσω του οποίου τα στοιχεία του χώρου Hilbert μετασχηματίζονται σε άλλα στοιχεία του ίδιου χώρου. Σωστότερα, είναι μια απεικόνιση των στοιχείων του χώρου Hilbert στον εαυτό τους:

$$H \ni |\psi\rangle \rightarrow \hat{A}|\psi\rangle = |\psi'\rangle \in H \quad (I.11)$$

Ως λειτουργίες στον διανυσματικό χώρο Hilbert, οι τελεστές είναι αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα. Στο πλαίσιο των τεχνολογικών εφαρμογών αντιπροσωπεύουν συγκεκριμένες φυσικές διαδικασίες (: **πύλες**) οι οποίες μετατρέπουν μια κβαντική κατάσταση σε μια άλλη μέσω της κατάλληλης τεχνολογίας.

Οι τελεστές (I.11) για τους οποίους συζητάμε είναι **φραγμένοι** αφού  $\|\psi'\| < \infty$ . Συνήθως ενδιαφερόμαστε για γραμμικούς τελεστές:

$$\hat{A}(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\hat{A}|\psi_1\rangle + b\hat{A}|\psi_2\rangle \quad (I.12)$$

Η δράση των τελεστών  $\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$ ,  $\hat{C}_2 = \hat{A}\hat{B}$  ορίζεται ως:

$$(\hat{A} + \hat{B})|\psi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle + \hat{B}|\psi\rangle, \quad \hat{A}\hat{B}|\psi\rangle = \hat{A}(\hat{B}|\psi\rangle) \quad (I.13)$$

Η σειρά με την οποία εφαρμόζονται οι τελεστές σε κάποιο στοιχείο ενός χώρου Hilbert έχει μεγάλη σημασία αφού, εν γένει,

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|\psi\rangle = [\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle \neq 0 \quad (I.14)$$

Ο τελεστής  $[\hat{A}, \hat{B}]$  ονομάζεται **μεταθέτης** και έχει σημαντικό ρόλο στη μελέτη των ιδιοτήτων των αντίστοιχων τελεστών. Όταν οι τελεστές  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  αντιπροσωπεύουν φυσικά μεγέθη, μη μηδενικός μεταθέτης σημαίνει ότι τα αντίστοιχα μεγέθη δεν μπορούν να είναι γνωστά ταυτοχρόνως.

Ο συζυγής  $\hat{A}^\dagger$  ενός τελεστή  $\hat{A}$  ορίζεται από τη σχέση:

$$\langle \varphi | \hat{A}^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \varphi \rangle^*, \quad \forall |\varphi\rangle, |\psi\rangle \in H \quad (I.15)$$

Ένας τελεστής είναι **αυτοσυζυγής** εάν:

$$\hat{A}|\psi\rangle = \hat{A}^\dagger|\psi\rangle, \quad \forall |\psi\rangle \in H \leftrightarrow \hat{A} = \hat{A}^\dagger \quad (I.16)$$

Η εύρεση των στοιχείων του χώρου Hilbert για τα οποία η δράση ενός τελεστή  $\hat{A}$  μπορεί να γραφεί ως

$$\hat{A}|n\rangle = \alpha_n|n\rangle \quad (I.17)$$

συνιστά το λεγόμενο **πρόβλημα ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων** του τελεστή. Ο δείκτης που ξεχωρίζει τις διαφορετικές ιδιοκαταστάσεις μεταξύ τους μπορεί να είναι διακριτός ή και συνεχής. Στις σημειώσεις αυτές θεωρούμε ότι η διάσταση του χώρου Hilbert επί του οποίου δρουν οι τελεστές είναι πεπερασμένη:  $\dim H = D < \infty$ . Αυτό περιορίζει τους δείκτες στην (I.15) να είναι διακριτοί:  $n = 1, 2, \dots$ . Οι λόγοι για τους οποίους περιοριζόμαστε σε χώρους πεπερασμένων διαστάσεων είναι λόγοι απλότητας και αποφυγής των επιπλέον μαθηματικών απαιτήσεων που θέτουν οι χώροι απείρων διαστάσεων. Εντούτοις, όλα όσα ακολουθούν μπορούν να γενικευθούν σε τέτοιους χώρους. Η γενίκευση αυτή έχει ενδιαφέρον όχι μόνο για λόγους πληρότητας αλλά και επειδή συνδέεται άμεσα με εφαρμογές της Κβαντικής οπτικής.

Εάν ένας τελεστής είναι **αυτοσυζυγής ή κανονικός** ( $[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 0$ ) οι ιδιοκαταστάσεις του  $\{|n\rangle, n = 1, \dots, D\}$  αποτελούν **βάση** στον, πεπερασμένων διαστάσεων, χώρο Hilbert επί του οποίου η δράση του τελεστή ορίζεται.

Αυτό, μαθηματικά, περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$\sum_{n=1}^D |n\rangle\langle n| = \hat{I}, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{n,m} \quad (\text{I.18})$$

Η πρώτη από τις προηγούμενες σχέσεις λέγεται **σχέση πληρότητας** ενώ η δεύτερη δηλώνει την **ορθοκανονικότητα** των στοιχείων της βάσης. Με τη βοήθεια των σχέσεων αυτών, οποιοδήποτε στοιχείο του χώρου Hilbert μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ανυσμάτων της βάσης:

$$|\psi\rangle = \hat{I}|\psi\rangle = \sum_{n=1}^D |n\rangle\langle n|\psi\rangle = \sum_{n=1}^D c_n |n\rangle \quad (\text{I.19})$$

Οποιοσδήποτε τελεστής μπορεί να γραφεί ως:

$$\hat{A} = \left( \sum_{n=1}^D |n\rangle\langle n| \right) \hat{A} \left( \sum_{m=1}^D |m\rangle\langle m| \right) = \sum_{n,m} A_{nm} |n\rangle\langle m|, \quad A_{nm} = \langle n|\hat{A}|m\rangle \quad (\text{I.20})$$

Εάν ο τελεστής  $\hat{A}$  έχει ένα πλήρες σύστημα ιδιοκαταστάσεων και το χρησιμοποιήσουμε στην (I.20) θα βρούμε:

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^D \alpha_n |n\rangle\langle n| \quad (\text{I.21})$$

Μέσω της τελευταίας σχέσης ορίζονται οι **συναρτήσεις τελεστών**:

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=1}^D f(\alpha_n) |n\rangle\langle n| \quad (\text{I.22})$$

Όταν υπάρχει **εκφυλισμός**, όταν δηλαδή, υπάρχουν διαφορετικές μεταξύ τους καταστάσεις  $|n^{(j)}\rangle$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_n$  οι οποίες αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή  $\alpha_n$  η (I.21) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_n |n^{(j)}\rangle \langle n^{(j)}| \quad (\text{I.23})$$

Στην τελευταία σχέση  $N$  είναι το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών και  $N_n$  το πλήθος των ιδιοκαταστάσεων με την ίδια ιδιοτιμή. Προφανώς,  $\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{N_n} 1 = D$ .

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ιδιαίτερη σημασία έχουν οι ονομαζόμενοι **προβολικοί τελεστές**:

$$\hat{E}_n = |n\rangle \langle n| \quad \text{ή} \quad \hat{E}_n = \sum_{j=1}^{N_n} |n^{(j)}\rangle \langle n^{(j)}| \quad (\text{I.24})$$

Οι προβολικοί τελεστές έχουν τις παρακάτω ιδιότητες οι οποίες μπορούν να αποδειχθούν πολύ εύκολα:

$$\hat{E}_n = \hat{E}_n^\dagger, \quad \sum_n \hat{E}_n = \hat{I}, \quad \hat{E}_n \hat{E}_m = \delta_{n,m} \hat{E}_n, \quad \hat{E}_n \geq 0 \quad (\text{I.25})$$

Η τελευταία από τις ιδιότητες αυτές δηλώνει ότι ο τελεστής είναι μη αρνητικός. Γενικά, ένας τελεστής λέγεται μη αρνητικός εάν

$$\hat{A} \geq 0 \leftrightarrow \langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall | \varphi \rangle \in H \quad (\text{I.26})$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ένας μη αρνητικός τελεστής είναι αυτοσυζυγής και οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικοί αριθμοί (βλέπε τη σχετική άσκηση).

Πέραν των αυτοσυζυγών τελεστών ιδιαίτερη σημασία έχουν, στο πλαίσιο της Κβαντικής Μηχανικής, οι **μοναδιακοί (unitary)** τελεστές:

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{I} \quad (\text{I.27})$$

Η σημασία τους έγκειται στο γεγονός ότι μετασχηματίζουν τις κβαντικές καταστάσεις με τρόπο που διατηρεί το μέτρο τους:

$$| \psi' \rangle = \hat{U} | \psi \rangle \rightarrow \langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle \quad (\text{AI28})$$

Μέσω μοναδιακών μετασχηματισμών εκφράζονται, για παράδειγμα, οι χωρικές και χρονικές μεταθέσεις, οι στροφές και οι αλλαγές βάσεων. Σε επίπεδο εφαρμογών, οι κβαντικές πύλες υλοποιούνται μέσω μοναδιακών μετασχηματισμών.

Ένας μοναδιακός τελεστής είναι κανονικός αφού  $[\hat{U}^\dagger, \hat{U}] = 0$  και επομένως οι ιδιοκαταστάσεις του απαρτίζουν ένα πλήρες σύνολο:

$$\hat{U}|n\rangle = z_n|n\rangle, \quad \sum_{n=1}^D |n\rangle\langle n| = \hat{I} \quad (I.29)$$

Οι ιδιοτιμές στην τελευταία εξίσωση είναι φάσεις:

$$\langle n|\hat{U}^\dagger\hat{U}|n\rangle = |z_n|^2 \langle n|n\rangle \rightarrow |z_n| = 1 \rightarrow z_n = e^{i\theta_n} \quad (I.30)$$

Οι μέσες τιμές (: μετρήσιμες ποσότητες) φυσικών μεγεθών σε καταστάσεις οι οποίες συνδέονται με μοναδιακούς μετασχηματισμούς γράφονται:

$$\langle \psi'|\hat{A}|\psi'\rangle = \langle \psi|\hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U}|\psi\rangle \quad (I.31)$$

Εάν  $\hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U} = \hat{A} \rightarrow [\hat{A}, \hat{U}] = 0$ :

$$\langle \psi'|\hat{A}|\psi'\rangle = \langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle \quad (I.32)$$

Με την έννοια αυτή, το μέγεθος  $\hat{A}$  θεωρείται **αναλλοίωτο** στους μετασχηματισμούς που εκφράζονται μέσω του μοναδιακού  $\hat{U}$ . Εάν το μέγεθος για το οποίο συζητάμε είναι η Χαμιλτονιανή, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός εκφράζει μια **συμμετρία** του κβαντικού συστήματος.

## Χώρος Liouville

Έχοντας στη διάθεσή μας τον χώρο Hilbert στον οποίον ορίζονται οι καταστάσεις ενός κβαντικού συστήματος μπορούμε να κατασκευάσουμε τον χώρο των τελεστών οι οποίοι δρουν επί των καταστάσεων αυτών. Σύμφωνα με τον ορισμό ενός διανυσματικού χώρου ο χώρος των τελεστών είναι διανυσματικός χώρος τα στοιχεία του οποίου είναι τελεστές. Ο χώρος αυτός λέγεται **χώρος Liouville**. Μπορούμε να αποκτήσουμε μια αίσθηση για το περιεχόμενό του αν αναφερθούμε στη σχέση (I.20). Το σύνολο των τελεστών

$\{|n\rangle\langle m|; n, m = 1, \dots, D\}$  μπορεί να αριθμηθεί και ως  $\{\hat{Q}_j; j = 1, \dots, D^2\}$  όπου

$\hat{Q}_1 = |1\rangle\langle 1|$ ,  $\hat{Q}_2 = |1\rangle\langle 2|, \dots$ ,  $\hat{Q}_{D^2} = |D\rangle\langle D|$ . Με την ίδια λογική μπορούν να αριθμηθούν

και οι συντελεστές  $A_{nm} : \{A_{nm}; n, m = 1, \dots, D\} = \{\lambda_j; j = 1, \dots, D^2\}$ . Με την μεταγλώττιση

αυτή η (I.20) γράφεται με τη μορφή:

$$\hat{A} = \sum_{j=1}^{D^2} \lambda_j \hat{Q}_j \quad (I.33)$$

Για να υπογραμμισθεί η αναλογία με τον διανυσματικό χώρο των καταστάσεων εισάγουμε τον συμβολισμό  $|A\rangle \equiv \hat{A}$ ,  $\langle A| \equiv \hat{A}^\dagger$  και το **εσωτερικό γινόμενο** στον χώρο Liouville:

$$\langle A|B\rangle \equiv \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B}) \quad (\text{I.34})$$

Αφού διαπιστώσουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{D^2} |\mathcal{Q}_j\rangle \langle \mathcal{Q}_j| = \mathbf{I}_{D \times D}, \quad \langle \mathcal{Q}_i | \mathcal{Q}_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\text{I.35})$$

μπορούμε να γράψουμε την (I.33):

$$|A\rangle = \sum_{j=1}^{D^2} \lambda_j |\mathcal{Q}_j\rangle, \quad \langle \mathcal{Q}_j | A \rangle = \lambda_j \quad (\text{I.36})$$

Οι σχέσεις (I.35) ορίζουν τα στοιχεία  $|\mathcal{Q}_j\rangle$  του χώρου Liouville ως **ορθοκανονική βάση τελεστών** στον χώρο αυτό.

Στον χώρο Liouville ορίζουμε και τους υπερ-τελεστές

$$\mathbf{S}|A\rangle = |A'\rangle \quad (\text{I.37})$$

οι οποίοι μετατρέπουν ένα στοιχείο του χώρου Liouville σε κάποιο άλλο.

Για να αποκτήσουμε μια αίσθηση του συμβολισμού και των ορισμών στο χώρο αυτό μπορούμε να πάρουμε το παράδειγμα ενός τελεστή ο οποίος δρα σε χώρο Hilbert 2 διαστάσεων και αναπαρίσταται (σε κάποια βάση) ως

$$\hat{A} \doteq \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad (\text{I.38})$$

Προφανώς χρειάζονται 4 αριθμοί για τον προσδιορισμό αυτού του πίνακα. Μπορούμε τώρα να σκεφθούμε ένα διανυσματικό χώρο 4 διαστάσεων τα στοιχεία του οποίου να είναι τα

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (\text{I.39})$$



Ορίζοντας το εσωτερικό γινόμενο με τον συνηθή τρόπο μπορούμε να διαπιστώσουμε την αντιστοιχία με την (I.34):

$$(B | A) = (b_1^* \ b_2^* \ b_3^* \ b_4^*) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^4 b_j^* a_j = \text{Tr} \begin{pmatrix} b_1^* & b_3^* \\ b_2^* & b_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad (\text{I.40})$$

Με τις αναλογίες αυτές μπορούμε να περάσουμε από τις ιδιότητες του χώρου Hilbert στον χώρο Liouville.

Η σημασία του χώρου Liouville θα φανεί αργότερα. Ήδη, όμως, αν σκεφθούμε τους τελεστές ως φυσικές διαδικασίες οι οποίες μεταβάλλουν κβαντικές καταστάσεις, μπορούμε να κατανοήσουμε τη σημασία να αναπαραχθούν όλες αυτές οι διαδικασίες μέσω μιας επαλληλίας στοιχειωδών και πεπερασμένου πλήθους διαδικασιών οι οποίες αντιστοιχούν σε μια πλήρη βάση τελεστών.

### (3) Ορθογώνιες Μετρήσεις.

Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, είναι ένα πείραμα τύχης. Η τυχαιότητα αυτή είναι **δομικό στοιχείο** της κβαντικής μηχανικής (της φύσης, δηλαδή) και όχι διαχείριση της άγνοιας όλων των παραμέτρων που εμπλέκονται σε μια μέτρηση. Στο πλαίσιο της κβαντικής μηχανικής, η μέτρηση δεν αποκαλύπτει μια προϋπάρχουσα ιδιότητα του συστήματος. Ακριβώς το αντίθετο: **Μια ιδιότητα εμφανίζεται στο βαθμό που μετράται.**

Το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι κάποια από τις ιδιοτιμές  $\alpha_n$  του τελεστή  $\hat{A}$  ο οποίος αντιπροσωπεύει το μέγεθος που μετρήθηκε. Αυτό που μπορούμε να υπολογίσουμε είναι η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενός ή του άλλου ενδεχομένου:

$$\text{Prob}(\alpha_n) = \langle \psi | \hat{E}_n | \psi \rangle = \left\| \hat{E}_n | \psi \rangle \right\|^2 \quad (\text{I.41})$$

Αμέσως μετά την μέτρηση, και αν δεν υπάρχει εκφυλισμός, η κατάσταση του συστήματος είναι η αντίστοιχη ιδιοκατάσταση  $|n\rangle$  του τελεστή. Σε περίπτωση εκφυλισμού, αμέσως μετά την μέτρηση, η κατάσταση του συστήματος είναι κάποιος γραμμικός συνδυασμός των καταστάσεων που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή. Σε κάθε περίπτωση η διαδικασία περιγράφεται με την εφαρμογή του προβολικού τελεστή:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{μέτρηση}} |\psi'\rangle = \frac{\hat{E}_n |\psi\rangle}{\left\| \hat{E}_n |\psi\rangle \right\|} \quad (\text{I.42})$$

Ορισμένες σημαντικές παρατηρήσεις πρέπει να γίνουν στο σημείο αυτό. Η πρώτη είναι ότι η μέτρηση, έτσι όπως την ορίσαμε, οδηγεί σε **αμοιβαίως αποκλειόμενες καταστάσεις**. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι μετρήσεις αυτές λέγονται **ορθογώνιες ή μετρήσεις von Neumann**. Όπως θα διαπιστώσουμε αργότερα υπάρχουν και **μη ορθογώνιες μετρήσεις**.

Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι οι ορθογώνιες μετρήσεις είναι **επαναλήψιμες**: Αν αμέσως μετά την πρώτη μέτρηση επαναλάβουμε την ίδια μέτρηση θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{μέτρηση}} |\psi'\rangle \sim \hat{E}_n |\psi\rangle \xrightarrow{\text{μέτρηση}} |\psi''\rangle \sim \hat{E}_n |\psi'\rangle \sim \hat{E}_n^2 |\psi\rangle = |\psi'\rangle \quad (\text{I.43})$$

Η σημαντικότερη, όμως, παρατήρηση είναι ότι **η μέτρηση είναι μη αντιστρεπτή διαδικασία**. Πράγματι, όποια και αν ήταν η αρχική κατάσταση  $|\psi\rangle$  θα ήταν δυνατόν, σε μια μέτρηση του μεγέθους  $\hat{A}$ , να είχε προκύψει η τιμή  $\alpha_n$ . Αμέσως μετά τη μέτρηση, η αρχική κατάσταση δεν υπάρχει πλέον αφού το σύστημα βρίσκεται σε ιδιοκατάσταση του μεγέθους που μετρήθηκε  $|n\rangle$ :  $\hat{A}|n\rangle = \alpha_n|n\rangle$  (ή στον υπόχωρο των αντίστοιχων ιδιοκαταστάσεων σε περίπτωση εκφυλισμού). Αφού το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης, την οποία δεν έχουμε πια στη διάθεσή μας, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την αφετηρία του. **Με την έννοια αυτή η μέτρηση είναι μη αντιστρεπτή διαδικασία**.

Μετά τις διαπιστώσεις αυτές γίνεται προφανές ότι οι πληροφορίες που αφορούν σε κάποιο κβαντικό σύστημα και οι οποίες μπορούν να αντληθούν μέσω μετρήσεων, δεν βρίσκονται σε μια και μόνη κατάσταση  $|\psi\rangle$  αλλά σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος (μαθηματικά άπειρο) **πανομοιότυπων** καταστάσεων, καταστάσεων δηλαδή, οι οποίες έχουν προετοιμασθεί με ακριβώς τον ίδιο τρόπο.

Το σύνολο αυτό συγκροτεί την λεγόμενη **συλλογή (ensemble) κβαντικών καταστάσεων**. Επειδή όλα τα στοιχεία αυτής της συλλογής θεωρούνται ακριβώς τα ίδια, η συλλογή λέγεται **καθαρή (pure)**. Έτσι, η κατάσταση  $|\psi\rangle$  θα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ο αντιπρόσωπος μιας καθαρής συλλογής κβαντικών καταστάσεων. Μπορεί να προσδιορισθεί μέσω μετρήσεων επί των στοιχείων συλλογής. Για παράδειγμα, η κατάσταση (I.1) μπορεί να προσδιορισθεί πλήρως με τρία σετ μετρήσεων που αφορούν σε μεγέθη τα οποία δεν μπορούν να είναι ταυτοχρόνως γνωστά. Μετά τον πλήρη προσδιορισμό της, η κατάσταση  $|\psi\rangle$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιονδήποτε άλλον υπολογισμό αφορά το κβαντικό σύστημα που μας ενδιαφέρει.

Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο πρέπει να αναφέρουμε ένα σημαντικό θεώρημα το οποίο θα αποδείξουμε αργότερα (βλέπε Άσκηση I.14): Το **θεώρημα της μη-κλωνοποίησης (no cloning theorem)** [6]. Το θεώρημα αυτό λέει ότι δεν είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε ακριβές αντίγραφο μιας άγνωστης κβαντικής κατάστασης.

Εάν δεν υπήρχε αυτό το θεώρημα θα ήταν δυνατόν, ενόψει μιας επικείμενης μέτρησης, να δημιουργήσουμε έναν τεράστιο αριθμό αντιγράφων της άγνωστης κατάστασης και να τα χρησιμοποιήσουμε για μετρήσεις χωρίς να καταστρέψουμε την αρχική κατάσταση. Αυτό θα έθετε υπό αμφισβήτηση την ίδια την έννοια της συλλογής. Έτσι, οι πανομοιότυπες καταστάσεις που συγκροτούν μια καθαρή συλλογή πρέπει να θεωρείται ότι έχουν προετοιμασθεί με την ίδια ακριβώς πειραματική διαδικασία και όχι ότι είναι αντίγραφα η μία της άλλης.

#### (4) Χρονική Εξέλιξη

Οι κβαντικές καταστάσεις εξελίσσονται με την πάροδο του χρόνου ( $t \geq t_0$ ) σύμφωνα με την εξίσωση:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad \hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I} \quad (I.44)$$

Στην τελευταία σχέση ο τελεστής που επεμβαίνει ονομάζεται **τελεστής χρονικής εξέλιξης** και είναι **μοναδιακός (unitary)**:

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{I} \quad (I.45)$$

Ορισμένες παρατηρήσεις πρέπει να γίνουν εδώ.

Η πρώτη είναι ότι η αναγκαιότητα (I.45) οφείλεται στο ότι η χρονική εξέλιξη θα πρέπει να διατηρεί τη συνολική πιθανότητα (εφόσον το σύστημα είναι κλειστό):

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle \quad (I.46)$$

Η δεύτερη αφορά στην ίδια την έκφραση (I.44). Η αφετηρία της είναι καθαρά κβαντική και στηρίζεται στο γεγονός ότι όλες οι πληροφορίες που μπορούμε να έχουμε για ένα σύστημα βρίσκονται, σε μια συγκεκριμένη στιγμή  $t_0$ , στην κατάσταση  $|\psi(t_0)\rangle$ . Για να βρούμε τη χρονικά εξελιγμένη κατάσταση  $|\psi(t)\rangle$  θα πρέπει, βέβαια, να λάβουμε υπόψη όλες τις πιθανές αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα στοιχεία του συστήματος, αλλά όλες οι πληροφορίες για το ποιο είναι το εξελισσόμενο σύστημα βρίσκονται στην  $|\psi(t_0)\rangle$  και μόνο σ' αυτή. Το ότι η εξίσωση (I.44) είναι χαρακτηριστική της κβαντικής μηχανικής γίνεται προφανές και από το γεγονός ότι δεν ισχύει στο πλαίσιο της κλασικής μηχανικής.

Η τελευταία παρατήρηση είναι ότι η χρονική εξέλιξη πρέπει να είναι συνεχής διαδικασία η οποία να μπορεί να προχωρήσει με διαδοχικά απειροστά βήματα. Για να ισχύει κάτι τέτοιο θα πρέπει:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1) \hat{U}(t_1, t_0), \quad t \leq t_1 \leq t_0 \quad (I.47)$$

Με αφετηρία τη σχέση (I.44) μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διαφορική εξίσωση για τη χρονική εξέλιξη:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U} \right) |\psi(t_0)\rangle \stackrel{(I.44)}{=} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U} \right) \hat{U}^\dagger |\psi(t)\rangle \equiv \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (I.48)$$

Στο τελευταίο βήμα ορίσαμε τον τελεστή

$$\hat{H}(t) = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U} \right) \hat{U}^\dagger \quad (I.49)$$

ο οποίος είναι αυτοσυζυγής

$$\hat{H}^\dagger(t) = \left\{ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U} \right) \hat{U}^\dagger \right\}^\dagger = -i\hbar \hat{U} \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^\dagger \stackrel{(A.45)}{=} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U} \right) \hat{U}^\dagger = \hat{H}(t) \quad (I.50)$$

και αντιστοιχεί στη γνωστή μας **Χαμιλτονιανή**.

Η εξίσωση (I.48), η οποία είναι πρώτης τάξης ως προς τον χρόνο, είναι γνωστή και ως **εξίσωση Schrödinger**. Για την λύση της χρειάζεται, σε ότι αφορά στον χρόνο, μόνο μια αρχική συνθήκη: Η κατάσταση την αρχική στιγμή  $t_0$ .

Ο ορισμός της Χαμιλτονιανής μας οδηγεί στην εξίσωση:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) \equiv \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (I.51)$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης αυτής μπορούμε να εκφράσουμε τον τελεστή χρονικής εξέλιξης μέσω της Χαμιλτονιανής. Αυτό μπορεί να γίνει αν κάνουμε την διαμέριση

$$\frac{t - t_0}{N + 1} = \delta t ; N \rightarrow \infty , \delta t \rightarrow 0 \quad (I.52)$$

και ολοκληρώσουμε ως προς τον χρόνο και τα δύο μέλη της (I.51):

$$i\hbar \int_{t_0}^{t_0 + \delta t} dt \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t} dt \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (I.53)$$

Λόγω της συνέχειας της χρονικής εξέλιξης βρίσκουμε :

$$\hat{U}(t_0 + \delta t, t_0) \underset{\delta t \rightarrow 0}{\approx} \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_0) \delta t \quad (I.54)$$

Γενικεύοντας την ιδιότητα (I.47) και χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση, γράφουμε:

$$\hat{U}(t, t_0) \approx \prod_{n=N}^0 \hat{U}(t_0 + (n+1)\delta t, t_0 + n\delta t) = \prod_{n=N}^0 \left[ \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_0 + n\delta t) \delta t \right] \quad (I.55)$$

Η τελευταία έκφραση ορίζει τον τελεστή χρονικής εξέλιξης ως:

$$\hat{U}(t, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta t \rightarrow 0}} \prod_{n=N}^0 \left[ \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_0 + n\delta t) \delta t \right] \quad (\text{I.56})$$

Ο τελικός υπολογισμός είναι απλός μόνο στην περίπτωση που η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από τον χρόνο:

$$\hat{U}(t, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \frac{t-t_0}{N+1} \right)^{N+1} = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} \quad (\text{I.57})$$

Όταν η Χαμιλτονιανή εξαρτάται από τον χρόνο η κατάσταση είναι πιο πολύπλοκη αφού, εν γένει,  $[\hat{H}(t), \hat{H}(t')] \neq 0$ . Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να δούμε ότι:

$$\begin{aligned} \prod_{n=N}^0 \left[ \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_0 + n\delta t) \delta t \right] &= \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^N \delta t \hat{H}(t_0 + n\delta t) + \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \sum_{n_2=0}^N \sum_{n_1=0}^{n_2-1} (\delta t)^2 \hat{H}(t_0 + n_2\delta t) \hat{H}(t_0 + n_1\delta t) + \dots + \\ &+ \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^M \sum_{n_M=0}^N \sum_{n_{M-1}=0}^{n_M-1} \dots \sum_{n_1=0}^{n_2-1} (\delta t)^M \hat{H}(t_0 + n_M\delta t) \hat{H}(t_0 + n_{M-1}\delta t) \dots \hat{H}(t_0 + n_1\delta t) + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.58})$$

Το σημαντικό εδώ είναι η χρονική διάταξη των τελεστών: Η χρονική στιγμή στην οποία ορίζεται ο πρώτος από αριστερά τελεστής είναι μετά τη χρονική στιγμή στην οποία ορίζεται ο επόμενος προς τα δεξιά τελεστής. Εάν πάρουμε το συνεχές όριο  $N \rightarrow \infty, \delta t \rightarrow 0$  θα βρούμε:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1) + \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \theta(t_2 - t_1) \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) + \dots \\ &+ \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^M \int_{t_0}^t dt_M \int_{t_0}^{t_M} dt_{M-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \theta(t_M - t_{M-1}) \theta(t_{M-1} - t_{M-2}) \dots \theta(t_2 - t_1) \hat{H}(t_M) \hat{H}(t_{M-1}) \dots \hat{H}(t_1) + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.59})$$

Εάν ορίσουμε τον **τελεστή χρονικής διάταξης**

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{H}(t_1)) &\equiv \hat{H}(t_1) , \\ \hat{T}(\hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1)) &\equiv \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) \theta(t_2 - t_1) + \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \theta(t_1 - t_2) \\ \hat{T}(\hat{H}(t_3) \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1)) &= \hat{H}(t_3) \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) \theta(t_3 - t_2) \theta(t_2 - t_1) + \text{όλες οι αναδιατάξεις} \\ &\dots \end{aligned}$$

(I.60)

μπορούμε να γράψουμε την (I.59) με τη μορφή:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) = & \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \hat{T}(\hat{H}(t_1)) + \frac{1}{2!} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{T}(\hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1)) + \dots \\ & + \frac{1}{M!} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^M \int_{t_0}^t dt_M \int_{t_0}^{t_M} dt_{M-1} \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_1 \hat{T}(\hat{H}(t_M) \hat{H}(t_{M-1}) \dots \hat{H}(t_1)) + \dots \end{aligned} \quad (I.61)$$

Έτσι οδηγούμαστε να ορίσουμε:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt \hat{H}(t)} \quad (I.62)$$

Θα πρέπει να υπογραμμισθεί ότι το νόημα της (I.62) βρίσκεται στη διατεταγμένη σειρά ολοκληρώσεων (I.61). Αυτό σημαίνει ότι, εν γένει, δεν είναι σωστό να γίνει πρώτα η ολοκλήρωση στο εκθετικό της (I.62) και μετά η ανάπτυξή του. Με την έννοια αυτή η έκφραση (I.62) είναι ορισμός. Ο συζυγής του τελεστή (I.62) ορίζεται μέσω της

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{T}^\dagger e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt \hat{H}(t)} = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t_0} dt \hat{H}(t)} = \hat{U}(t_0, t) \quad (I.63)$$

Η τελευταία σχέση μας βεβαιώνει ότι **η χρονική εξέλιξη είναι αντιστρεπτή διαδικασία:**

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \leftrightarrow |\psi(t_0)\rangle = \hat{U}^\dagger(t, t_0) |\psi(t)\rangle = \hat{U}(t_0, t) |\psi(t)\rangle \quad (I.64)$$

Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι κβαντικές καταστάσεις αλλάζουν με δύο τρόπους. Ο πρώτος υλοποιείται μέσω κάποιου μοναδιακού μετασχηματισμού ο οποίος διατηρεί την πιθανότητα και είναι μια αντιστρεπτή διαδικασία. Ο δεύτερος υλοποιείται μέσω κάποιας μέτρησης. Η διαδικασία αυτή είναι μη αντιστρεπτή.

## (5) Σύνθετα Συστήματα

Σύνθετο είναι ένα σύστημα το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι απαρτίζεται από περισσότερα από ένα μέρη ότι έχει, δηλαδή, εσωτερική δομή. Τα μέρη αυτά μπορούν να αναφέρονται σε ξεχωριστά σωματίδια ή και σε διαφορετικούς βαθμούς ελευθερίας του ίδιου σωματιδίου. Για παράδειγμα, ένα σωματίο με σπιν 0 μπορεί να αποτελείται από δύο σωματίδια A και B με σπιν 1/2 τα οποία έχουν συνδυαστεί στην singlet κατάσταση  $(|1/2_A, -1/2_B\rangle - |-1/2_A, 1/2_B\rangle) / \sqrt{2}$ . Ή, στο ίδιο ηλεκτρόνιο το οποίο είναι δεσμευμένο σε άτομο υδρογόνου, μπορούν να εμπλέκονται οι βαθμοί ελευθερίας της τροχιακής στροφορμής και του σπιν:  $(|m_l = 1, m_s = -1/2\rangle + |m_l = 0, m_s = 1/2\rangle) / \sqrt{2}$ .

Τα σύνθετα συστήματα μπορούν να είναι διμερή, τριμερή ή, εν γένει, πολυμερή. Όταν μιλάμε για υποσυστήματα ενός σύνθετου συστήματος δεν εννοούμε, κατ' ανάγκη, ότι είναι διακρισίμα αλλά ότι μπορούμε να τα εντοπίσουμε πειραματικά ως ξεχωριστές

οντότητες και να επιδράσουμε σε καθένα από αυτά ξεχωριστά. Μη διακρισιμότητα σημαίνει, για παράδειγμα, ότι εάν ανταλλάξουμε μεταξύ τους τα δύο ηλεκτρόνια στην singlet κατάσταση οι φυσικές ιδιότητες του σύνθετου συστήματος δεν θα αλλάξουν. Στις σημειώσεις που ακολουθούν θα ασχοληθούμε, κατά κύριο λόγο, με διμερή συστήματα.

Ο χώρος Hilbert ενός σύνθετου συστήματος είναι το **τανυστικό γινόμενο** των επιμέρους συστημάτων:

$$H_{AB} = H_A \otimes H_B \quad , \quad \dim H_{AB} = \dim H_A \times \dim H_B = D_A \times D_B \quad (I.65)$$

Για να καταλάβουμε τον όρο «τανυστικό γινόμενο» ας θεωρήσουμε τις βάσεις  $\{|i_A\rangle; i=1, 2, \dots, D_A\}$  του χώρου A και  $\{|\mu_B\rangle; \mu=1, 2, \dots, D_B\}$  του χώρου B. Σε κάθε ζευγάρι  $(|i_A\rangle, |\mu_B\rangle)$  θα αντιστοιχίσουμε ένα στοιχείο του σύνθετου χώρου  $H_{AB}$  το οποίο θα συμβολίζουμε  $|i_A, \mu_B\rangle$  ή, εναλλακτικά  $|i_A\rangle \otimes |\mu_B\rangle$  ή και απλώς  $|i_A\rangle |\mu_B\rangle$ . Το σύνολο των  $D_A \times D_B$  ανυσμμάτων  $|i_A, \mu_B\rangle$  αποτελεί βάση του σύνθετου χώρου αφού ικανοποιούν τη σχέση πληρότητας:

$$\sum_{i_A=1}^{D_A} \sum_{\mu_B=1}^{D_B} |i_A, \mu_B\rangle \langle i_A, \mu_B| = \left( \sum_{i_A=1}^{D_A} |i_A\rangle \langle i_A| \right) \left( \sum_{\mu_B=1}^{D_B} |\mu_B\rangle \langle \mu_B| \right) = \hat{I}_{D_A \times D_A} \hat{I}_{D_B \times D_B} \quad (I.66)$$

Έτσι, τα στοιχεία του σύνθετου χώρου (I.65) θα γράφονται ως:

$$H_{AB} \ni |\chi_{AB}\rangle = \sum_{i_A=1}^{D_A} \sum_{\mu_B=1}^{D_B} a_{i_A \mu_B} |i_A, \mu_B\rangle \quad , \quad a_{i_A \mu_B} = \langle i_A, \mu_B | \chi_{AB} \rangle \quad (I.67)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε μια πολύ σημαντική παρατήρηση: Είναι προφανές ότι εάν  $|\varphi_A\rangle \in H_A$  και  $|\varphi'_B\rangle \in H_B$  το άνυσμα  $|\chi_{AB}\rangle = |\varphi_A\rangle |\varphi'_B\rangle$  ανήκει στον χώρο  $H_{AB}$ .

Το αντίστροφο, όμως, δεν ισχύει: Υπάρχουν στοιχεία του χώρου  $H_{AB}$  τα οποία δεν μπορούν να παραγοντοποιηθούν σε γινόμενο ανυσμμάτων των επιμέρους χώρων:

$$\exists |\chi_{AB}\rangle \in H_{AB} : |\chi_{AB}\rangle \neq |\varphi_A\rangle |\varphi'_B\rangle \quad , \quad |\varphi_A\rangle \in H_A, |\varphi'_B\rangle \in H_B \quad (I.68)$$

Οι καταστάσεις αυτές του σύνθετου χώρου οι οποίες δεν μπορούν να παραγοντοποιηθούν ονομάζονται **εναγκαλισμένες (entangled)**. Στο πλαίσιο της κβαντικής μηχανικής, όπου τα στοιχεία ενός χώρου Hilbert αντιπροσωπεύουν πλάτη πιθανότητας, η έννοια του εναγκαλισμού μπορεί να κατανοηθεί ως εξής: Εάν δύο καταστάσεις δεν είναι εναγκαλισμένες οι μετρήσεις σε μια από αυτές δεν επηρεάζουν την άλλη. Με άλλα λόγια, η σύνθετη κατάσταση αντιπροσωπεύει ανεξάρτητα μεταξύ τους τυχαία γεγονότα. Αντίθετα, εάν υπάρχει **εναγκαλισμός (entanglement)** η μέτρηση σε μια από τις εναγκαλισμένες καταστάσεις επηρεάζει την άλλη και, επομένως, η σύνθετη κατάσταση αντιπροσωπεύει εξαρτώμενα τυχαία γεγονότα. Ως ένα

χαρακτηριστικό παράδειγμα μπορούμε να αναφερθούμε στη διμερή κατάσταση (οι προβολές είναι στον άξονα  $z$ ):

$$|\chi_{AB}\rangle = a|1/2_A, -1/2_B\rangle + b|-1/2_A, 1/2_B\rangle \quad (I.69)$$

Αν επιχειρήσουμε να την γράψουμε ως γινόμενο των  $|\varphi_A\rangle = \alpha|1/2_A\rangle + \beta|-1/2_A\rangle$  και  $|\varphi'_B\rangle = \gamma|1/2_B\rangle + \delta|-1/2_B\rangle$  θα διαπιστώσουμε ότι θα πρέπει  $\alpha\gamma = 0$ ,  $\beta\delta = 0$  και ταυτόχρονα  $\alpha\delta = a \neq 0$ ,  $\beta\gamma = b \neq 0$ . Πολύ εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι αυτό το σύστημα εξισώσεων δεν έχει (μη μηδενική) λύση.

Τα στοιχεία του σύνθετου χώρου μπορούν να αναπαρασταθούν με πίνακες. Σο ό,τι αφορά στα ανύσματα, ο κανόνας που ακολουθείται είναι:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix}_{AB} \quad (I.70)$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} |1/2_A, 1/2_B\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{AB}, & |1/2_A, -1/2_B\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{AB} \\ |-1/2_A, 1/2_B\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{AB}, & |-1/2_A, -1/2_B\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{AB} \end{aligned} \quad (I.71)$$

Σε ότι αφορά στη δράση τελεστών στα στοιχεία του σύνθετου χώρου μπορούμε να σημειώσουμε τα εξής.

Για κάθε γραμμικό τελεστή  $\hat{C}^A$  ο οποίος δρα στον χώρο  $H_A$  και κάθε γραμμικό τελεστή  $\hat{D}^B$  που δρα στον χώρο  $H_B$  ορίζουμε τον τελεστή  $\hat{C}^A \otimes \hat{D}^B$  ο οποίος δρα στον σύνθετο χώρο και η δράση του ορίζεται ως

$$\hat{C}^A \otimes \hat{D}^B |\chi_{AB}\rangle = \sum_{i_A=1}^{D_A} \sum_{\mu_B=1}^{D_B} a_{i_A \mu_B} (\hat{C}^A |i_A\rangle) (\hat{D}^B |\mu_B\rangle) \quad (I.72)$$

Όπως θα περιμέναμε, υπάρχουν τελεστές οι οποίοι δεν μπορούν να παραγοντοποιηθούν:

$$\hat{F}^{AB} \neq \hat{C}^A \otimes \hat{D}^B \quad (I.73)$$



Η δράση ενός τέτοιου τελεστή στον σύνθετο χώρο ορίζεται από τη σχέση:

$$\hat{F}^{AB} |\chi_{AB}\rangle = \sum_{i_A=1}^{D_A} \sum_{\mu_B=1}^{D_B} a_{i_A \mu_B} \hat{F}^{AB} (|i_A\rangle |\mu_B\rangle) \quad (I.74)$$

Για την αναπαράσταση των τελεστών στον σύνθετο χώρο χρησιμοποιούμε τον κανόνα:

Αν

$$\hat{C}^A \doteq \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1D_A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1D_A} & \cdots & a_{D_A D_A} \end{pmatrix}_A, \quad \hat{D}^B \doteq \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1D_B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{D_B 1} & \cdots & a_{D_B D_B} \end{pmatrix}_B \equiv D \quad (I.75)$$

Το τανυστικό τους γινόμενο ορίζεται από τη σχέση:

$$\hat{C}^A \otimes \hat{D}^B = \begin{pmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1n}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & \cdots & c_{nm}D \end{pmatrix}_{AB} \quad (I.76)$$

Κλείνοντας το εδάφιο είναι χρήσιμο, για μελλοντική χρήση, να σχολιάσουμε τη δράση ενός μοναδιακού τελεστή  $\hat{U}^{AB} \neq \hat{U}_1^A \otimes \hat{U}_2^B$  σε μια κατάσταση του σύνθετου χώρου η οποία έχει τη μορφή  $|\chi_{AB}\rangle = |\varphi_A\rangle |\varphi'_B\rangle$ :

$$\hat{U}^{AB} |\chi_{AB}\rangle = \hat{U}^{AB} (|\varphi_A\rangle |\varphi'_B\rangle) \equiv |\psi_{AB}\rangle \quad (I.77)$$

Ο λόγος για τον οποίο διαλέγουμε τον τελεστή να είναι μοναδιακός συνδέεται με το γεγονός ότι θεωρούμε ότι αντιπροσωπεύει μετασχηματισμό της κατάστασης ο οποίος διατηρεί τη συνολική πιθανότητα. Εάν χρησιμοποιήσουμε μια βάση  $\{|\mu_B\rangle; \mu=1, 2, \dots, D_B\}$  του χώρου  $H_B$ , μπορούμε να γράψουμε την (I.77) ως εξής:

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{\mu} |\mu_B\rangle \langle \mu_B | \hat{U}^{AB} | \varphi'_B \rangle | \varphi_A \rangle \quad (I.78)$$

Η ποσότητα  $\langle \mu_B | \hat{U}^{AB} | \varphi'_B \rangle$  είναι ένας τελεστής ο οποίος δρα στις καταστάσεις του χώρου  $H_A$  και ονομάζεται **τελεστής Kraus** [7]:

$$\langle \mu_B | \hat{U}^{AB} | \varphi'_B \rangle \equiv \hat{M}_{\mu}^A \quad (I.79)$$

Έτσι θα γράψουμε:

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{\mu} |\mu_B\rangle \hat{M}_{\mu}^A | \varphi_A \rangle \rightarrow \langle \mu_B | \psi_{AB} \rangle = \hat{M}_{\mu}^A | \varphi_A \rangle \quad (I.80)$$

Όπως είναι προφανές, ότι η δράση του τελεστή Kraus στην κατάσταση του χώρου  $H_A$  είναι ισοδύναμη με την προβολή της σύνθετης κατάστασης στη διεύθυνση  $|\mu_B\rangle$ .

Επειδή ο μετασχηματισμός που εξετάζουμε διατηρεί την πιθανότητα μπορούμε να διαπιστώσουμε αμέσως ότι:

$$\langle \chi_{AB} | \chi_{AB} \rangle = \langle \psi_{AB} | \psi_{AB} \rangle = \sum_{\mu} \langle \psi_{AB} | \mu_B \rangle \langle \mu_B | \psi_{AB} \rangle = \langle \varphi_A | \sum_{\mu} \hat{M}_{\mu}^{A\dagger} \hat{M}_{\mu}^A | \varphi_A \rangle = \langle \varphi_A | \varphi_A \rangle = 1 \quad (\text{I.81})$$

Επομένως οι τελεστές Kraus ικανοποιούν τη σχέση:

$$\sum_{\mu} \hat{M}_{\mu}^{A\dagger} \hat{M}_{\mu}^A = \hat{I}_{D_A \times D_A} \quad (\text{I.82})$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ Ι

**I.1** Δείξτε ότι κάθε μη αρνητικός τελεστής είναι ερμιτιανός και ότι οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικοί αριθμοί

$$\langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall | \varphi \rangle \Rightarrow \langle \varphi | \hat{A} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \hat{A} | \varphi \rangle$$

$$\hat{A} | n \rangle = \alpha_n | n \rangle \rightarrow \alpha_n \geq 0$$

**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα:

$$\begin{aligned} & (\langle \psi | + \langle \varphi |) \hat{A} (| \psi \rangle + | \varphi \rangle) - (\langle \psi | - \langle \varphi |) \hat{A} (| \psi \rangle - | \varphi \rangle) + \\ & + i(\langle \psi | + i \langle \varphi |) \hat{A} (| \psi \rangle - i | \varphi \rangle) - i(\langle \psi | - i \langle \varphi |) \hat{A} (| \psi \rangle + i | \varphi \rangle) = 4 \langle \psi | \hat{A} | \varphi \rangle \end{aligned}$$

**I.2** Έστω οι καταστάσεις  $| \varphi \rangle, | \psi \rangle$  στοιχεία ενός χώρου Hilbert  $H$ . Οι καταστάσεις αυτές θεωρούνται κανονικοποιημένες:  $\langle \varphi | \varphi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$

Να δείξετε ότι πάντα μπορείτε να γράψετε:

$$| \varphi \rangle = a | \psi \rangle + b | \psi^\perp \rangle$$

όπου

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{και} \quad \langle \psi | \psi^\perp \rangle = 0$$

**Απάντηση.**

Μπορούμε να ορίσουμε την κατάσταση

$$| \tilde{\psi}^\perp \rangle = | \varphi \rangle - | \psi \rangle \langle \psi | \varphi \rangle \quad (1)$$

η οποία είναι ορθογώνια με την κατάσταση  $| \psi \rangle$ ,  $\langle \psi | \tilde{\psi}^\perp \rangle = 0$ , αλλά δεν είναι κανονικοποιημένη:

$$\langle \tilde{\psi}^\perp | \tilde{\psi}^\perp \rangle = 1 - |\langle \psi | \varphi \rangle|^2 \leq 1 \quad (2)$$

Ορίζουμε τώρα την αντίστοιχη κανονικοποιημένη κατάσταση

$$| \tilde{\psi}^\perp \rangle = b | \psi^\perp \rangle, \quad |b|^2 = 1 - |\langle \psi | \varphi \rangle|^2 \rightarrow \langle \psi^\perp | \psi^\perp \rangle = 1 \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (3) θα καταλήξουμε στο ζητούμενο:

$$|\varphi\rangle = a|\psi\rangle + b|\psi^\perp\rangle, \quad |a|^2 = |\langle\psi|\varphi\rangle|^2 = 1 - |b|^2 \quad (4)$$

**Σχόλιο.** Η τεχνική που περιγράφεται στην άσκηση είναι η επέκταση της τεχνικής Gram-Schmidt σε διανυσματικούς χώρους Hilbert.

**I.3** Να αποδείξετε την ανισότητα Schwartz:

$$|\langle\varphi|\psi\rangle| \leq \|\varphi\|\|\psi\|$$

**Υπόδειξη:** Ένας τρόπος να την αποδείξετε είναι να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης και να γράψετε  $|\varphi\rangle = a|\psi\rangle + b|\psi^\perp\rangle$ .

Με τη βοήθεια της ανισότητας που αποδείξατε δείξτε ότι:

$$\|\varphi\| - \|\psi\| \leq \|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$$

**I.4** Δείξτε ότι οι πίνακες

$$\left\{ \mathbf{I}_{2 \times 2} / \sqrt{2}, \sigma^i / \sqrt{2} \right\}, \quad \sigma^1 \equiv \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \equiv \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \equiv \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν βάση στον χώρο Liouville των  $2 \times 2$  πινάκων.

**I.5** Να δείξετε ότι οποιοσδήποτε μοναδιακός  $2 \times 2$  πίνακας,  $U$ , με ορίζουσα μονάδα (unitary και unimodular) μπορεί να γραφεί ως πίνακας "στροφής" κατά γωνία  $\varphi$  γύρω από κάποιον άξονα στη διεύθυνση  $\vec{n}$ :

$$\hat{U} \doteq e^{i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \vec{n}^2 = 1$$

Ποιος είναι ο χώρος στον οποίο ορίζεται το υποκείμενο αυτής της "στροφής" και ποιος ο χώρος στον οποίο ορίζονται η διεύθυνση και η γωνία; (Το σύνολο αυτών των μετασχηματισμών συγκροτεί την **ομάδα**  $SU(2)$ )

**Υπόδειξη:** Μπορείτε, με τη βοήθεια των  $\hat{U}^\dagger\hat{U}=\hat{I}$  και  $\det \hat{U} = 1$ , να δείξετε ότι η μορφή του πίνακα είναι  $\hat{U} \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$  με  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τα

αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης. Με τον τρόπο αυτό θα δείξετε το δεύτερο σκέλος της ζητούμενης σχέσης.

**I.6.** Δείξτε ότι οι ιδιοκαταστάσεις του  $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ ,  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  είναι:

$$|\psi(\theta, \varphi)\rangle_+ \doteq \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta / 2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta / 2 \end{pmatrix}, \quad |\psi(\theta, \varphi)\rangle_- \doteq \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \sin \theta / 2 \\ -e^{i\varphi/2} \cos \theta / 2 \end{pmatrix}$$

Να βρείτε αποτέλεσμα αυτό είτε βρίσκοντας τις ιδιοκαταστάσεις του τελεστή είτε ξεκινώντας από τις ιδιοκαταστάσεις του  $\sigma_z$  και εφαρμόζοντας σ' αυτές τον κατάλληλο πίνακα στροφής.

**Υπόδειξη:** Μπορείτε να βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις του  $\sigma_n$  με τον συνήθη τρόπο. Μπορείτε επίσης να κάνετε στροφή κατά  $\theta$  γύρω από τον άξονα  $y$  και στη συνέχεια στροφή κατά  $\varphi$  γύρω από τον  $z$ :  $e^{-\frac{i}{2}\varphi\sigma_z} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_y} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Σχόλιο.** Αν επεκτείνουμε την περιοχή της πολικής γωνίας:  $0 \leq \theta < 2\pi$  οι δύο καταστάσεις της άσκησης μπορούν να συνοψισθούν στην

$$|\psi(\theta, \varphi)\rangle \doteq \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta / 2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta / 2 \end{pmatrix}$$

Στην περιοχή  $0 \leq \theta < \pi$  αυτή είναι η  $|\psi\rangle_+$  ενώ στην περιοχή  $\pi \leq \theta < 2\pi$ , η  $|\psi\rangle_-$ .

**I.7** Έστω η κατάσταση  $|\psi\rangle = a|1/2\rangle + b|-1/2\rangle$ . Να βρείτε τη διεύθυνση στην οποία εάν μετρήσετε τη προβολή του σπιν θα βρείτε μετά βεβαιότητας  $\hbar/2$  (ή  $-\hbar/2$ ).

**Υπόδειξη.** Εάν γράψετε  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  και συγκρίνετε με τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης θα βρείτε:

$$a = e^{-i\varphi/2} \cos \theta / 2, \quad b = e^{i\varphi/2} \sin \theta / 2 \rightarrow \theta = 2 \arctan(|b|/|a|), \quad \varphi = 2 \arctan\left(\frac{|a|}{\operatorname{Re} a} \frac{\operatorname{Im} b}{|b|}\right)$$

**I.8** Σωματίο με spin  $1/2$  βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο προσανατολισμένο σε κάποια διεύθυνση  $\vec{n}$ . Η Χαμιλτονιανή που διέπει τη δυναμική του είναι η  $\hat{H} = \frac{|e|\hbar}{mc} \vec{B} \cdot \hat{S}$ .

(α) Έστω ότι το μαγνητικό πεδίο είναι χρονικά ανεξάρτητο. Δείξτε ότι ο τελεστής χρονικής εξέλιξης μπορεί να θεωρηθεί ως τελεστής στροφής. Ποια είναι η γωνία και ποιος ο άξονας περιστροφής;

(β) Έστω ότι το μαγνητικό πεδίο είναι χρονικά εξαρτώμενο:  $\vec{B} = \vec{B}(t)$ . Ποια είναι η μορφή του τελεστή της χρονικής εξέλιξης; Μπορεί να ερμηνευθεί ως τελεστής στροφής;

(γ) Γενικεύστε τα προηγούμενα αποτελέσματα για οποιαδήποτε Χαμιλτονιανή  $\hat{H}(t)$  αφορά στο σωματίο της άσκησης.

**Υπόδειξη:** Ο τελεστής χρονικής εξέλιξης είναι πάντα μοναδιακός. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αναπαρίσταται από έναν  $2 \times 2$  πίνακα. Αυτό που χρειάζεται είναι να αποδείξετε ότι η ορίζουσα αυτού του πίνακα είναι μονάδα. Για να το κάνετε, δείξτε ότι η Χαμιλτονιανή του συστήματός σας έχει, σε κάθε περίπτωση, δύο ιδιοτιμές οι οποίες αθροίζονται στο μηδέν. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τη σχέση  $\ln \det \hat{U} = \text{Tr} \ln \hat{U}$  για να καταλήξετε σ' αυτό που θέλετε.

**I.9** Θεωρείστε τον πίνακα

$$\hat{U} \doteq \frac{\alpha_0 + i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} |\vec{\alpha}|}{\alpha_0 - i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} |\vec{\alpha}|}, \quad \vec{n}^2 = 1, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Δείξτε ότι είναι unitary και unimodular και γράψτε τον ως πίνακα στροφής.

(Εδώ ο υπολογισμός δεν έχει τίποτε το μη τετριμμένο.)

**I.10** Δείξτε ότι εάν  $f$  είναι μια τυχαία μιγαδική συνάρτηση:

$$\begin{aligned} f(\varphi \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) &= f(\varphi) \quad \text{αν} \quad f(\varphi) = f(-\varphi) \\ f(\varphi \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) &= \vec{n} \cdot \vec{\sigma} f(\varphi) \quad \text{αν} \quad f(\varphi) = -f(-\varphi) \end{aligned}$$

**Υπόδειξη:** Η συνάρτηση ενός τελεστή (ο οποίος έχει ένα πλήρες σύστημα ιδιοκαταστάσεων:  $\hat{A}|\alpha\rangle = \lambda_\alpha |\alpha\rangle$ ) ορίζεται από την  $f(\hat{A}) = \sum_\alpha f(\lambda_\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|$ .

Ένας τρόπος να προχωρήσετε είναι να χρησιμοποιήσετε τον μετασχηματισμό Fourier

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{ip\lambda} g(p) \quad \text{για να γράψετε} \quad f(\hat{A}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{ip\hat{A}} g(p) \quad \text{και στη συνέχεια, με}$$

τη βοήθεια της άσκησης (5), να φθάσετε στο τελικό αποτέλεσμα.

**I.11** Δείξτε ότι οποιοσδήποτε πίνακας στροφής, σε χώρο Hilbert δύο διαστάσεων, μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\theta} e^{-\frac{i}{2}\alpha\sigma_z} e^{-\frac{i}{2}\beta\sigma_y} e^{-\frac{i}{2}\gamma\sigma_z}$$

όπου  $\theta$  μια σταθερή φάση.

### Υπόδειξη:

Αν κάνετε τον λογαριασμό θα δείτε ότι:

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\theta} \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos \beta / 2 & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin \beta / 2 \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin \beta / 2 & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos \beta / 2 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι αυτή η ακολουθία στροφών είναι ισοδύναμη με μια μοναδιακή στροφή (όπως, εξάλλου, περιμένει κανείς αφού οι στροφές φτιάχνουν ομάδα.)

### I.12 Εικόνα Αλληλεπίδρασης.

Έστω ότι η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t), \quad \partial_t \hat{H}_0 = 0.$$

Να βρείτε τη μορφή του τελεστή χρονικής εξέλιξης.

### Απάντηση.

Η γενική μορφή του τελεστή χρονικής εξέλιξης είναι:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')} = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) \hat{H}_0 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{V}(t')} \quad (1)$$

Επειδή, εν γένει,  $[\hat{H}_0, \hat{V}] \neq 0$  η (1) δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί με απλό τρόπο.

Μπορούμε, όμως, να δοκιμάσουμε να γράψουμε:

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) \hat{H}_0} \hat{X}(t, t_0) \quad (2)$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης βρίσκουμε:

$$i\hbar \partial_t \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}_0 \hat{U}(t, t_0) + e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) \hat{H}_0} i\hbar \partial_t \hat{X}(t, t_0) \quad (3)$$

Αφού

$$i\hbar \partial_t \hat{U} = \hat{H} \hat{U} = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \hat{U} \quad (4)$$

βρίσκουμε:

$$i\hbar \partial_t \hat{X}(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} (t-t_0) \hat{H}_0} \hat{V}(t) e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) \hat{H}_0} \hat{X}(t, t_0) \equiv \hat{V}_I(t) \hat{X}(t, t_0) \quad (5)$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να λυθεί με τον τρόπο που ακολουθήσαμε στο εδάφιο της χρονικής εξέλιξης:

$$\hat{X}(t, t_0) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt \hat{V}_1(t')} \quad (6)$$

Επομένως

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt \hat{V}_1(t')} \quad , \quad \hat{V}_1(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0} \hat{V}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0} \quad (7)$$

Η τελευταία έκφραση αποτελεί τη βάση της **εικόνας της αλληλεπίδρασης**.

**I.13** Έστω ότι η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος είναι  $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$  ,  $\partial_t \hat{H}_0 = 0$  και ότι είναι γνωστή η λύση του προβλήματος ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων του χρονοανεξάρτητου μέρους της:  $\hat{H}_0 |n\rangle = \varepsilon_n |n\rangle$ . Στην εικόνα της αλληλεπίδρασης οι τελεστές ορίζονται ως  $\hat{A}_1(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0} \hat{A} e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0}$  όπου  $\hat{A}$  ο τελεστής στην εικόνα Schrödinger (θεωρήσαμε την αρχική χρονική στιγμή μηδέν:  $t_0 = 0$ ).

Να δείξετε ότι μπορείτε να ορίσετε τελεστές  $\hat{A}(\omega)$  τέτοιους ώστε να γράψετε

$$\hat{A}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \hat{A}(\omega) \quad (1)$$

**Απάντηση.**

Μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι εάν ισχύει η (1) θα πρέπει

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} \hat{A}_1(t) = \hat{A}(\omega) \quad (2)$$

Πάντα μπορούμε να γράψουμε

$$\hat{A}_1(t) = \sum_{n,m} |n\rangle \langle n| \hat{A}_1(t) |m\rangle \langle m| = \sum_{n,m} e^{-i\omega_{mn}t} |n\rangle \langle n| \hat{A} |m\rangle \langle m| \quad (3)$$

όπου  $\omega_{mn} \equiv \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{\hbar}$ .

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) βρίσκουμε:

$$\hat{A}(\omega) = \sqrt{2\pi} \sum_{n,m} \delta(\omega - \omega_{mn}) |n\rangle \langle n| \hat{A} |m\rangle \langle m| \quad (4)$$



Η τελευταία σχέση ορίζει τον τελεστή  $\hat{A}(\omega)$  μέσω των ιδιοτιμών και των ιδιοκαταστάσεων της  $\hat{H}_0$ . Μπορούμε, μάλιστα, να διαπιστώσουμε ότι

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 \hat{A}(\omega) - \hat{A}(\omega) \hat{H}_0 &= \sqrt{2\pi} \sum_{n,m} \delta(\omega - \omega_{mn}) \hbar(\omega_n - \omega_m) |n\rangle \langle n| \hat{A} |m\rangle \langle m| \rightarrow \\ &\rightarrow [\hat{H}_0, \hat{A}(\omega)] = -\hbar\omega \hat{A}(\omega) \end{aligned} \quad (5)$$

Στη γλώσσα του χώρου Liouville μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή  $\hat{A}(\omega)$  ως ιδιοκατάσταση του υπερτελεστή  $\mathbf{L}(\bullet) \equiv [\hat{H}_0, \bullet]$  με ιδιοτιμή  $-\hbar\omega$ . Εάν ο αρχικός τελεστής είναι αυτοσυζυγής  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ , μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι

$$\hat{A}(\omega) = \hat{A}^\dagger(-\omega) \quad , \quad [\hat{H}_0, \hat{A}^\dagger(\omega)] = \hbar\omega \hat{A}^\dagger(\omega) \quad (6)$$

#### I.14 No cloning Theorem.

Έστω  $|\varphi_A\rangle$  μια άγνωστη τυχαία κατάσταση του χώρου  $H_A$ . Δείξτε ότι δεν υπάρχει μοναδιακός τελεστής τέτοιος ώστε

$$\hat{U}^{AB}(|\varphi_A\rangle|0_B\rangle) = |\varphi_A\rangle|\varphi_B\rangle \quad (1)$$

Στην έκφραση αυτή η κατάσταση  $|0_B\rangle$  είναι κάποια (γνωστή) κατάσταση ενός δεύτερου συστήματος B. Ο χώρος Hilbert αυτού του συστήματος είναι ο  $H_B$ . Ο μετασχηματισμός (1) δρα στον σύνθετο χώρο  $H_A \otimes H_B$ . Προφανώς θα πρέπει  $\dim H_B \geq \dim H_A$

#### Απάντηση.

Για την απάντηση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τελεστές Kraus που εισαγάγαμε στο κυρίως κείμενο:

$$\hat{U}^{AB}(|\varphi_A\rangle|0_B\rangle) = \sum_{\mu_B} |\mu_B\rangle \langle \mu_B| \hat{U}^{AB} |0_B\rangle |\varphi_A\rangle = \sum_{\mu_B} |\mu_B\rangle \hat{M}_\mu^A |\varphi_A\rangle \quad (2)$$

Μπορείτε αμέσως να δείξετε ότι

$$\hat{M}_\mu^A |\varphi_A\rangle = |\varphi_A\rangle \langle \mu_B | \varphi_B\rangle \quad (3)$$

Εάν επαναλάβετε το ίδιο για διαφορετική κατάσταση του συστήματος A θα βρείτε

$$\hat{M}_\mu^A |\psi_A\rangle = |\psi_A\rangle \langle \mu_B | \psi_B\rangle \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη συζυγή έκφραση της δεύτερης περίπτωσης με τη πρώτη, θα βρείτε  $\langle \psi_A | \hat{M}_\mu^{A\dagger} \hat{M}_\mu^A | \varphi_A \rangle = \langle \psi_A | \varphi_A \rangle \langle \psi_B | \mu_B \rangle \langle \mu_B | \varphi_B \rangle$ . Στη συνέχεια μπορείτε να αθροίσετε ως προς τον δείκτη  $\mu_B$  να χρησιμοποιήσετε την πληρότητα της βάσης  $\{|\mu_B\rangle\}$  και την ιδιότητα (I.79) των τελεστών Kraus για να καταλήξετε στην

$$\langle \psi_A | \varphi_A \rangle = \langle \psi_A | \varphi_A \rangle \langle \psi_B | \varphi_B \rangle \quad (5)$$

Για να ισχύει η τελευταία θα πρέπει είτε  $\langle \psi_A | \varphi_A \rangle = 0$  είτε  $\langle \psi_B | \varphi_B \rangle = 1$ . Καμία, όμως, από αυτές τις σχέσεις δεν ισχύει για τυχαία επιλεγμένες καταστάσεις. Επομένως η αρχική πράξη (1) είναι αδύνατη.

### Σχόλιο 1.

Η απάντηση μπορεί να δοθεί πολύ γρήγορα εάν θεωρήσουμε δεδομένο αυτό το οποίο θα αποδειχθεί αργότερα: Ότι ο μόνος τρόπος, η δράση ενός τελεστή σε μια παραγοντοποιημένη κατάσταση, να αποδώσει παραγοντοποιημένη κατάσταση είναι ο μοναδιακός τελεστής να είναι ο ίδιος παραγοντοποιημένος:  $\hat{U}^{AB} = \hat{U}_1^A \hat{U}_2^B$ . Στην περίπτωση αυτή:

$$\hat{U}_1^A | \varphi_A \rangle \hat{U}_2^B | 0_B \rangle = | \varphi_A \rangle | \varphi_B \rangle \quad (6)$$

Επειδή η κατάσταση  $| \varphi_A \rangle$  είναι τυχαία, η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει και για οποιαδήποτε άλλη κατάσταση του ίδιου χώρου:

$$\hat{U}_1^A | \psi_A \rangle \hat{U}_2^B | 0_B \rangle = | \psi_A \rangle | \varphi_B \rangle \quad (7)$$

Συνδυάζοντας τις (2) και (3) θα πάρουμε:

$$\langle \psi_A | \hat{U}_1^{A\dagger} \hat{U}_1^A | \varphi_A \rangle \langle 0_B | \hat{U}_2^{B\dagger} \hat{U}_2^B | 0_B \rangle = \langle \psi_A | \varphi_A \rangle \langle \psi_B | \varphi_B \rangle \quad (8)$$

Επομένως καταλήγετε, και πάλι στην (5).

**Σχόλιο 2.** Αυτό που αποδείχθηκε είναι το λεγόμενο **θεώρημα της μη-κλωνοποίησης (no-cloning theorem)** το οποίο βεβαιώνει ότι δεν είναι δυνατόν να βρεθεί μια φυσική διαδικασία (η οποία εκφράζεται μέσω ενός μοναδιακού μετασχηματισμού) η οποία να «αντιγράψει» μια άγνωστη κατάσταση. Στην Εξ. (1) η κατάσταση αυτή είναι η  $| \varphi_A \rangle$ . Πριν την εφαρμογή του μετασχηματισμού έχουμε στη διάθεσή μας και μια γνωστή κατάσταση ενός συστήματος B, συμβολικά, την  $| 0_B \rangle$ . Αυτό που θέλουμε είναι η δράση του μοναδιακού μετασχηματισμού να κάνει την μετατροπή  $| 0_B \rangle \rightarrow | \varphi_B \rangle$ . Σε μια τέτοια περίπτωση, μετά τη δράση του μετασχηματισμού θα είχαμε στη διάθεσή μας την αρχική κατάσταση και ένα αντίγραφο της. Εάν, μάλιστα, επαναλαμβάναμε πολλές φορές την διαδικασία θα καταλήγαμε με μια συλλογή παρόμοιων καταστάσεων επί των οποίων θα μπορούσαμε να κάνουμε μετρήσεις. Όπως δείχθηκε, αυτό είναι αδύνατον.

**I.15** Έστω  $\hat{U}_{AB}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}_{AB}}$  ο τελεστής χρονικής εξέλιξης ενός σύνθετου συστήματος. Δείξτε ότι δεν υπάρχει χρονική στιγμή  $t_0$  τέτοια ώστε

$$e^{-\frac{i}{\hbar}t_0\hat{H}_{AB}}(|\varphi_A\rangle|0_B\rangle) = |\varphi_A\rangle|\varphi_B\rangle \quad \forall |\varphi_A\rangle \in H_A$$

**I.16 No- deleting theorem** [8].

Στο προηγούμενο πρόβλημα είδαμε ότι δεν υπάρχει μοναδιακός μετασχηματισμός μέσω του οποίου να είναι δυνατή η αντιγραφή μιας άγνωστης κατάστασης. Στο παρόν πρόβλημα θα αποδείξουμε ότι, στο πλαίσιο της κβαντικής μηχανικής δεν είναι δυνατή ούτε η πλήρης διαγραφή μιας άγνωστης κατάστασης:

**Δεν υπάρχει γραμμικός τελεστής ο οποίος να διαγράφει πλήρως μια άγνωστη κατάσταση.**

Για να αναλύσουμε το πρόβλημα θα θεωρήσουμε δύο πανομοιότυπες καταστάσεις  $|\varphi_A\rangle$  και  $|\varphi_B\rangle$ . Οι καταστάσεις αυτές είναι όμοιες διότι έχουν παραχθεί με την ίδια διαδικασία (μέτρηση του σπιν σε μια συγκεκριμένη διεύθυνση, για παράδειγμα). Έστω και μια τρίτη, βοηθητική, κατάσταση  $|\psi_C\rangle$  η οποία αντιστοιχεί στην αρχική κατάσταση αυτού που θα λέγαμε «μηχανή διαγραφής». Μετά τη διαδικασία διαγραφής η κατάσταση αυτή αλλάζει με τρόπο ο οποίος, εν γένει, εξαρτάται από την υπό διαγραφή κατάσταση.

Αν γράψουμε  $\hat{U}^{ABC}$  τον τελεστή που αναπαριστά τη λειτουργία της διαγραφής η μαθηματική έκφραση των παραπάνω είναι:

$$\hat{U}^{ABC}(|\varphi_A\rangle|\varphi_B\rangle|\psi_C\rangle) = |\varphi_A\rangle|0_B\rangle|\chi_C(\varphi)\rangle \quad (1)$$

Το θεώρημα αποδεικνύει ότι η τελική κατάσταση  $|\chi_C\rangle$  της «μηχανής» πρέπει αναγκαστικά να περιέχει την αρχική κατάσταση  $|\varphi\rangle$ .

**Απάντηση.**

Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε ότι  $\dim H_A = \dim H_B = 2$ . Η απόδειξη μπορεί, εύκολα, να γενικευθεί για οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων.

Αν γράψουμε  $|\varphi_A\rangle = a|0_A\rangle + b|1_A\rangle$ ,  $|\varphi_B\rangle = a|0_B\rangle + b|1_B\rangle$  θα βρούμε ότι:

$$|\varphi_A\rangle|\varphi_B\rangle|\psi_C\rangle = (a^2|0_A\rangle|0_B\rangle + b^2|1_A\rangle|1_B\rangle)|\psi_C\rangle + \sqrt{2}ab|\Phi_{ABC}\rangle \quad (2)$$

Στην τελευταία γράψαμε

$$|\Phi_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A\rangle|1_B\rangle + |1_A\rangle|0_B\rangle)|\psi_C\rangle \quad (3)$$

Η δράση του τελεστή  $\hat{U}^{ABC}$  θα επιφέρει τις αλλαγές:

$$|0_A\rangle|0_B\rangle|\chi_C\rangle \rightarrow |0_A\rangle|0_B\rangle|\chi_{0C}\rangle, |1_A\rangle|1_B\rangle|A_C\rangle \rightarrow |1_A\rangle|0_B\rangle|\chi_{1C}\rangle \quad (4)$$

και

$$|\Phi_{ABC}\rangle \rightarrow |\Phi'_{ABC}\rangle \quad (5)$$

Όπως είναι προφανές, στην (4) δεχθήκαμε τη δυνατότητα η τελική κατάσταση της «μηχανής» να εξαρτάται από την κατάσταση την οποία θέλουμε να διαγράψουμε. Αν δεν ήταν έτσι, θα έπρεπε  $|\chi_{0C}\rangle = |\chi_{1C}\rangle$ . Την αλλαγή (5) την παρουσιάσαμε με τον πιο γενικό δυνατό τρόπο διότι ο κανόνας (1) εφαρμόζεται σε δύο όμοιες αρχικές καταστάσεις.

Επομένως:

$$|\varphi_A\rangle|\varphi_B\rangle|\psi_C\rangle \rightarrow a^2|0_A\rangle|0_B\rangle|\chi_{0C}\rangle + b^2|1_A\rangle|0_B\rangle|\chi_{1C}\rangle + \sqrt{2}ab|\Phi'_{ABC}\rangle \quad (6)$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα πρέπει να συμπίπτει με το αποτέλεσμα (1) της δράσης του τελεστή:

$$\begin{aligned} a^2|0_A\rangle|0_B\rangle|\chi_{0C}\rangle + b^2|1_A\rangle|0_B\rangle|\chi_{1C}\rangle + \sqrt{2}ab|\Phi'_{ABC}\rangle &= |\varphi_A\rangle|0_B\rangle|\chi_C\rangle = \\ &= (a|0_A\rangle|0_B\rangle + b|1_B\rangle|0_B\rangle)|\chi_C\rangle \end{aligned} \quad (7)$$

Αμέσως μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι αδύνατον να ισχύει η τελευταία εάν  $|\chi_{0C}\rangle = |\chi_{1C}\rangle$ . Επομένως, το πρώτο συμπέρασμα είναι ότι η τελική κατάσταση της μηχανής αναγκαστικά εξαρτάται από την υπό διαγραφή κατάσταση. Τούτου δοθέντος, ο μόνος τρόπος να αληθεύει η (7) είναι να ισχύει ότι:

$$|\Phi'_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A\rangle|0_B\rangle|\chi_{1C}\rangle + |1_A\rangle|0_B\rangle|\chi_{0C}\rangle) \quad (8)$$

και

$$|\chi_C\rangle = a|\chi_{0C}\rangle + b|\chi_{1C}\rangle \quad (9)$$

Όλες οι καταστάσεις είναι κανονικοποιημένες και επομένως:

$$\begin{aligned} \langle\chi_C|\chi_C\rangle &= |a|^2\langle\chi_{0C}|\chi_{0C}\rangle + |b|^2\langle\chi_{1C}|\chi_{1C}\rangle + a^*b\langle\chi_{0C}|\chi_{1C}\rangle + ab^*\langle\chi_{1C}|\chi_{0C}\rangle \rightarrow \\ & a^*b\langle\chi_{0C}|\chi_{1C}\rangle + ab^*\langle\chi_{1C}|\chi_{0C}\rangle = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Επειδή η μηχανή αντιγραφής θα πρέπει να λειτουργεί για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση δηλαδή για κάθε  $a$  και  $b$ , το αποτέλεσμα (10) μας λέει ότι

$$\langle\chi_{0C}|\chi_{1C}\rangle = \langle\chi_{1C}|\chi_{0C}\rangle = 0 \quad (11)$$

Επομένως, τα ανύσματα  $\{|\chi_{0c}\rangle, |\chi_{1c}\rangle\}$  αποτελούν βάση σε ένα δισδιάστατο υπόχωρο του χώρου Hilbert  $H_C$  της «μηχανής». Έτσι, η κατάσταση (9) είναι ακριβώς η κατάσταση που έπρεπε να διαγραφεί μεταφευμένη σε έναν υπόχωρο της «μηχανής».

Το συμπέρασμα είναι ότι μια κβαντική κατάσταση και οι πληροφορίες που αντιπροσωπεύει δεν μπορούν να διαγραφούν. Θα πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι αυτό είναι καθαρά κβαντικό φαινόμενο αφού οι πληροφορίες οι οποίες αποθηκεύονται κλασικά (σε με κόλλα χαρτί, για παράδειγμα) μπορεί προφανώς να καταστραφεί. Την παραπάνω συλλογιστική μπορούμε να την επεκτείνουμε σε οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων. Πράγματι, μπορούμε πάντα να γράψουμε (βλ. Άσκηση I.2):

$$|\varphi_A\rangle = a|0_A\rangle + b|0_A^\perp\rangle, \quad |\varphi_B\rangle = a|0_B\rangle + b|0_B^\perp\rangle \quad (12)$$

Εάν μεταγράψουμε τη σχέση (4) ως

$$|0_A\rangle|0_B\rangle|\chi_C\rangle \rightarrow |0_A\rangle|0_B\rangle|\chi_{0c}\rangle, \quad |0_A^\perp\rangle|0_B^\perp\rangle|A_C\rangle \rightarrow |0_A^\perp\rangle|0_B\rangle|\chi_{0c}^\perp\rangle \quad (13)$$

και επαναλάβουμε τα βήματα της προηγούμενης ανάλυσης θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$|\chi_C\rangle = a|\chi_{0c}\rangle + b|\chi_{0c}^\perp\rangle \quad (14)$$

## ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ.

### ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ.

Οι βασικές έννοιες στις οποίες αναφέρεται αυτή και οι επόμενες ενότητες μπορούν να βρεθούν σε αρκετά συγγράμματα. Στις σημειώσεις αυτές έχουμε ακολουθήσει τις αναφορές [9-14]

#### **(1) Καθαροί τελεστές πυκνότητας-Καθαρές καταστάσεις.**

Στην προηγούμενη ενότητα αναφερθήκαμε στην περιγραφή κλειστών κβαντικών συστημάτων μέσω των στοιχείων  $|\psi\rangle$  ενός χώρου Hilbert  $H$ . Στα αφηρημένα αυτά αντικείμενα αντιστοιχίσαμε την κβαντική κατάσταση, το σύνολο, δηλαδή, των πληροφοριών που έχουμε για το σύστημα που μας ενδιαφέρει. Όπως είδαμε, η κατάσταση  $|\psi\rangle$  είναι ο αντιπρόσωπος μιας συλλογής παρόμοιων καταστάσεων, μιας **καθαρής κβαντικής συλλογής** και είναι το εργαλείο μέσω του οποίου μέσες τιμές και πιθανότητες μπορούν να υπολογισθούν με ακρίβεια.

Μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο αντικείμενο, τον **τελεστή πυκνότητας (ή μήτρα πυκνότητας)**, μέσω του οποίου μπορούμε, με ισοδύναμο τρόπο, να υπολογίσουμε μετρήσιμες ποσότητες:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad |\psi\rangle \in H \quad (\text{II.1})$$

Μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε (βλ. Εδάφιο I.3) ότι

$$\text{Prob}(\alpha_n) = \langle\psi|\hat{E}_n|\psi\rangle = \text{Tr}(\hat{E}_n|\psi\rangle\langle\psi|) = \text{Tr}(\hat{E}_n\hat{\rho}) \quad (\text{II.2})$$

Για το τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το ίχνος δεν εξαρτάται από τη βάση η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του και διαλέξαμε μια τυχαία βάση για να γράψουμε:

$$\text{Tr}(\hat{E}_n|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_i \langle i|\hat{E}_n|\psi\rangle\langle\psi|i\rangle = \sum_i \langle\psi|i\rangle\langle i|\hat{E}_n|\psi\rangle = \langle\psi|\left(\sum_i |i\rangle\langle i|\right)\hat{E}_n|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{E}_n|\psi\rangle \quad (\text{II.3})$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) \quad (\text{II.4})$$

Μετά από μια (ορθογώνια) μέτρηση η κατάσταση του συστήματος αλλάζει (βλ. Εξ. (I.39)):

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = \hat{E}_n |\psi\rangle / \sqrt{\langle\psi|\hat{E}_n|\psi\rangle} \quad (\text{II.5})$$

Ανάλογα θα αλλάξει και η μήτρα πυκνότητας:

$$\hat{\rho} \xrightarrow{\text{μέτρηση}} \hat{\rho}' = \frac{\hat{E}_n |\psi\rangle \langle\psi| \hat{E}_n}{\langle\psi|\hat{E}_n|\psi\rangle} = \frac{\hat{E}_n \hat{\rho} \hat{E}_n}{\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{E}_n)} \quad (\text{II.6})$$

Οι σχέσεις (II.2), (II.4) και (II.6) δηλώνουν ότι η μαθηματική περιγραφή ενός (απομονωμένου) κβαντικού συστήματος μπορεί να γίνει, είτε μέσω του ανύσματος  $|\psi\rangle$  το οποίο είναι στοιχείο ενός χώρου Hilbert  $D$  διαστάσεων, είτε, ισοδύναμα, μέσω του τελεστή πυκνότητας (II.1) ο οποίος είναι στοιχείο ενός χώρου Liouville  $D^2$  διαστάσεων.

Με άλλα λόγια, μια καθαρή συλλογή καταστάσεων μπορεί να αντιπροσωπευθεί πλήρως από την μήτρα πυκνότητας (II.1) η οποία, για τον λόγο αυτό, λέγεται **καθαρή μήτρα πυκνότητας**.

Λόγω της ισοδυναμίας των περιγραφών θα χρησιμοποιούμε τον όρο **καθαρή κατάσταση** τόσο για το στοιχείο  $|\psi\rangle$  του χώρου Hilbert όσο και για την μήτρα πυκνότητας  $|\psi\rangle\langle\psi|$ .

Από τον ορισμό του τελεστή πυκνότητας (II.1) μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε τις ιδιότητές του:

$$\bullet \text{Tr} \hat{\rho} = 1 \quad \bullet \hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger \quad \bullet \hat{\rho} \geq 0 \quad \bullet \hat{\rho} = \hat{\rho}^2 \quad (\text{II.7})$$

Η μόνη, ίσως, από τις ιδιότητες η οποία δεν είναι προφανής είναι η τρίτη. Μπορεί, όμως, να αποδειχθεί αμέσως αν θυμηθούμε τον ορισμό ενός μη αρνητικού τελεστή:

$$\langle\phi|\hat{\rho}|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle = |\langle\phi|\psi\rangle|^2 \geq 0 \quad (\text{II.8})$$

Ως αυτοσυζυγής τελεστής, ο τελεστής πυκνότητας έχει ένα πλήρες σύστημα ιδιοκαταστάσεων:

$$\hat{\rho}|\rho\rangle = \lambda_\rho |\rho\rangle, \quad \sum_{\rho=1}^D |\rho\rangle\langle\rho| = \hat{I} \quad (\text{II.9})$$

Εάν εφαρμόσουμε την (II.8) για τις ιδιοτιμές στην (II.9) θα διαπιστώσουμε ότι  $\lambda_\rho \geq 0$ .

Μπορούμε επίσης να δούμε αμέσως ότι:

$$\hat{\rho}|\rho\rangle = \lambda_\rho |\rho\rangle \rightarrow \hat{\rho}^2 |\rho\rangle = \lambda_\rho \hat{\rho} |\rho\rangle \rightarrow \hat{\rho} |\rho\rangle = \lambda_\rho^2 |\rho\rangle = \lambda_\rho |\rho\rangle \quad (\text{II.10})$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές είναι είτε 0 είτε 1. Επειδή

$$\text{Tr} \hat{\rho} = \sum_p \lambda_p = 1 \text{ βγάζουμε αμέσως το συμπέρασμα ότι οι ιδιοτιμές μιας καθαρής}$$

**μήτρας πυκνότητας είναι όλες μηδέν εκτός από μία που είναι μονάδα.**

Όπως μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα, εάν η κατάσταση ενός συστήματος αλλάξει μέσω ενός μοναδιακού τελεστή  $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$ , ο τελεστής  $\hat{\rho}' = |\psi'\rangle\langle\psi'|$  έχει όλες τις ιδιότητες (II.7).

Ο τελεστής πυκνότητας αλλάζει με τον χρόνο διότι αλλάζουν οι καταστάσεις:

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)|\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}(t, t_0)\hat{\rho}(t_0)\hat{U}^\dagger(t, t_0) \quad (\text{II.11})$$

Όπως κατασκευάσαμε την εξίσωση Schrödinger για την εξέλιξη μιας κβαντικής κατάστασης μπορούμε να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη εξίσωση για τον τελεστή πυκνότητας:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\hat{\rho}(t) &= (i\hbar\partial_t\hat{U})\hat{\rho}(t_0)\hat{U}^\dagger + \hat{U}\hat{\rho}(t_0)(i\hbar\partial_t\hat{U}^\dagger) \underset{(\text{A.48})}{=} \hat{H}\hat{U}\hat{\rho}(t_0)\hat{U}^\dagger - \hat{U}\hat{\rho}(t_0)\hat{U}^\dagger\hat{H} = \\ &= \hat{H}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{H} = -[\hat{\rho}(t), \hat{H}] \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Η εξίσωση αυτή φέρνει στο μυαλό την εξίσωση Heisenberg η οποία διέπει την εξέλιξη χρονικά εξαρτημένων τελεστών, αλλά δεν αφορά την εικόνα Heisenberg. Πέραν του αντίθετου προσήμου, η εξίσωση (II.12) αφορά στην εξέλιξη των καταστάσεων και, επομένως, βρίσκεται στο πλαίσιο της εικόνας Schrödinger.

Το πρόσημο στο δεξί μέλος της (II.12) είναι υπεύθυνο και για την ονομασία «μήτρα πυκνότητας». Η αναλογία ξεκινάει από την εξίσωση Liouville της κλασικής στατιστικής μηχανικής:

$$\partial_t \rho(t) = -\{\rho(t), H\} \quad (\text{II.13})$$

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο  $\{\bullet, H\}$  είναι οι αγκύλες Poisson και η συνάρτηση  $\rho(t)$  εκφράζει την **πυκνότητα των σημείων του φασικού χώρου** στη γειτονιά ενός δεδομένου σημείου του.

Η κβαντική της έκδοση της (II.13) είναι η εξίσωση (II.12) η οποία ονομάζεται **εξίσωση von Neumann** και αφορά στη χρονική εξέλιξη του τελεστή πυκνότητας.

Οι μετρήσιμες ποσότητες θα αλλάζουν με το χρόνο:

$$\langle \hat{A} \rangle_t = \text{Tr} [\hat{\rho}(t) \hat{A}] \quad (\text{II.14})$$



Εάν λάβουμε υπόψη τη σχέση (II.11) θα ξαναγράψουμε την τελευταία ως:

$$\langle \hat{A} \rangle_t = \text{Tr} \left[ \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}(t, t_0) \hat{A} \right] = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}(t_0) \hat{U}(t, t_0) \hat{A} \hat{U}^\dagger(t, t_0) \right] = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}(t_0) \hat{A}_H(t) \right] \quad (\text{II.15})$$

Η τελευταία σχέση αναδεικνύει και την εικόνα Heisenberg στη γλώσσα του τελεστή πυκνότητας. Στην εικόνα αυτή οι καταστάσεις, επομένως και ο τελεστής πυκνότητας, δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο. Αντίθετα, η χρονική μεταβολή των μετρήσιμων καταστάσεων οφείλεται στο ότι οι τελεστές αποκτούν την κατάλληλη χρονική εξάρτηση.

Μετά από αυτά που προηγήθηκαν, μπορεί να γίνει κατανοητό γιατί ο όρος «κβαντική κατάσταση» μπορεί να αναφέρεται είτε στο στοιχείο του χώρου Hilbert  $|\psi\rangle$  είτε, ισοδύναμα, στην αντίστοιχη μήτρα πυκνότητας.

### (1α) Σφαίρα Bloch.

Ένα από τα πλεονεκτήματα της μήτρας πυκνότητας είναι ότι επιτρέπει την γεωμετρική περιγραφή των κβαντικών καταστάσεων.

Η περιγραφή αυτή είναι ιδιαίτερα απλή όταν ο χώρος Hilbert στον οποίο αναφερόμαστε είναι δύο διαστάσεων. Στην περίπτωση αυτή ο τελεστής πυκνότητας αναπαρίσταται από έναν 2x2 πίνακα της μορφής

$$\hat{\rho} \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{pmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Η μορφή του πίνακα έχει προκύψει από τις ιδιότητες (II.7) της μήτρας πυκνότητας. Ο χώρος Liouville στον οποίο ορίζεται η μήτρα πυκνότητας είναι 4 διαστάσεων γι' αυτό και χρειάζονται 4 πληροφορίες προκειμένου να προσδιορισθεί πλήρως:  $(a, \text{Re}b, \text{Im}b, c)$ .

Λόγω της δεσμευτικής σχέσης  $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$  αρκούν 3 αφού  $a + c = 1$ . Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα (βλ. Εξ. (II.35)), η τετράδα τελεστών  $\{\hat{I}/\sqrt{2}, \hat{\sigma}^x/\sqrt{2}, \hat{\sigma}^y/\sqrt{2}, \hat{\sigma}^z/\sqrt{2}\}$  αποτελεί βάση στον χώρο Liouville και επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \lambda_0 + \frac{\hat{\sigma}^x}{\sqrt{2}} \lambda_x + \frac{\hat{\sigma}^y}{\sqrt{2}} \lambda_y + \frac{\hat{\sigma}^z}{\sqrt{2}} \lambda_z \quad (\text{II.17})$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (I.36) θα βρούμε:

$$\lambda_0 = \text{Tr} \left( \hat{\rho} \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_i = \text{Tr} \left( \hat{\rho} \frac{\hat{\sigma}^i}{\sqrt{2}} \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} p_i, \quad i = x, y, z \quad (\text{II.18})$$

Στην τελευταία σχέση, οι πραγματικοί αριθμοί  $p_i$  ορίζονται από τη σχέση

$$p_i \equiv \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}^i) = \frac{2}{\hbar} \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{S}^i) \quad (\text{II.19})$$

και, προφανώς, αντιστοιχούν σε μετρήσιμες ποσότητες.

Επομένως, η μήτρα πυκνότητας γράφεται:

$$\hat{\rho} \doteq \frac{1}{2}(\hat{I}_{2 \times 2} + \vec{p} \cdot \hat{\sigma}) \quad (\text{II.20})$$

Η τελευταία σχέση αποκαθιστά μια αντιστοιχία ανάμεσα στις μήτρες πυκνότητας και τα σημεία  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$  ενός τρισδιάστατου χώρου. Εάν παρατηρήσουμε ότι

$$\hat{\rho}^2 \doteq \frac{1}{4}(\hat{I}_{2 \times 2} + 2\vec{p} \cdot \hat{\sigma} + |\vec{p}|^2 \hat{I}_{2 \times 2}) \rightarrow \text{Tr}\hat{\rho}^2 = \frac{1}{2}(1 + |\vec{p}|^2) = 1 \rightarrow |\vec{p}|^2 = 1 \quad (\text{II.21})$$

θα βγάλουμε το συμπέρασμα ότι τα σημεία για τα οποία συζητάμε βρίσκονται στην επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα μονάδα. Η σφαίρα αυτή ονομάζεται **σφαίρα Bloch** και το άνωσμα  $\vec{p}$  λέγεται **άνωσμα Bloch**. Αν χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες  $(|\vec{p}|, \theta, \varphi)$  το άνωσμα Bloch ορίζει μια μοναδιαία διεύθυνση ή, αλλιώς, ένα σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας:

$$\vec{p} = \vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (\text{II.22})$$

Αν συνδυάσουμε τις (II.20) και (II.22) θα βρούμε:

$$\hat{\rho} \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{-i\varphi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Η τελευταία μήτρα μπορεί να προκύψει και από τη γενική μορφή που έχει μια κατάσταση του δισδιάστατου χώρου Hilbert

$$|\psi(\theta, \varphi)\rangle \doteq \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta / 2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta / 2 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\rho} = |\psi(\theta, \varphi)\rangle\langle\psi(\theta, \varphi)| \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{-i\varphi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{II.24})$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να μας βοηθήσει να ταυτοποιήσουμε τα σημεία της σφαίρας Bloch.

Για παράδειγμα ο βόρειος πόλος  $\theta = 0$ ,  $\varphi = 0$  αντιστοιχεί στην μήτρα πυκνότητας  $|1/2_z\rangle\langle 1/2_z|$  ενώ ο νότιος στην  $|-1/2_z\rangle\langle -1/2_z|$ .

Στροφές των καταστάσεων στον δισδιάστατο χώρο Hilbert αλλάζουν τη μήτρα πυκνότητας (II.23) :

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}' = \hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta' & e^{-i\varphi'} \sin \theta' \\ e^{i\varphi'} \sin \theta' & 1 - \cos \theta' \end{pmatrix} \quad (\text{II.25})$$

Η απλή εικόνα που περιγράψαμε **δεν ισχύει** όταν οι καταστάσεις  $|\psi\rangle$  ορίζονται σε χώρο Hilbert διάστασης  $D > 2$  όπου η γεωμετρία γίνεται αρκετά πιο πολύπλοκη. Θα σχολιάσουμε το θέμα αυτό στη συνέχεια.

## (2) Μικτοί τελεστές πυκνότητας-Μικτές καταστάσεις.

Πριν ορίσουμε την έννοια του μικτού (: **μη καθαρού**) τελεστή πυκνότητας είναι χρήσιμο να αναλύσουμε ένα απλό παράδειγμα, την κατάσταση δύο ηλεκτρονίων με συνολικό σπιν μηδέν:

$$|\chi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1/2_{z,A}, -1/2_{z,B}\rangle - |-1/2_{z,A}, 1/2_{z,B}\rangle \right) \quad (\text{II.26})$$

Στην έκφραση αυτή  $|\pm 1/2_{z,A,B}\rangle_z$  είναι οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή  $\hat{S}_{A,B}^z$ . Εν τούτοις, η κατάσταση (II.26) διατηρεί την ίδια μορφή σε οποιαδήποτε βάση:

$$|\chi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1/2_{n,A}, -1/2_{n,B}\rangle - |-1/2_{n,A}, 1/2_{n,B}\rangle \right) \quad (\text{II.27})$$

Ο λόγος είναι ότι το συνολικό σπιν μηδενίζεται και, επομένως, οι στροφές αφήνουν την (II.26) αναλλοίωτη. Σ' αυτόν τον λόγο, εξάλλου, οφείλει και τον χαρακτηρισμό της ως singlet.

Η πιο σημαντική ιδιότητα της κατάστασης (II.27) είναι ότι σε αυτήν τα σωματίδια είναι εναγκαλισμένα (entangled) αφού είναι αδύνατον να παραγοντοποιηθεί:  $|\chi_{AB}\rangle \neq |\varphi_A\rangle |\varphi_B\rangle$ .

Έστω ότι στην κατάσταση (II.27) ενδιαφερόμαστε για μετρήσιμες ποσότητες που αναφέρονται στο ηλεκτρόνιο A. Για την προβολή του σπιν, για παράδειγμα, θα βρούμε:

$$\langle \hat{S}_A^n \rangle = \langle \chi_{AB} | \hat{S}_A^n | \chi_{AB} \rangle = 0, \quad \text{Prob}_n(1/2) = \langle \chi_{AB} | 1/2_{n,A} \rangle \langle 1/2_{n,A} | \chi_{AB} \rangle = 1/2 \quad (\text{II.28})$$

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει σε κάθε κατεύθυνση και επομένως

$$\langle \hat{S}_A^x \rangle = \langle \hat{S}_A^y \rangle = \langle \hat{S}_A^z \rangle = 0 \quad (\text{II.29})$$

Το τελευταίο εύρημα έρχεται σε πλήρη αντίθεση με αυτό που θα βρίσκαμε (βλ. (I.8), (I.10) και Άσκηση II.15) εάν τα αποτελέσματα των μετρήσεων μπορούσαν να

υπολογισθούν μέσω της  $|\chi_A\rangle = a|1/2_{z,A}\rangle + b|-1/2_{z,A}\rangle$  η οποία είναι η πιο γενική κατάσταση ενός σωματίου με  $1/2$ . Σε μια τέτοια περίπτωση:

$$\langle \hat{S}_A^z \rangle = \frac{\hbar}{2} (|a|^2 - |b|^2), \quad \langle \hat{S}_A^x \rangle = \hbar |a||b| \cos(\theta_b - \theta_a), \quad \langle \hat{S}_A^y \rangle = \hbar |a||b| \sin(\theta_b - \theta_a) \quad (\text{II.30})$$

Μια μικρή διερεύνηση θα μας πείσει αμέσως ότι είναι αδύνατον να βρεθούν (μη μηδενικοί) αριθμοί  $a, b$  οι οποίοι να ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις (II.29) και (II.30).

**Το αβίαστο συμπέρασμα είναι ότι όταν το ηλεκτρόνιο A είναι μέρος μιας διμερούς κατάστασης στην οποία υπάρχει entanglement, η κατάσταση του είναι αδύνατον να αντιπροσωπευθεί από κάποιο στοιχείο  $|\varphi_A\rangle \in H_A$ .** Είναι προφανές ότι το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για το σωματίο B το οποίο είναι το δεύτερο τμήμα του διμερούς συστήματος.

Εντούτοις τα αποτελέσματα (II.28) είναι δυνατόν να περιγραφούν με διαφορετικό τρόπο. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_A^n \rangle &= \langle \chi_{AB} | \hat{S}_A^n | \chi_{AB} \rangle = \text{Tr}_{AB} \left( \hat{S}_A^n | \chi_{AB} \rangle \langle \chi_{AB} | \right) = \text{Tr}_{AB} \left( \hat{S}_A^n \hat{\rho}_{AB} \right) \\ \text{Prob}_n(1/2) &= \text{Tr}_{AB} \left( \hat{E}_n(1/2) | \chi_{AB} \rangle \langle \chi_{AB} | \right) = \text{Tr}_{AB} \left( \hat{E}_n(1/2) \hat{\rho}_{AB} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Στην τελευταία έκφραση το ίχνος αφορά τόσο τους βαθμούς ελευθερίας του A όσο και του B:

$$\text{Tr}_{AB}(\dots) = \sum_{i_A = \pm 1/2} \sum_{\mu_B = \pm 1/2} \langle i_A, \mu_B | (\dots) | i_A, \mu_B \rangle = \text{Tr}_A \text{Tr}_B(\dots) \quad (\text{II.32})$$

Εάν πάρουμε πρώτα το ίχνος ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του B, θα βρούμε:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_A^n \rangle &= \text{Tr}_A \left( \hat{S}_A^n (\text{Tr}_B \hat{\rho}_{AB}) \right) \equiv \text{Tr}_A \left( \hat{S}_A^n \hat{\rho}_A^R \right) \\ \text{Prob}_n(1/2) &= \text{Tr}_A \left( \hat{E}_n(1/2) \hat{\rho}_A^R \right) \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Στις τελευταίες σχέσεις ορίσαμε την λεγόμενη **ανηγμένη μήτρα πυκνότητας (reduced density matrix)**:

$$\hat{\rho}_A^R \equiv \text{Tr}_B \hat{\rho}_{AB} \quad (\text{II.34})$$

**Ο τελεστής αυτός περιγράφει πλήρως την κατάσταση του σωματίου A** υπό την έννοια ότι μέσω αυτού μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια όλα τα μετρήσιμα μεγέθη (πιθανότητες και μέσες τιμές) που το αφορούν. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα:

$$\hat{\rho}_A^R = \frac{1}{2} \left( |1/2_{n,A}\rangle \langle 1/2_{n,A}| + |-1/2_{n,A}\rangle \langle -1/2_{n,A}| \right) = \frac{1}{2} \hat{I}_A \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_A \quad (\text{II.35})$$

Είναι πολύ εύκολο να ελέγξει κανείς ότι με τη χρήση των (II.33) και (II.35) παράγονται τα αποτελέσματα (II.28)

Υπάρχει, όμως, και άλλος τρόπος να πάρουμε τα αποτελέσματα (II.29). Μπορούμε να θεωρήσουμε τις καταστάσεις  $|\pm 1/2_z\rangle$  ως τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα μια κλασικής τυχαίας μεταβλητής, ενδεχόμενα το καθένα από τα οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με πιθανότητα 1/2:

$$\mathcal{Q} = \{|1/2_z\rangle, |-1/2_z\rangle; 1/2, 1/2\} \quad (\text{II.36})$$

Ο υπολογισμός γίνεται εύκολα αν θυμηθούμε (βλ. Άσκηση I.6) ότι στις καταστάσεις  $|\pm 1/2_z\rangle$  η πιθανότητα να μετρηθεί  $\pm \hbar/2$  σε κάποια διεύθυνση  $\vec{n}$  είναι

$$\begin{aligned} |\langle 1/2_n | 1/2_z \rangle|^2 &= \cos^2(\theta/2), & |\langle -1/2_n | 1/2_z \rangle|^2 &= \sin^2(\theta/2) \\ |\langle 1/2_n | -1/2_z \rangle|^2 &= \sin^2(\theta/2), & |\langle -1/2_n | -1/2_z \rangle|^2 &= \cos^2(\theta/2) \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

Επομένως, εάν έχουμε στη διάθεσή μας την κατάσταση  $|1/2_z\rangle$  (ενδεχόμενο 1):

$$\langle \hat{S}_n \rangle_1 = \frac{\hbar}{2} \cos^2(\theta/2) - \frac{\hbar}{2} \sin^2(\theta/2) = \frac{\hbar}{2} \cos \theta \quad (\text{II.38})$$

Αν έχουμε στη διάθεσή μας την κατάσταση  $|-1/2_z\rangle$  (ενδεχόμενο 2):

$$\langle \hat{S}_n \rangle_2 = \frac{\hbar}{2} \sin^2(\theta/2) - \frac{\hbar}{2} \cos^2(\theta/2) = -\frac{\hbar}{2} \cos \theta \quad (\text{II.39})$$

Επειδή κάθε ενδεχόμενο έχει την ίδια πιθανότητα πραγματοποίησης, η συνολική μέση τιμή θα είναι

$$\langle \hat{S}_n \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{S}_n \rangle_1 + \frac{1}{2} \langle \hat{S}_n \rangle_2 = 0 \quad (\text{II.40})$$

Με την έννοια αυτή, η ανηγμένη μήτρα πυκνότητας δεν αντιπροσωπεύει μια καθαρή συλλογή δηλαδή, μια συλλογή η οποία περιέχει μόνο μία κατάσταση **αλλά μια μικτή (ή μη καθαρή) συλλογή καταστάσεων** στην οποία υπάρχουν περισσότερες από μία (καθαρές) καταστάσεις.

Για τον λόγο αυτό, η ανηγμένη μήτρα πυκνότητας λέγεται **μικτή μήτρα πυκνότητας**. Όταν χρησιμοποιούμε τον όρο **μικτή κατάσταση** θα αναφερόμαστε σε ένα σύστημα η κατάσταση του οποίου περιγράφεται από μια μικτή μήτρα πυκνότητας.

Είναι, ίσως, χρήσιμο να συγκρίνουμε με την περιγραφή ενός σωματίου μέσω της καθαρής κατάστασης  $|\chi\rangle = (|1/2_z\rangle + |-1/2_z\rangle) / \sqrt{2}$  ή, ισοδύναμα, μέσω της καθαρής συλλογής καταστάσεων:  $\mathcal{Q} = \{|\chi\rangle; 1\}$ . Στην περίπτωση αυτή

$\langle \hat{S}^z \rangle = 0$ ,  $\langle \hat{S}^x \rangle = \hbar/2$ ,  $\langle \hat{S}^y \rangle = 0$ . Η διαφορά με τα αποτελέσματα (II.29) ή (II.40) είναι προφανής και σημαντική. Στην περίπτωση της καθαρής συλλογής δηλώνουν ότι το σωματίο βρίσκεται σε ιδιοκατάσταση του  $\hat{S}^x$  με ιδιοτιμή  $\hbar/2$ . Στην περίπτωση της μη καθαρής συλλογής (II.36), τα αποτελέσματα (II.29), (II.40) δηλώνουν ότι το σωματίο συμπεριφέρεται ως εάν να βρίσκεται, με την ίδια πιθανότητα, σε οποιαδήποτε κατάσταση.

Η προφανής απώλεια πληροφορίας στη δεύτερη περίπτωση, στην οποία οι καταστάσεις  $|\pm 1/2_z\rangle$  αντιμετωπίζονται ως **ανεξάρτητα** ενδεχόμενα οφείλεται στη **απώλεια της συνοχής (coherence)** η οποία χαρακτηρίζει την επαλληλία  $|\chi\rangle = (|1/2_z\rangle + |-1/2_z\rangle) / \sqrt{2}$ . Κλείνοντας αυτή την παράγραφο να παρατηρήσουμε ότι η ανηγμένη μήτρα πυκνότητας αποτελείται από το άθροισμα δύο όρων καθένας από τους οποίους είναι μια καθαρή μήτρα πυκνότητας

$$\hat{\rho}_A^R = \frac{1}{2}\hat{\rho}_1 + \frac{1}{2}\hat{\rho}_2, \quad \hat{\rho}_1 = |1/2_{n,A}\rangle\langle 1/2_{n,A}|, \quad \hat{\rho}_2 = |-1/2_{n,A}\rangle\langle -1/2_{n,A}| \quad (\text{II.41})$$

Μπορούμε να συγκρίνουμε τις ιδιότητες του τελεστή (B.35) με τις γενικές ιδιότητες του τελεστή πυκνότητας (II.7). Θα δούμε αμέσως ότι ικανοποιούνται όλες εκτός από την τελευταία:

$$(\hat{\rho}_A^R)^2 = \frac{1}{4}\hat{I}_A \doteq \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_A \rightarrow \text{Tr}_A (\hat{\rho}_A^R)^2 = \frac{1}{2} < 1 \quad (\text{II.42})$$

Οι τελευταίες σχέσεις, παρότι αφορούν σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, θέτουν τις βάσεις για αυτά που θα αποδείξουμε γενικά στην επόμενη παράγραφο:

- Όταν σε ένα διμερές σύστημα τα επιμέρους τμήματα είναι εναγκαλισμένα (entangled), κανένα από αυτά δεν μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας καθαρής κατάστασης  $|\psi\rangle$  ή μέσω μιας καθαρής μήτρας πυκνότητας  $|\psi\rangle\langle\psi|$ .

- Καθένα από τα εναγκαλισμένα υποσυστήματα ενός διμερούς συστήματος μπορεί να περιγραφεί από μια μη καθαρή μήτρα πυκνότητας, την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας, η οποία ορίζεται στην εξίσωση (II.34).

- Η μη καθαρή μήτρα πυκνότητας μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει μια μη καθαρή συλλογή καταστάσεων η οποία αποτελείται από περισσότερες από μια καταστάσεις κάθε μια από τις οποίες συμμετέχει με κάποιο συγκεκριμένο ποσοστό.
- Η μη καθαρή μήτρα πυκνότητας είναι το άθροισμα περισσότερων της μιας καθαρών μητρών πυκνότητας. Έχει όλες τις ιδιότητες μιας καθαρής μήτρας πυκνότητας εκτός από μία:  $\text{Tr} \hat{\rho}^2 < 1$

### (3) Διμερή Συστήματα-Entanglement.

Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε την πιο γενική δυνατή διμερή κατάσταση προκειμένου να αποδείξουμε τους ισχυρισμούς της τελευταίας παραγράφου:

$$|\chi_{AB}\rangle = \sum_{i_A=1}^{D_A} \sum_{\mu_B=1}^{D_B} a_{i_A \mu_B} |i_A, \mu_B\rangle \quad (\text{II.43})$$

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για την αναμενόμενη τιμή ενός φυσικού μεγέθους το οποίο αναφέρεται στο σύστημα A:

$$\langle \hat{M}_A \rangle = \text{Tr}_{AB} (\hat{\rho}_{AB} \hat{M}_A) = \text{Tr}_A \left[ \text{Tr}_B (\hat{\rho}_{AB}) \hat{M}_A \right] = \text{Tr}_A (\hat{\rho}_A^R \hat{M}_A) \quad (\text{II.44})$$

Όπως είναι προφανές η τελευταία σχέση ισχύει είτε η αρχική κατάσταση (B.43) είναι εναγκαλισμένη είτε όχι. Στο τελευταίο βήμα, η ανηγμένη μήτρα πυκνότητας έχει ορισθεί όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα Εξ. (II.34).

Εάν, στην κατάσταση (II.43) πραγματοποιήσουμε το άθροισμα ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος A, θα βρούμε:

$$|\chi_{AB}\rangle = \sum_{\mu_B=1}^{D_B} |\tilde{\varphi}_{\mu,A}\rangle |\mu_B\rangle \quad (\text{II.45})$$

Στην τελευταία σχέση γράψαμε:

$$|\tilde{\varphi}_{\mu,A}\rangle = \sum_{i_A=1}^{D_A} a_{i_A \mu_B} |i_A\rangle \quad (\text{II.46})$$

Το άνυσμα αυτό είναι, προφανώς, στοιχείο του χώρου Hilbert  $H_A$ , εξαρτάται από τον δείκτη  $\mu$  και δεν είναι κανονικοποιημένο. Μπορούμε να ορίσουμε το αντίστοιχο κανονικοποιημένο άνυσμα γράφοντας

$$|\tilde{\varphi}_{\mu,A}\rangle = \sqrt{P_\mu} |\varphi_{\mu,A}\rangle, \quad P_\mu = \langle \tilde{\varphi}_{\mu,A} | \tilde{\varphi}_{\mu,A} \rangle \geq 0 \quad (\text{II.47})$$

Έτσι, η (II.45) παίρνει τη μορφή:

$$|\chi_{AB}\rangle = \sum_{\mu_B=1}^{D_B} \sqrt{P_\mu} |\varphi_{\mu,A}\rangle |\mu_B\rangle \quad (\text{II.48})$$

Μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι:

$$|\tilde{\varphi}_{\mu,A}\rangle = \langle \mu_B | \chi_{AB} \rangle \rightarrow p_\mu = \langle \chi_{AB} | \mu_B \rangle \langle \mu_B | \chi_{AB} \rangle \rightarrow \sum_{\mu_B=1}^{D_B} p_\mu = \langle \chi_{AB} | \chi_{AB} \rangle = 1 \quad (\text{II.49})$$

Έτσι, οι μη αρνητικοί αριθμοί  $p_\mu$  αθροίζονται στην μονάδα και, επομένως, μπορούν να ερμηνευθούν ως πιθανότητες.

Χρησιμοποιώντας την (II.47) βρίσκουμε την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας:

$$\hat{\rho}_A^R = \text{Tr}_B \hat{\rho}_{AB} = \sum_{\mu} p_{\mu} |\varphi_{\mu,A}\rangle \langle \varphi_{\mu,A}| = \sum_{\mu} p_{\mu} \hat{\rho}_{\mu,A} \quad (\text{II.50})$$

Μια σειρά από παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν στο σημείο αυτό. Καταρχήν, οι καταστάσεις  $|\varphi_{\mu,A}\rangle$  είναι κανονικοποιημένες αλλά όχι, κατ' ανάγκη, ορθογώνιες μεταξύ τους όπως συνέβαινε στο αρχικό παράδειγμα. Οι τελεστές  $\hat{\rho}_{\mu,A} = |\varphi_{\mu,A}\rangle \langle \varphi_{\mu,A}|$  είναι καθαρές μήτρες πυκνότητας οι οποίες έχουν όλες τις ιδιότητες (II.7). Με την παρατήρηση αυτή μπορούμε να διαπιστώσουμε:

$$\text{Tr} \hat{\rho}_A^R = \sum_{\mu} p_{\mu} \text{Tr} \hat{\rho}_{\mu,A} = \sum_{\mu} p_{\mu} = 1 \quad (\text{II.51})$$

Επειδή καθένας από τους τελεστές  $\hat{\rho}_{\mu,A}$  είναι μη αρνητικός (και αυτοσυζυγής) και επιπλέον  $p_{\mu} \geq 0$ , το άθροισμα (II.45) είναι επίσης μη αρνητικός (και αυτοσυζυγής) τελεστής.

Στο απλό παράδειγμα που ήδη εξετάσαμε η διαφοροποίηση της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας αφορούσε την τιμή του  $\text{Tr}(\hat{\rho}_A^R)^2$ . Αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε και στη γενική περίπτωση:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A (\hat{\rho}_A^R)^2 &= \text{Tr}_A \left( \sum_{\mu} p_{\mu} \hat{\rho}_{\mu,A} \right)^2 = \text{Tr}_A \left( \sum_{\mu} p_{\mu}^2 \hat{\rho}_{\mu,A}^2 + 2 \sum_{\mu > \nu} p_{\mu} p_{\nu} \hat{\rho}_{\mu,A} \hat{\rho}_{\nu,A} \right) = \\ &= \sum_{\mu} p_{\mu}^2 + 2 \sum_{\mu > \nu} p_{\mu} p_{\nu} \text{Tr}_A (\hat{\rho}_{\mu,A} \hat{\rho}_{\nu,A}) \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Schwartz μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

$$\text{Tr}_A (\hat{\rho}_{\mu,A} \hat{\rho}_{\nu,A}) = \left| \langle \varphi_{\mu,A} | \varphi_{\nu,A} \rangle \right|^2 \leq \left| \langle \varphi_{\mu,A} | \varphi_{\mu,A} \rangle \right| \left| \langle \varphi_{\nu,A} | \varphi_{\nu,A} \rangle \right| = 1 \quad (\text{II.53})$$

Επομένως:

$$\text{Tr}_A (\hat{\rho}_A^R)^2 \leq \sum_{\mu} p_{\mu}^2 + 2 \sum_{\mu > \nu} p_{\mu} p_{\nu} = \left( \sum_{\mu} p_{\mu} \right)^2 = 1 \quad (\text{II.54})$$



Η ισότητα ισχύει όταν και μόνον όταν ισχύει η ισότητα στην ανισότητα Schwartz. Αυτό συμβαίνει όταν και μόνον όταν τα (κανονικοποιημένα) ανύσματα  $|\varphi_{\mu,A}\rangle$  και  $|\varphi_{\nu,A}\rangle$  διαφέρουν κατά μία φάση (είναι παράλληλα):  $|\varphi_{\mu,A}\rangle = e^{i\theta_\mu} |\psi_A\rangle$ ,  $|\varphi_{\nu,A}\rangle = e^{i\theta_\nu} |\psi_A\rangle$ . Επομένως, η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν  $\hat{\rho}_{\mu,A} = \hat{\rho}_{\nu,A} \quad \forall \mu, \nu$ .

**Συμπερασματικά:** Εάν στο δεξί σκέλος υπάρχει μόνον ένας όρος η μήτρα πυκνότητας είναι καθαρή και  $\text{Tr}_A (\hat{\rho}_A^R)^2 = 1$ . Όταν υπάρχουν περισσότεροι από ένας όροι, η μήτρα πυκνότητας είναι μικτή και  $\text{Tr}_A (\hat{\rho}_A^R)^2 < 1$ .

Στο απλό αρχικό παράδειγμα είδαμε ότι είναι αδύνατον να περιγράψουμε ένα σύστημα A το οποίο είναι εναγκαλισμένο με ένα άλλο σύστημα B, μέσω κάποιας καθαρής κατάστασης  $|\varphi_A\rangle$ . Το συμπέρασμα αυτό είναι γενικό: Εάν κάτι τέτοιο ήταν δυνατόν θα έπρεπε το σύστημα να περιγράφεται από μια καθαρή μήτρα πυκνότητας έτσι ώστε  $\text{Tr}_A (\hat{\rho}_A \hat{M}_A) = \text{Tr}_A (\hat{\rho}_A^R \hat{M}_A)$ . Η μέση τιμή αφορά σε οποιονδήποτε αυτοσυζυγή τελεστή ο οποίος δρα στο χώρο  $H_A$ . Επομένως αφορά και τους  $\hat{\rho}_A$  και  $\hat{\rho}_A^R$ . Άρα:

$$\text{Tr}_A (\hat{\rho}_A^2) = 1 = \text{Tr}_A (\hat{\rho}_A^R \hat{\rho}_A) \text{ και } \text{Tr}_A (\hat{\rho}_A \hat{\rho}_A^R) = \text{Tr}_A (\hat{\rho}_A^R)^2 < 1 \quad (\text{II.55})$$

Προφανώς, αυτό είναι αδύνατον και άρα το υποσύστημα A δεν είναι δυνατόν να περιγραφεί ως άνυσμα ενός χώρου Hilbert. **Μπορεί να περιγραφεί μόνο μέσω μιας μικτής μήτρας πυκνότητας.** Επομένως, η περιγραφή αυτή έχει χάσει τις πληροφορίες οι οποίες είναι ενσωματωμένες στην καθαρή κατάσταση μέσω της **κβαντικής συνοχής**, στις πληροφορίες, δηλαδή, οι οποίες αφορούν μετρήσιμα μεγέθη και εξαρτώνται από τις διαφορές φάσης ανάμεσα στους όρους.

#### **(4) Μη καθαρές συλλογές καταστάσεων.**

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι τα υποσυστήματα ενός σύνθετου συστήματος δεν μπορούν να περιγραφούν μέσω καθαρών καταστάσεων. Υπάρχουν, όμως, πολλές φυσικές διαδικασίες, διαφορετικές μεταξύ τους, η περιγραφή των οποίων, επίσης, δεν μπορεί να στηριχθεί σε καθαρές καταστάσεις. Ως παράδειγμα, θα μπορούσε κανείς να σκεφθεί μια δέσμη ηλεκτρονίων (ή φωτονίων) στην οποία συνυπάρχουν διαφορετικές πολώσεις. Ένα άλλο παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η **μη επιλεκτική μέτρηση** μια μέτρηση, δηλαδή, μετά την οποία δεν διατηρείται μόνο ένα από τα αποτελέσματα που έχουν προκύψει (βλ. Άσκηση II.17) αλλά ένας αριθμός από αυτά.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι υπολογισμοί θα πρέπει να βασισθούν σε μια συλλογή διαφορετικών, εν γένει, καταστάσεων  $|\varphi_\mu\rangle$ ,  $\mu = 1, 2, \dots$  οι οποίες δεν είναι, κατ' ανάγκη, ορθογώνιες μεταξύ τους και κάθε μία από αυτές συμμετέχει με κάποιο συγκεκριμένο

ποσοστό. Θα διαλέξουμε για αυτή την **μη καθαρή συλλογή καταστάσεων** τον συμβολισμό

$$\mathcal{Q} = \left\{ |\varphi_\mu\rangle, p_\mu ; \mu = 1, \dots \mid \sum_\mu p_\mu = 1 \right\} \quad (\text{II.56})$$

Σε ό,τι αφορά τον υπολογισμό πιθανοτήτων και μέσων τιμών θα αντιμετωπίσουμε τη συλλογή (II.56) ως μια τυχαία μεταβλητή τα ενδεχόμενα της οποίας,  $|\varphi_\mu\rangle$ ,

πραγματοποιούνται με πιθανότητα  $p_\mu$ . Σε κάθε ένα από τα ενδεχόμενα  $|\varphi_\mu\rangle$  η μέση τιμή ενός μεγέθους είναι

$$\langle A \rangle_\mu = \langle \varphi_\mu | \hat{A} | \varphi_\mu \rangle = \text{Tr}(\hat{A} | \varphi_\mu \rangle \langle \varphi_\mu |) = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}_\mu) \quad (\text{II.57})$$

Η μέση τιμή, σε όλη τη συλλογή, ορίζεται να είναι η μέση τιμή των μέσων τιμών (II.57):

$$\langle A \rangle = \sum_\mu p_\mu \langle A \rangle_\mu = \text{Tr} \left( \hat{A} \sum_\mu p_\mu \hat{\rho}_\mu \right) \equiv \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}) \quad (\text{II.58})$$

Στην τελευταία σχέση ορίσαμε τον τελεστή πυκνότητας

$$\hat{\rho} = \sum_\mu p_\mu \hat{\rho}_\mu = \sum_\mu p_\mu |\varphi_\mu\rangle \langle \varphi_\mu| \quad (\text{II.59})$$

μέσω του οποίου υπολογίζονται οι μέσες τιμές στη συλλογή (II.56). Με το ίδιο εργαλείο μπορούμε να υπολογίσουμε και τις πιθανότητες να μετρηθεί κάποια από τις ιδιοτιμές του μεγέθους  $A$ :

$$\text{Prob}(a_n) = \sum_\mu p_\mu \text{Prob}(a_n | \mu) \quad (\text{II.60})$$

Στην τελευταία σχέση  $\text{Prob}(a_n | \mu)$  είναι η (δεσμευμένη) πιθανότητα να βρούμε το αποτέλεσμα  $a_n$  εάν κάνουμε μετρήσεις επί της  $|\varphi_\mu\rangle$ :

$$\text{Prob}(a_n | \mu) = \langle \varphi_\mu | \hat{E}_n | \varphi_\mu \rangle = \text{Tr}(\hat{E}_n | \varphi_\mu \rangle \langle \varphi_\mu |) = \text{Tr}(\hat{E}_n \hat{\rho}_\mu) \quad (\text{II.61})$$

Έτσι:

$$\text{Prob}(a_n) = \sum_i p_i \text{Tr}(\hat{E}_n \hat{\rho}_i) = \text{Tr} \left( \hat{E}_n \sum_i p_i \hat{\rho}_i \right) = \text{Tr}(\hat{E}_n \hat{\rho}) \quad (\text{II.62})$$

Η ομοιότητα της περιγραφής μέσω της (II.59) και της (II.50) είναι προφανής. Η μήτρα πυκνότητας (II.59) είναι μια μη καθαρή μήτρα πυκνότητας και έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες που έχει η μήτρα πυκνότητας (II.50). Ακόμα και εάν οι φυσικές διαδικασίες που οδήγησαν στην (II.50) ή την (II.59) μπορούν να είναι πολύ διαφορετικές, οι μήτρες πυκνότητας μέσω των οποίων υπολογίζονται πιθανότητες και μέσες τιμές, μπορούν να είναι ακριβώς οι ίδιες.

Αυτό υπογραμμίζεται πολύ έντονα από το γεγονός ότι μια μη καθαρή μήτρα πυκνότητας μπορεί να αντιπροσωπεύει άπειρα πολλές διαφορετικές συλλογές.

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού θα ξεκινήσουμε από την (II.59). Θα ορίσουμε την μη κανονικοποιημένη κατάσταση  $|\tilde{\phi}_\mu\rangle = \sqrt{p_\mu} |\phi_\mu\rangle$  και θα την ξαναγράψουμε:

$$\hat{\rho} = \sum_{\mu} |\tilde{\phi}_\mu\rangle \langle \tilde{\phi}_\mu| \quad (\text{II.63})$$

Μπορούμε, τώρα, να εκφράσουμε τις καταστάσεις  $|\tilde{\phi}_\mu\rangle$  ως γραμμικό συνδυασμό κάποιων άλλων, διαφορετικών, (μη κανονικοποιημένων) καταστάσεων:

$$|\tilde{\phi}_\mu\rangle = \sum_j U_{\mu j} |\tilde{\psi}_j\rangle \quad (\text{II.64})$$

Οι αριθμοί  $U_{\mu j}$  είναι στοιχεία ενός μοναδιακού πίνακα (όχι κατ' ανάγκη τετραγωνικού). Αντικαθιστώντας την (II.64) στην (II.63) θα βρούμε:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{\mu} \left( \sum_j U_{\mu j} |\tilde{\psi}_j\rangle \right) \left( \sum_k \langle \tilde{\psi}_k | U_{\mu k}^* \right) = \sum_{j,k} |\tilde{\psi}_j\rangle \langle \tilde{\psi}_k | \sum_{\mu} (\hat{U}^\dagger)_{k\mu} (\hat{U})_{\mu j} = \\ &= \sum_{j,k} |\tilde{\psi}_j\rangle \langle \tilde{\psi}_k | \delta_{k,j} = \sum_j |\tilde{\psi}_j\rangle \langle \tilde{\psi}_j| \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

Το τελευταίο βήμα είναι η εισαγωγή των κανονικοποιημένων καταστάσεων:

$$|\tilde{\psi}_j\rangle = \sqrt{\lambda_j} |\psi_j\rangle, \quad \lambda_j = \langle \tilde{\psi}_j | \tilde{\psi}_j \rangle \geq 0 \quad (\text{II.66})$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_j \lambda_j &= \sum_j \langle \tilde{\psi}_j | \tilde{\psi}_j \rangle = \sum_j \left( \sum_{\mu} \langle \tilde{\phi}_\mu | U_{\mu j} \right) \left( \sum_{\nu} U_{\nu j}^* \langle \tilde{\phi}_\nu | \right) = \\ &= \sum_{\mu,\nu} \langle \tilde{\phi}_\mu | \tilde{\phi}_\nu \rangle \sum_j (\hat{U})_{\mu j} (\hat{U}^\dagger)_{j\nu} = \sum_{\mu,\nu} \langle \tilde{\phi}_\mu | \tilde{\phi}_\nu \rangle \delta_{\mu,\nu} = \sum_{\mu} \langle \tilde{\phi}_\mu | \tilde{\phi}_\mu \rangle = \sum_{\mu} p_\mu = 1 \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

Επομένως:

$$\hat{\rho} = \sum_j \lambda_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \quad (\text{II.68})$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύει ότι μια μη καθαρή μήτρα πυκνότητας μπορεί να γραφεί με άπειρους τρόπους, διαφορετικούς μεταξύ τους, ως άθροισμα καθαρών καταστάσεων. Αν μάλιστα συγκριθεί με την (II.50), αποδεικνύει, επίσης, ότι εάν το μόνο στοιχείο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι η μήτρα πυκνότητας  $\hat{\rho}$ , είναι αδύνατον να γνωρίζουμε τη φυσική διαδικασία που την προετοίμασε.

Όποια και αν είναι η προέλευση της μη καθαρής μήτρας πυκνότητας είτε, δηλαδή, περιγράφει ένα σύστημα το οποίο είναι εναγκαλισμένο με ένα δεύτερο σύστημα είτε περιγράφει ένα μίγμα καταστάσεων **πάντα** μπορούμε να θεωρήσουμε ότι προέρχεται από ένα διμερές απομονωμένο σύστημα στο οποίο υπάρχει εναγκαλισμός. Αυτό είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος των Hughston, Jozsa, Wootters (HJW theorem) [15] και αναφέρεται ως **purification**. Υπό την έννοια αυτή, τα συστήματα τα οποία περιγράφονται από μη καθαρές συλλογές θα τα αναφέρουμε ως **ανοικτά συστήματα**.

Μπορούμε να σκιαγραφήσουμε το θεώρημα παίρνοντας δύο διαφορετικές υλοποιήσεις της ίδιας μήτρας πυκνότητας:

$$\hat{\rho} = \sum_{\mu=1}^{N_1} p_{\mu} |\varphi_{\mu}\rangle\langle\varphi_{\mu}| = \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \quad (\text{II.69})$$

Έστω ένα διμερές σύστημα,  $H_{AB} = H_A \otimes H_B$  με  $\dim H_B \geq \max(N_1, N_2)$ . Δύο εναγκαλισμένες καταστάσεις του συστήματος αυτού είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} |\Phi_{AB}\rangle &= \sum_{\mu} \sqrt{p_{\mu}} |\varphi_{\mu,A}\rangle |\alpha_{\mu,B}\rangle : p_{\mu} \geq 0, \sum_{\mu} p_{\mu} = 1 \\ |\Psi_{AB}\rangle &= \sum_j \sqrt{\lambda_j} |\psi_{j,A}\rangle |\beta_{j,B}\rangle : \lambda_j \geq 0, \sum_j \lambda_j = 1 \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

Στις προηγούμενες εκφράσεις οι καταστάσεις  $|\varphi_{\mu,A}\rangle, |\psi_{\nu,A}\rangle$  είναι κανονικοποιημένες καταστάσεις του συστήματος A όχι κατ' ανάγκη ορθογώνιες μεταξύ τους. Οι καταστάσεις  $|\alpha_{\mu,B}\rangle, |\beta_{j,B}\rangle$  είναι ορθοκανονικές καταστάσεις του συστήματος B

$$\langle\alpha_{\mu,B}|\alpha_{\nu,B}\rangle = \delta_{\mu,\nu}, \quad \langle\beta_{j,B}|\beta_{k,B}\rangle = \delta_{j,k} \quad (\text{II.71})$$

χωρίς, κατ' ανάγκη, τα σύνολα  $\{|\alpha_{\mu,B}\rangle, \mu = 1, 2, \dots, M\}, \{|\beta_{j,B}\rangle, j = 1, 2, \dots, N\}$  να αποτελούν πλήρεις βάσεις (μπορούν να αποτελούν μέρος τους). Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι οι καταστάσεις (II.70) συνδέονται με κάποιον μοναδιακό μετασχηματισμό,  $|\Phi_{AB}\rangle = \hat{V}_B |\Psi_{AB}\rangle$ .

Έστω, τώρα, ότι στην κατάσταση  $|\Phi_{AB}\rangle$  κάνουμε μη επιλεκτική μέτρηση του μεγέθους οι ιδιοκαταστάσεις του οποίου απαρτίζουν τη βάση  $\{|\alpha_{\mu,B}\rangle, \mu = 1, \dots, \dim H_B\}$ . Η μέτρηση αυτή είναι μη επιλεκτική διότι δεν θα επιλέξουμε κάποιο από τα αποτελέσματα αλλά θα κρατήσουμε  $N_1$  από αυτά. Η πιθανότητα εμφάνισης κάθε ενός είναι  $\langle\Phi_{AB}|\alpha_{\mu,B}\rangle\langle\alpha_{\mu,B}|\Phi_{AB}\rangle = p_{\mu}$  ενώ, μετά τη μέτρηση, η κατάσταση θα έχει καταρρεύσει στην  $|\varphi_{\mu,A}\rangle$ . Με τον τρόπο αυτό θα φτιάξουμε την μη καθαρή συλλογή

$\mathcal{Q}_1 = \{|\varphi_{\mu,A}\rangle, p_{\mu} | \mu = 1, \dots, N_1\}$  η οποία αντιπροσωπεύεται από την μήτρα πυκνότητας

$\sum_{\mu=1}^{N_1} p_{\mu} |\varphi_{\mu}\rangle\langle\varphi_{\mu}|$ . Αντίστοιχα, αν στην κατάσταση  $|\Psi_{AB}\rangle$  κάνουμε μετρήσεις του μεγέθους οι ιδιοκαταστάσεις του οποίου απαρτίζουν τη βάση  $\{|\beta_{j,B}\rangle, j=1, \dots, \dim H_B\}$  θα καταλήξουμε στη συλλογή  $\mathcal{Q}_2 = \{|\psi_{j,A}\rangle, \lambda_j | j=1, \dots, N_2\}$  και τη μήτρα πυκνότητας  $\sum_{j=1}^{N_2} \lambda_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ .

**Συνοψίζοντας:** Κάθε μία από τις άπειρες δυνατές υλοποιήσεις μιας μη καθαρής μήτρας πυκνότητας, η οποία αναφέρεται σε κάποιο σύστημα A, μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από μη επιλεκτικές μετρήσεις μεγεθών τα οποία αφορούν σε κάποιο σύστημα B με το οποίο το A είναι εναγκαλισμένο. Μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι:

$$\hat{\rho}_A^R = \begin{cases} \text{Tr}_B |\Phi_{AB}\rangle\langle\Phi_{AB}| = \sum_{\mu} p_{\mu} |\varphi_{\mu,A}\rangle\langle\varphi_{\mu,A}| \\ \text{Tr}_B |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| = \sum_j \lambda_j |\psi_{j,A}\rangle\langle\psi_{j,A}| \end{cases} \quad (\text{II.72})$$

Οι τελευταίες σχέσεις δείχνουν ότι η μαθηματική λειτουργία του μερικού ίχνους ως προς τους βαθμούς ελευθερίας ενός συστήματος, είναι ισοδύναμη με μη επιλεκτική μέτρηση μεγεθών του εν λόγω συστήματος.

Σε οποιαδήποτε περίπτωση, η περιγραφή μέσω μιας μη καθαρής συλλογής σηματοδοτεί την απώλεια πληροφοριών οι οποίες θα ήταν διαθέσιμες στην περιγραφή μέσω μιας καθαρής συλλογής. Οι πληροφορίες αυτές είναι εγκλωπωμένες στην κβαντική συνοχή (coherence) η οποία χαρακτηρίζει τις καθарές καταστάσεις. Η προηγούμενη ανάλυση δείχνει ότι αυτή η απώλεια της συνοχής (**decoherence**) και η συνακόλουθη απώλεια πληροφορίας, μπορεί πάντα να αποδοθεί στον εναγκαλισμό (**entanglement**) του υπό περιγραφή συστήματος με κάποιο άλλο σύστημα. Όπως φαίνεται και από τις εκφράσεις (II.70) αλλά και από την (II.26), το δεύτερο σύστημα λειτουργεί ως μηχανισμός μέσω του οποίου είναι δυνατόν να προσδιορισθεί η κατάσταση του πρώτου. Για παράδειγμα, στην κατάσταση (II.26)

$$|\chi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2_A, -1/2_B\rangle - |-1/2_A, 1/2_B\rangle)$$

μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατάσταση του ηλεκτρονίου A κάνοντας μέτρηση του ηλεκτρονίου B. Αυτή η δυνατότητα πηγάζει από τον εναγκαλισμό των δύο σωματιδίων και έχει ως επακόλουθο την απώλεια των κβαντικών χαρακτηριστικών του A. Για σύγκριση, μπορούμε να αναφερθούμε στο πείραμα των δύο σπών όπου η δυνατότητα προσδιορισμού της σπής από την οποία διήλθε το σωματίο, καταστρέφει την κβαντική επαλληλία η οποία είναι υπεύθυνη για την εικόνα των «κροσσών συμβολής».

#### (4α) Σφαίρα Bloch και μικτές καταστάσεις.

Στην περίπτωση των καταστάσεων, οι οποίες ορίζονται σε δισδιάστατο χώρο Hilbert, είδαμε ότι η σφαίρα Bloch προσφέρει μια απλή και χρήσιμη γεωμετρική απεικόνιση των αντίστοιχων μητρών πυκνότητας μέσω της σχέσης (II.20). Στην περίπτωση των καθαρών καταστάσεων το άνυσμα Bloch ορίζει μια μοναδιαία διεύθυνση και απεικονίζει την κατάσταση στα σημεία της δισδιάστατης επιφάνειας μιας τρισδιάστατης σφαίρας. Αν η μήτρα πυκνότητας δεν είναι καθαρή μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι:

$$\hat{\rho} \doteq \frac{1}{2}(\hat{I} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \rightarrow \text{Tr} \hat{\rho}^2 = \frac{1}{4} \text{Tr}(\hat{I} + 2\vec{p} \cdot \vec{\sigma} + |\vec{p}|^2 \hat{I}) = \frac{1}{2}(1 + |\vec{p}|^2) < 1 \quad (\text{II.73})$$

$$\rightarrow |\vec{p}|^2 < 1$$

Επομένως, οι μη καθαρές μήτρες πυκνότητας απεικονίζονται στο εσωτερικό της σφαίρας Bloch. Στο κέντρο της σφαίρας,  $|\vec{p}| = 0 \rightarrow \hat{\rho} = \hat{I}/2$ , η απώλεια των πληροφοριών που συνεπάγεται η περιγραφή μέσω μιας μη καθαρής μήτρας πυκνότητας, γίνεται η μέγιστη δυνατή αφού όλα τα ενδεχόμενα είναι εξίσου πιθανά:  $\text{Prob}(a) = \text{Tr} \hat{\rho} \hat{E}_a = 1/2$ .

Αυτή η απλή εικόνα, στην οποία στο κέντρο της σφαίρας Bloch έχουμε τη μέγιστη απώλεια πληροφορίας και στην επιφάνεια μηδενική, είναι στενά συνδεδεμένη με το γεγονός ότι ο χώρος Hilbert του συστήματος που μας ενδιαφέρει είναι δισδιάστατος. Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε εάν κάνουμε μια απλή σκέψη: Για να προσδιορίσουμε πλήρως μια κανονικοποιημένη κατάσταση  $|\psi\rangle$  η οποία ορίζεται σε χώρο Hilbert  $D$  διαστάσεων, χρειαζόμαστε  $2(D-1)$  πραγματικές παραμέτρους (τα μέτρα των συντελεστών εκτός από ένα και όλες τις φάσεις τους εκτός από μία). Από την άλλη μεριά, οι μήτρες πυκνότητας ορίζονται σε χώρο διάστασης  $D^2 - 1$  (λόγω του ίχνους που είναι μονάδα). Η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας στον χώρο αυτό έχει διάσταση  $D^2 - 2$ . Είναι προφανές ότι μόνο για  $D = 2$ , όλα τα σημεία της επιφάνειας μπορούν να αντιστοιχηθούν σε καθαρές καταστάσεις. Για  $D \geq 3$  υπάρχουν σημεία της επιφάνειας τα οποία δεν αντιστοιχούν σε καθαρές καταστάσεις.

Η γεωμετρία των μικτών καταστάσεων βασίζεται στο γεγονός ότι για κάθε δύο μήτρες πυκνότητας  $\hat{\rho}_1$  και  $\hat{\rho}_2$  ο συνδυασμός

$$\hat{\rho}(\lambda) = \lambda \hat{\rho}_1 + (1-\lambda) \hat{\rho}_2 \quad , \quad \forall \lambda: 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (\text{II.74})$$

είναι επίσης μήτρα πυκνότητας η οποία, για  $\lambda \neq 0, 1$  είναι, αναγκαστικά, μη καθαρή. Μπορούμε, καταρχήν, να δούμε ότι:

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2(\lambda) = \lambda^2 \text{Tr} \hat{\rho}_1^2 + (1-\lambda)^2 \text{Tr} \hat{\rho}_2^2 + 2\lambda(1-\lambda) \text{Tr} \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 \leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) \text{Tr} \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 \quad (\text{II.75})$$

Εάν υποθέσουμε ότι  $\hat{\rho}_1 \neq \hat{\rho}_2$  και ότι ο τελεστής  $\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2$  είναι θετικός, είναι προφανές ότι  $\text{Tr}(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2) > \text{Tr} \hat{\rho}_2^2 \geq 1$  και επομένως, όταν  $\lambda \neq 0, 1$

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2(\lambda) < 1 \quad (\text{II.76})$$

Η σχέση (II.74) δηλώνει ότι το σύνολο των μητρών πυκνότητας είναι **κυρτό (convex) υποσύνολο** του  $(D^2 - 1)$ -διάστατου συνόλου των  $D \times D$  αυτοσυζυγών τελεστών με ίχνος μονάδα. (Κυρτό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο το οποίο περιέχει την ευθεία η οποία ενώνει δύο οποιαδήποτε στοιχεία του). Όλα τα στοιχεία του συνόλου αυτού τα οποία μπορούν να ενωθούν με ευθεία (για τα οποία, δηλαδή, ισχύει η (II.74)) αντιπροσωπεύουν **μη καθαρές μήτρες** πυκνότητας. Τα σημεία για τα οποία αυτό δεν είναι δυνατόν, λέγονται **ακραία (extremal)** και αντιπροσωπεύουν **καθαρές μήτρες** πυκνότητας. Η περίπτωση  $D = 2$  είναι ιδιαίτερη περίπτωση στην οποία τα ακραία σημεία, και μόνον αυτά, βρίσκονται στην δισδιάστατη επιφάνεια μια τρισδιάστατης σφαίρας (της σφαίρας Bloch).

### **(5) Γενικευμένες Μετρήσεις.**

Στην πρώτη ενότητα είδαμε ότι οι μετρήσεις σε ένα απομονωμένο σύστημα αφορούν φυσικά μεγέθη τα οποία αντιπροσωπεύονται από αυτοσυζυγείς τελεστές οι οποίοι δρουν στον χώρο Hilbert του συστήματος. Το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι κάποια από τις ιδιοτιμές του ενώ, αμέσως μετά την μέτρηση, το σύστημα περιγράφεται από την αντίστοιχη ιδιοκατάσταση. Οι μετρήσεις αυτές ονομάζονται ορθογώνιες διότι οδηγούν σε αμοιβαίως αποκλειόμενα αποτελέσματα. Μαθηματικά εκφράζονται μέσω των προβολικών τελεστών που αντιστοιχούν στις ιδιοκαταστάσεις του μεγέθους που μετράται και είναι επαναλήψιμες.

Με τον όρο **γενικευμένες μετρήσεις**, αναφερόμαστε σε μετρήσεις επί ενός συστήματος οι οποίες δεν οδηγούν, κατ' ανάγκη, σε ορθογώνια αποτελέσματα, δεν εκφράζονται μέσω προβολικών τελεστών ούτε είναι, εν γένει, επαναλήψιμες. Οι μετρήσεις αυτές μπορούν **πάντα** να γίνουν κατανοητές με τον ακόλουθο τρόπο: Το προς μέτρηση σύστημα A έρχεται σε επαφή με ένα δεύτερο σύστημα B με το οποίο οδηγείται σε εναγκαλισμό. Στη συνέχεια, γίνονται ορθογώνιες μετρήσεις επί του B (μετρούνται, δηλαδή, φυσικά μεγέθη τα οποία αναφέρονται στο B). Το αποτέλεσμα αυτής της μέτρησης ορίζει **γενικευμένη μέτρηση επί του A**.

Για να γίνουμε συγκεκριμένοι, ας θεωρήσουμε ότι το σύστημα A βρίσκεται στην (καθαρή) κατάσταση  $|\varphi_A\rangle \in H_A$  και το σύστημα B στην κατάσταση  $|\psi_B\rangle \in H_B$  ( $\dim H_B \geq \dim H_A$ ). Μέσω ενός μοναδιακού μετασχηματισμού τα δύο συστήματα συνδέονται:

$$\hat{U}_{AB}(|\varphi_A\rangle|\psi_B\rangle) = |\chi_{AB}\rangle \quad (\text{II.77})$$

Στην κατάσταση  $|\chi_{AB}\rangle$  τα δύο συστήματα είναι πλέον, εναγκαλισμένα. Η διαδικασία ξεκινάει με την (ορθογώνια) μέτρηση στο σύστημα B κάποιου μεγέθους οι ιδιοκαταστάσεις του οποίου,  $\{|\mu_B\rangle; \mu=1, \dots, D_B\}$ , αποτελούν βάση στον χώρο  $H_B$ . Για να αναλύσουμε το πρόβλημα είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τους τελεστές Kraus (I.76) και να γράψουμε:

$$|\chi_{AB}\rangle = \sum_{\mu} |\mu_B\rangle \langle \mu_B | \hat{U}_{AB} | \varphi_B \rangle |\psi_A\rangle = \sum_{\mu} |\mu_B\rangle \hat{M}_{\mu}^A |\psi_A\rangle \quad (\text{II.78})$$

Η πιθανότητα στην μέτρηση να προκύψει η τιμή  $\mu$  είναι:

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\mu_B) &= \text{Tr}_{AB}(\hat{\rho}_{AB} |\mu_B\rangle \langle \mu_B|) = \text{Tr}_A(\hat{M}_{\mu}^A |\psi_A\rangle \langle \psi_A| \hat{M}_{\mu}^{A\dagger}) = \\ &= \text{Tr}_A(\hat{M}_{\mu}^A \hat{\rho}_A \hat{M}_{\mu}^{A\dagger}) = \text{Tr}_A(\hat{\rho}_A \hat{M}_{\mu}^{A\dagger} \hat{M}_{\mu}^A) \equiv \text{Tr}_A(\hat{\rho}_A \hat{F}_{\mu}^A) \end{aligned} \quad (\text{II.79})$$

Στην τελευταία σχέση και γράψαμε  $\hat{\rho}_A = |\psi_A\rangle \langle \psi_A|$  και ορίσαμε τους τελεστές

$$\hat{F}_{\mu}^A \equiv \hat{M}_{\mu}^{A\dagger} \hat{M}_{\mu}^A \quad (\text{II.80})$$

Οι τελεστές αυτοί μοιράζονται κοινές ιδιότητες με τους προβολικούς τελεστές (I.24), (I.25) οι οποίοι περιγράφουν τις ορθογώνιες μετρήσεις (βλ. Εξ (II.2)):

$$\sum_{\mu} \hat{F}_{\mu}^A = \hat{I}_{D_A \times D_A}, \quad \hat{F}_{\mu}^{A\dagger} = \hat{F}_{\mu}^A, \quad \hat{F}_{\mu}^A \geq 0 \quad (\text{II.81})$$

Εν τούτοις, δεν είναι προβολικοί τελεστές αφού:

$$\hat{F}_{\mu}^A \hat{F}_{\nu}^A \neq \delta_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu}^A \quad (\text{II.82})$$

Οι τελεστές (II.80) είναι γνωστοί με ως POVM (Positive Operator Valued Measure) και είναι η μαθηματική έκφραση της γενικευμένης μέτρησης όπως οι προβολικοί τελεστές είναι η μαθηματική έκφραση των ορθογώνιων μετρήσεων. Εδώ θα τους ονομάζουμε τελεστές γενικευμένης μέτρησης. Όπως φαίνεται από την τελευταία σχέση οι γενικευμένες μετρήσεις, αντίθετα με τις ορθογώνιες, δεν μπορούν να επαναληφθούν.

Μετά την μέτρηση, η κατάσταση του σύνθετου συστήματος θα καταρρεύσει στη διμερή κατάσταση  $\sim |\mu_B\rangle \langle \mu_B | \chi_{AB}\rangle$  στην οποία το σύστημα A βρίσκεται στην κατάσταση  $|\psi'_{\mu,A}\rangle \sim \langle \mu_B | \chi_{AB}\rangle$ . Όπως φαίνεται από την (II.78) η κανονικοποιημένη κατάσταση του συστήματος A, αμέσως μετά τη μέτρηση επί του συστήματος B, είναι:

$$|\psi_A\rangle \xrightarrow{\text{Γενικευμένη μέτρηση}} |\psi'_{\mu,A}\rangle = \frac{\langle \mu_B | \chi_{AB}\rangle}{\|\langle \mu_B | \chi_{AB}\rangle\|} = \frac{\hat{M}_{\mu}^A |\psi_A\rangle}{\sqrt{\langle \psi_A | \hat{F}_{\mu}^A | \psi_A\rangle}} \quad (\text{II.83})$$



Ή, σε ότι αφορά την μήτρα πυκνότητας:

$$\hat{\rho}_A \xrightarrow[\text{Γενικευμένη μέτρηση}]{} \hat{\rho}'_{\mu,A} = \frac{\hat{M}_\mu^A \hat{\rho}_A \hat{M}_\mu^{A\dagger}}{\text{Tr}_A(\hat{\rho}_A \hat{F}_\mu^A)} \quad (\text{II.84})$$

Εάν η μέτρηση του B δεν είναι επιλεκτική, η κατάσταση του A, μετά την μέτρηση, θα περιγράφεται από μια μη καθαρή μήτρα πυκνότητας:

$$\hat{\rho}_A \xrightarrow[\text{Μη επιλεκτική γενικευμένη μέτρηση}]{} \sum_\mu \text{Prob}(\mu_B) \hat{\rho}'_{\mu,A} = \sum_\mu \hat{M}_\mu^A \hat{\rho}_A \hat{M}_\mu^{A\dagger} \quad (\text{II.85})$$

Το αποτέλεσμα (II.83) ή (II.84) δείχνει ότι η γενικευμένη μέτρηση τροποποιεί την κατάσταση του συστήματος με τρόπο διαφορετικό από αυτόν της ορθογώνιας μέτρησης αφού οι προκύπτουσες καταστάσεις δεν είναι ορθογώνιες,  $\langle \psi_A | \hat{M}_\nu^{A\dagger} \hat{M}_\mu^A | \psi_A \rangle \neq 0$ ,

και, επομένως, δεν αποτελούν ιδιοκαταστάσεις κάποιου μεγέθους. Η γενικευμένη μέτρηση, όπως και η ορθογώνια, είναι **μη αντιστρεπτή διαδικασία**: Κάθε μία από τις καταστάσεις  $|\psi'_{\mu,A}\rangle$  μπορεί να προκύψει από κάποια ορθογώνια μέτρηση επί του A.

Ακόμη περισσότερο, τα συστήματα B με τα οποία μπορεί να συνδεθεί το A είναι άπειρα. Σε κάθε ένα από αυτά μπορεί να γίνει μια μέτρηση η οποία να στο αποτέλεσμα (II.83).

Ένα απλό παράδειγμα θα βοηθήσει να καταλάβουμε τη σημασία των προηγούμενων.

Έστω ότι  $|\psi_A\rangle = |1/2_{z,A}\rangle$ ,  $|\varphi_B\rangle = |-1/2_{z,B}\rangle$  και ότι:

$$\hat{U}_{AB}(|1/2_{z,A}\rangle| -1/2_{z,B}\rangle) = a|1/2_{z,A}, -1/2_{z,B}\rangle + b|-1/2_{z,A}, 1/2_{z,B}\rangle \quad (\text{II.86})$$

Ας πούμε ότι θέλουμε να μετρήσουμε την προβολή του σπιν του B στη διεύθυνση z. Οι αντίστοιχοι τελεστές Kraus είναι:

$$\hat{M}_0^A = \langle -1/2_B | \hat{U}_{AB} | -1/2_B \rangle, \quad \hat{M}_1^A = \langle 1/2_B | \hat{U}_{AB} | -1/2_B \rangle \quad (\text{II.87})$$

Αν ξαναγράψουμε την (II.86) ως

$$\begin{aligned} \hat{U}_{AB}(|1/2_{z,A}\rangle| -1/2_{z,B}\rangle) &= |-1/2_{z,B}\rangle a|1/2_{z,A}\rangle + |1/2_{z,B}\rangle b\hat{\sigma}_A^x|1/2_{z,A}\rangle = \\ &= (|-1/2_{z,B}\rangle \hat{M}_0^A + |1/2_{z,B}\rangle \hat{M}_1^A) |1/2_{z,A}\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.88})$$

θα βρούμε:

$$\hat{M}_0^A = a\hat{I}, \quad \hat{M}_1^A = b\hat{\sigma}_A^x \quad (\text{II.89})$$

Σύμφωνα με την (II.79) η πιθανότητα να προκύψει  $\pm\hbar/2$  στη μέτρηση του σπιν του σωματίου B (στη διεύθυνση z) είναι  $|b|^2$  και  $|a|^2$  αντίστοιχα. Μετά την μέτρηση, η

κατάσταση του σωματίου A είναι, σύμφωνα με την (II.83),  $|\pm 1/2_{z,A}\rangle$ . Ακόμα και σε αυτό το πολύ απλό παράδειγμα, είναι εμφανής η σημασία της γενικευμένης μέτρησης η οποία μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για το σύστημα A μέσω μετρήσεων σε ένα άλλο σύστημα. Εντούτοις, το συγκεκριμένο αποτέλεσμα θα μπορούσε να προκύψει και από ορθογώνια μέτρηση επί του A. Για να διαπιστώσουμε τον γενικότερο χαρακτήρα της μέτρησης για την οποία συζητάμε, μπορούμε να κάνουμε μέτρηση του σπιν του B στη διεύθυνση  $x$ . Οι τελεστές Kraus που θα χρησιμοποιήσουμε τώρα, είναι διαφορετικοί και, προφανώς, συνδέονται με τους προηγούμενους μέσω ενός μοναδιακού μετασχηματισμού:

$$\begin{pmatrix} \hat{M}_+^A \\ \hat{M}_-^A \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{M}_1^A \\ \hat{M}_0^A \end{pmatrix} \rightarrow \hat{M}_\pm^A = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{M}_1^A \pm \hat{M}_0^A) \quad (\text{II.90})$$

Τα αποτελέσματα  $\pm \hbar/2$  είναι, τώρα, ισοπίθανα

$$\text{Prob}(\pm 1/2_{x,B}) = \text{Tr}_A (\hat{\rho}_A \hat{M}_\pm^{A\dagger} \hat{M}_\pm^A) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{Tr}_A (\hat{\rho}_A (1 + 2|ab| \cos(\theta_b - \theta_a) \hat{\sigma}_A^x)) \\ \frac{1}{2} \text{Tr}_A (\hat{\rho}_A (1 + 2|ab| \sin(\theta_b - \theta_a) \hat{\sigma}_A^x)) \end{cases} = \frac{1}{2} \quad (\text{II.91})$$

Μετά την μέτρηση η κατάσταση του συστήματος A είναι:

$$|\psi_{\pm,A}\rangle = \frac{\hat{M}_\pm^A |\psi_A\rangle}{\|\hat{M}_\pm^A |\psi_A\rangle\|} = a |1/2_{z,A}\rangle \pm b |-1/2_{z,A}\rangle \quad (\text{II.92})$$

Για  $a \neq b$ , οι καταστάσεις (II.92) δεν είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και, επομένως, δεν είναι δυνατόν να προκύψουν από ορθογώνια μέτρηση επί του A. Οι καταστάσεις  $|\psi_{\pm,A}\rangle$  δεν είναι ιδιοκαταστάσεις του ίδιου τελεστή (ή κάποιου με τον οποίο αυτός μετατίθεται) και δεν αντιπροσωπεύουν αμοιβαίως αποκλειόμενα γεγονότα. Είναι ιδιοκαταστάσεις διαφορετικών τελεστών που αφορούν στο A και οι οποίοι δεν μετατίθενται. Αν βασιστούμε στην (II.82) μπορούμε να ελέγξουμε ότι η γενικευμένη μέτρηση η οποία οδήγησε στο αποτέλεσμα (II.92) δεν είναι επαναλήψιμη:

$$\hat{M}_\pm^A |\psi_{\pm,A}\rangle \sim (\hat{M}_\pm^A)^2 |\psi_A\rangle \neq |\psi_{\pm,A}\rangle \quad (\text{II.93})$$

Πριν κλείσουμε την παράγραφο χρειάζονται κάποια σχόλια. Στην προηγούμενη συζήτηση οι τελεστές γενικευμένης μέτρησης (II.80) ορίστηκαν μέσω μετρήσεων που αφορούσαν ένα σύστημα διαφορετικό από το A. Ως μαθηματικά αντικείμενα, όμως, μπορούν να ορισθούν μέσω των ιδιοτήτων τους (II.81), (II.82) χωρίς αναφορά σε ένα άλλο σύστημα. Στην περίπτωση αυτή, αντιπροσωπεύουν διαφορετικές φυσικές διαδικασίες (βλ. Άσκηση ...). Παρά την παρατήρηση αυτή, η ανάλυση που κάναμε δεν είναι καθόλου περιοριστική αφού υπάρχει το θεώρημα Naimark το οποίο βεβαιώνει ότι

ένα σύνολο POVM τελεστών μπορεί πάντα να παραχθεί μέσω ορθογώνιων μετρήσεων σε ένα διαφορετικό σύστημα το οποίο είναι εναγκαλισμένο με το υπό μέτρηση σύστημα.

### (5α) Διαχωρισμός καταστάσεων.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να αποδείξουμε κάτι το οποίο είναι πολύ σημαντικό για την κατανόηση των μικτών καταστάσεων: **Είναι αδύνατον, με μια μέτρηση, να διακρίνουμε δύο διαφορετικές καταστάσεις  $|\varphi\rangle$  και  $|\psi\rangle$  οι οποίες δεν είναι ορθογώνιες μεταξύ τους  $\langle\varphi|\psi\rangle \neq 0$ .**

Για να το αποδείξουμε, θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν τελεστές μέτρησης

$$\sum_{\mu} \hat{F}_{\mu} = \hat{I} \quad , \quad \hat{F}_{\mu} \geq 0 \quad (\text{II.94})$$

τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\alpha) &= \langle\varphi|\hat{F}_{\alpha}|\varphi\rangle = 1 \quad , \quad \text{Prob}(\beta) = \langle\varphi|\hat{F}_{\beta}|\varphi\rangle = 0 \\ \text{Prob}(\beta) &= \langle\psi|\hat{F}_{\beta}|\psi\rangle = 1 \quad , \quad \text{Prob}(\alpha) = \langle\psi|\hat{F}_{\alpha}|\psi\rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

Οι τελεστές (II.94) περιλαμβάνουν τόσο τους προβολικούς όσο και του τελεστές γενικευμένης μέτρησης. Οι σχέσεις (II.95) υποθέτουν ότι υπάρχει μέτρηση τέτοια ώστε είναι δυνατόν να αποφανθούμε, μετά βεβαιότητας, ποια κατάσταση είναι ποια. Εάν οι τελεστές (II.94) είναι προβολικοί το ζητούμενο μπορεί να δειχθεί αμέσως:

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\hat{F}_{\alpha}|\varphi\rangle &= \langle\varphi|\alpha\rangle\langle\alpha|\varphi\rangle = |\langle\alpha|\varphi\rangle|^2 \rightarrow |\varphi\rangle \sim |\alpha\rangle \\ \langle\psi|\hat{F}_{\beta}|\psi\rangle &= \langle\psi|\beta\rangle\langle\beta|\psi\rangle = |\langle\beta|\psi\rangle|^2 \rightarrow |\psi\rangle \sim |\beta\rangle \end{aligned} \rightarrow |\langle\varphi|\psi\rangle| = 0 \rightarrow \text{άτοπο} \quad (\text{II.96})$$

Για την περίπτωση των τελεστών γενικευμένης μέτρησης, θα γράψουμε (βλ. Άσκηση I.2):

$$|\varphi\rangle = \lambda|\psi\rangle + \mu|\psi^{\perp}\rangle \quad , \quad |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1 \quad (\text{II.97})$$

Αν συνδυάσουμε την τελευταία με την (II.95) βρίσκουμε:

$$\langle\varphi|\hat{F}_{\alpha}|\varphi\rangle = |\lambda|^2 \langle\psi|\hat{F}_{\alpha}|\psi\rangle + |\mu|^2 \langle\psi^{\perp}|\hat{F}_{\alpha}|\psi^{\perp}\rangle + \lambda^* \mu \langle\psi|\hat{F}_{\alpha}|\psi^{\perp}\rangle + \lambda \mu^* \langle\psi^{\perp}|\hat{F}_{\alpha}|\psi\rangle = 1 \quad (\text{II.98})$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\langle\psi|\hat{F}_{\alpha}|\psi\rangle = 0$  και ότι  $\hat{F}_{\alpha} = \hat{M}_{\alpha}^{\dagger} \hat{M}_{\alpha}$  βλέπουμε ότι  $\hat{M}_{\alpha}|\psi\rangle = 0$  ,  $\langle\psi|\hat{M}_{\alpha}^{\dagger} = 0$  και επομένως η (II.98) καταλήγει στην

$$|\mu|^2 \langle\psi^{\perp}|\hat{F}_{\alpha}|\psi^{\perp}\rangle = 1 \quad (\text{II.99})$$

Μπορούμε τώρα να παρατηρήσουμε ότι:

$$\begin{aligned}\langle \psi^\perp | \psi^\perp \rangle &= 1 = \sum_{\mu} \langle \psi^\perp | \hat{F}_{\mu} | \psi^\perp \rangle = \langle \psi^\perp | \hat{F}_{\alpha} | \psi^\perp \rangle + \sum_{\mu \neq \alpha} \langle \psi^\perp | \hat{F}_{\mu} | \psi^\perp \rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \langle \psi^\perp | \hat{F}_{\alpha} | \psi^\perp \rangle = 1 - \sum_{\mu \neq \alpha} \langle \psi^\perp | \hat{F}_{\mu} | \psi^\perp \rangle \leq 1\end{aligned}\quad (\text{II.100})$$

Εάν λάβουμε υπόψη την τελευταία, συμπεραίνουμε ότι για να ισχύει η (II.99) θα πρέπει

$$|\mu| \geq 1 \quad (\text{II.101})$$

Από την (II.97) διαπιστώνουμε ότι αυτό είναι αδύνατον εκτός και εάν  $\lambda = 0$  ή, ισοδύναμα, εάν  $\langle \psi | \varphi \rangle = 0$ .

Στην προηγούμενη ανάλυση οφείλεται το γεγονός ότι η **μη καθαρή συλλογή καταστάσεων** (II.56) **δεν είναι κλασική**. Ο λόγος είναι ότι μια κλασική στατιστική συλλογή, απαρτίζεται από τα ενδεχόμενα μιας κλασικής τυχαίας μεταβλητής τα οποία είναι, εξ' ορισμού, διακριτά. Όπως, όμως, αποδείξαμε τα στοιχεία μιας μη καθαρής συλλογής καταστάσεων, εν γένει, δεν είναι.

### **(5β) Απόσταση καταστάσεων**

Η δυνατότητα διάκρισης δύο καθαρών καταστάσεων μπορεί να ποσοτικοποιηθεί μέσω της επικάλυψης τους (**overlap**)  $|\langle \psi | \varphi \rangle|^2$  η οποία ονομάζεται **πιστότητα (fidelity)**.

Γενικότερα, η πιστότητα για δύο καταστάσεις (καθαρές ή μικτές) οι οποίες περιγράφονται από τις  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\sigma}$  ορίζεται ως:

$$F(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \left( \text{Tr} \sqrt{\hat{\rho}^{1/2} \hat{\sigma} \hat{\rho}^{1/2}} \right)^2 \quad (\text{II.102})$$

Η fidelity είναι ένας μη αρνητικός αριθμός ο οποίος κυμαίνεται ανάμεσα στο 0 και το 1. Είναι μονάδα όταν οι δύο τελεστές πυκνότητας ταυτίζονται και είναι μηδέν εάν οι τελεστές δρουν σε ορθογώνιους χώρους (τα στοιχεία του ενός είναι κάθετα προς τα στοιχεία του άλλου). Όπως είναι εύκολο να αποδειχθεί εάν και οι δύο μήτρες πυκνότητας είναι καθαρές, η (II.102) γίνεται

$$F = |\langle \psi | \varphi \rangle|^2 \quad (\text{II.103})$$

ενώ εάν μία από αυτές είναι καθαρή (ας πούμε η  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ) παίρνει τη μορφή:

$$F = \langle \psi | \hat{\sigma} | \psi \rangle \quad (\text{II.104})$$

Πριν από αυτό, πρέπει να σημειώσουμε ότι η (II.102) είναι συμμετρική ως προς την εναλλαγή των μητρών πυκνότητας. Πράγματι, αρκεί να την γράψουμε με τη μορφή

$$F(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \left[ \text{Tr} \sqrt{(\hat{\rho}\hat{\sigma})^{1/2} (\hat{\sigma}\hat{\rho})^{1/2}} \right]^2 = \left[ \text{Tr} (\hat{\rho}\hat{\sigma})^{1/4} (\hat{\sigma}\hat{\rho})^{1/4} \right]^2 \quad (\text{II.105})$$

Γράφοντας  $(\hat{\rho}\hat{\sigma})^{1/4} = \hat{A}$  και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα  $\text{Tr}(\hat{A}\hat{A}^\dagger) = \text{Tr}(\hat{A}^\dagger\hat{A})$  μπορούμε αμέσως να επιβεβαιώσουμε τη συμμετρία της πιστότητας. Η τελευταία μορφή της fidelity δείχνει ότι δεν αλλάζει όταν οι τελεστές πυκνότητας αλλάζουν μέσω μοναδιακών μετασχηματισμών.

Για να καταλήξουμε στην μορφή (II.103) μπορούμε να θυμηθούμε ότι ο καθαρός τελεστής έχει μόνο μία μη μηδενική ιδιοτιμή:  $\hat{\rho}|i\rangle = \lambda_i|i\rangle$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_i = 0 \forall i > 1$ .

Επομένως:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = |1\rangle\langle 1| &\rightarrow \sqrt{\hat{\rho}^{1/2} \hat{\sigma} \hat{\rho}^{1/2}} = |1\rangle\langle 1| \sqrt{\langle 1|\hat{\sigma}|1\rangle} \rightarrow \text{Tr} \sqrt{\hat{\rho}^{1/2} \hat{\sigma} \hat{\rho}^{1/2}} = \sqrt{\langle 1|\hat{\sigma}|1\rangle} \\ &\rightarrow F = \langle 1|\hat{\sigma}|1\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}) = \langle \psi|\hat{\sigma}|\psi \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.106})$$

Προφανώς, εάν  $\hat{\sigma} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$  η fidelity παίρνει τη μορφή (II.103).

Το περιεχόμενο της fidelity μπορεί να γίνει κατανοητό ως εξής:

Έστω ότι από ένα σύνολο καταστάσεων επιλέγουμε, με τυχαίο τρόπο, κάποια από αυτές, την  $|\psi\rangle$ . Μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι αυτή, η άγνωστη, κατάσταση αντιπροσωπεύεται (σε ότι αφορά μετρήσεις επί αυτής) από κάποια γνωστή, την  $|\varphi\rangle$ . Η fidelity (II.103) δείχνει την πιθανότητα να έχουμε δίκιο.

Έστω τώρα, ότι διαλέγουμε, όπως και πριν, τυχαία την κατάσταση  $|\psi\rangle$  και επί αυτής κάνουμε μη επιλεκτική ορθογώνια μέτρηση προσπαθώντας να αντλήσουμε πληροφορίες. Μετά από τη μέτρηση έχουμε στη διάθεσή μας μια μη καθαρή μήτρα πυκνότητας, έστω την  $\hat{\sigma}$ . Η fidelity (II.104) μετράει την πιθανότητα η  $\hat{\sigma}$  να αντιπροσωπεύει την αρχική κατάσταση  $|\psi\rangle$ . Στη σύγκριση αυτών των πιθανοτήτων αναφέρεται το περιεχόμενο της άσκησης (II.14). Εν γένει, η δεύτερη είναι μεγαλύτερη της πρώτης λόγω των πληροφοριών που αντλήθηκαν με την ενδιάμεση μέτρηση.

Υπάρχουν και άλλες δυνατότητες, πέραν της πιστότητας, για την ποσοτικοποίηση της διαφοράς δύο καταστάσεων. Μπορούμε να ορίσουμε την απόσταση ανάμεσά τους χρησιμοποιώντας το μέτρο (norm) στον διανυσματικό χώρο (Liouville) στον οποίο ορίζονται οι εν λόγω καταστάσεις:

$$D_p(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \|\hat{\rho} - \hat{\sigma}\|_p \quad (\text{II.106})$$

όπου

$$\|\hat{\rho} - \hat{\sigma}\|_p = \left( \text{Tr} |\hat{\rho} - \hat{\sigma}|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_i |\lambda_i|^p \right)^{1/p} \quad (\text{II.107})$$

Εδώ  $\lambda_i$  είναι οι ιδιοτιμές του αυτοσυζυγούς τελεστή  $\hat{\rho} - \hat{\sigma}$  το πλήθος των οποίων αντιστοιχεί στις διαστάσεις του χώρου στον οποίο ορίζονται οι τελεστές. Η norm (II.106) ορίζεται  $\forall p = 1, 2, \dots, \infty$ . Συνήθως αναφερόμαστε στην λεγόμενη trace norm η οποία αντιστοιχεί σε  $p = 1$ . Μέσω αυτής ορίζεται η **trace distance** δύο καταστάσεων:

$$T(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{2} D_1(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{2} \|\hat{\rho} - \hat{\sigma}\|_1 \quad (\text{II.108})$$

Για το νόημα της (II.108) παραπέμπουμε στην άσκηση II.16. Η περίπτωση  $p = 2$  επίσης μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της απόστασης δύο καταστάσεων:

$$D_2(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \|\hat{\rho} - \hat{\sigma}\|_2 = \sqrt{\text{Tr} |\hat{\rho} - \hat{\sigma}|^2} \quad (\text{II.109})$$

Τόσο η trace distance όσο και η fidelity μπορούν να εκτιμήσουν πόσο διαφορετικές είναι δύο καταστάσεις. Εντούτοις, ως απόσταση μπορούμε να χαρακτηρίσουμε μόνο τις αποστάσεις (II.106) λόγω της τριγωνικής ιδιότητας της norm:

$$\|\hat{A} + \hat{B}\|_p \leq \|\hat{A}\|_p + \|\hat{B}\|_p \quad (\text{II.110})$$

Η σχέση ανάμεσα στη fidelity και τις αποστάσεις  $D_1$  και  $D_2$  δεν είναι, εν γένει, απλή. Εντούτοις υπάρχουν ανισότητες οι οποίες μπορούν να είναι βοηθητικές. Για παράδειγμα, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\|\hat{A}\|_1 \leq \sqrt{D} \|\hat{A}\|_2 \quad (\text{II.111})$$

Η ανισότητα αυτή προκύπτει από την ανισότητα Schwartz: Πράγματι, αν θεωρήσουμε τα ανύσματα  $\vec{x} = (1, \dots, 1)$ ,  $\vec{y} = (|\lambda_1|, \dots, |\lambda_D|)$  η σχέση παίρνει τη μορφή  $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ . Σε περίπτωση πολλών διαστάσεων είναι προφανές ότι καταστάσεις η οποία είναι κοντά σύμφωνα με την  $D_2$  είναι δυνατόν να είναι μακριά σύμφωνα με την  $D_1$ . Μια σημαντική ιδιότητα της απόστασης είναι ότι δεν αλλάζει όταν αλλάξουν οι καταστάσεις μέσω μοναδιακών μετασχηματισμών:

$$D(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = D(\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger, \hat{U}\hat{\sigma}\hat{U}^\dagger), \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I} \quad (\text{II.112})$$

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τέτοιοι μετασχηματισμοί δεν αλλάζουν τις ιδιοτιμές του τελεστή  $\hat{\rho} - \hat{\sigma}$ . Γενικότερα, οι μετασχηματισμοί που δεν αλλάζουν τις αποστάσεις λέγονται **ισομετρίες**.

Η fidelity καθορίζει άνω και κάτω φράγμα για την απόσταση  $T$  δύο καταστάσεων:

$$1 - \sqrt{F} \leq T \leq \sqrt{1 - F} \quad (\text{II.113})$$

Για την απόδειξη της τελευταίας σχέσης παραπέμπουμε στις Ασκήσεις II.17 και II.19

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ ΙΙ.

**Π.1** Να δείξετε ότι το ίχνος ενός τελεστή δεν εξαρτάται από τη βάση στην οποία ο τελεστής αναπαρίσται. Επίσης, να δείξετε την ταυτότητα  $\ln \text{Det} \hat{A} = \text{Tr} \ln \hat{A}$ .

**Π.2** Έστω η κατάσταση  $|\chi\rangle = a|1/2_z\rangle + b|-1/2_z\rangle$ . Να βρείτε την αντίστοιχη μήτρα πυκνότητας και να υπολογίσετε τις ποσότητες  $\langle \hat{S}_i \rangle, i = x, y, z$ .

**Π.3** Έστω ο τελεστής στροφής  $\hat{U} \doteq e^{-i\xi \vec{m} \cdot \hat{\sigma}/2}$  όπου  $\xi$  γνωστή γωνία και  $\vec{m}$  κάποια γνωστή μοναδιαία διεύθυνση. Να βρείτε τη δράση του σε κάποια γνωστή μήτρα πυκνότητας σύμφωνα με τη σχέση (Π.25) του κυρίως κειμένου.

**Π.4** Έστω  $|\psi\rangle$  και  $|\varphi\rangle$  δύο καταστάσεις σωματίου με spin  $1/2$ . Δείξτε ότι

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[ \left( \hat{I} + \vec{n}_{|\varphi\rangle} \cdot \hat{\sigma} \right) \left( \hat{I} + \vec{n}_{|\psi\rangle} \cdot \hat{\sigma} \right) \right]$$

Ο συμβολισμός στην προηγούμενη έκφραση δηλώνει ότι οι μοναδιαίες διευθύνσεις καθορίζονται από τις αντίστοιχες καταστάσεις. Αν οι διευθύνσεις αυτές θεωρηθούν τυχαίες μεταβλητές, δείξτε ότι

$$E \left( |\langle \varphi | \psi \rangle|^2 \right) = 1/2$$

όπου  $E(\dots)$  σημαίνει μέση τιμή ως προς όλες τις δυνατές διευθύνσεις.

**Π.5** Η κατάσταση δύο ηλεκτρονίων περιγράφεται από τον τελεστή πυκνότητας

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{1}{8} \hat{I}_{A \times B} + \frac{1}{2} |\psi_{AB}^- \rangle \langle \psi_{AB}^-|$$

όπου  $|\psi_{AB}^- \rangle$  η (singlet) κατάσταση

$$|\psi_{AB}^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1/2_A, -1/2_B\rangle - |-1/2_A, 1/2_B\rangle \right) \quad (1)$$

Έστω ότι μετράτε την προβολή του spin του ηλεκτρονίου A στη διεύθυνση  $\vec{n}$  και του B στη διεύθυνση  $\vec{m}$  όπου  $\vec{n} \cdot \vec{m} = \cos \theta$ . Ποια είναι η πιθανότητα να βρείτε και για τα δυο σωματίδια  $\hbar/2$ ;

**Υπόδειξη 1.** Βολεύει να διαλέξετε τη διεύθυνση στην (1) να είναι μία από τις  $\vec{n}, \vec{m}$ . Τότε η ζητούμενη πιθανότητα μπορείτε να δείξετε ότι είναι  $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \left| \langle 1/2_{A,n} | -1/2_{A,m} \rangle \right|^2$ .

Αν τώρα παρατηρήσετε ότι και αυτή η ποσότητα είναι αναλλοίωτη σε στροφές μπορείτε να διαλέξετε τη μία διεύθυνση να είναι ο άξονας z.



Έτσι θα βρείτε:

$$\left| \langle 1/2_{A,n} | -1/2_{A,n} \rangle \right|^2 = \sin^2(\theta/2).$$

**Υπόδειξη 2.** Ο τυπικός τρόπος επίλυσης είναι μέσω της χρήσης των προβολικών τελεστών  $\hat{E}_{A,n}(1/2) = |1/2_{A,n}\rangle\langle 1/2_{A,n}|$ ,  $\hat{E}_{B,m}(1/2) = |1/2_{B,m}\rangle\langle 1/2_{B,m}|$ .

Οι τελεστές αυτοί μπορούν να γραφούν στη σφαίρα Bloch ως

$$\hat{E}_{A,n}(1/2) = \frac{1}{2}(\hat{I} + \vec{n} \cdot \hat{\sigma}_A), \quad \hat{E}_{B,m}(1/2) = \frac{1}{2}(\hat{I} + \vec{m} \cdot \hat{\sigma}_B)$$

Θεωρείστε ότι η κατεύθυνση στην  $|\psi_{AB}^-\rangle$  είναι ο άξονας  $z$

και δείξτε ότι για οποιαδήποτε κατεύθυνση  $\vec{n}$ :  $\vec{n} \cdot \hat{\sigma}_A |\psi_{AB}^-\rangle = -\vec{n} \cdot \hat{\sigma}_B |\psi_{AB}^-\rangle$

**Π.6** Έστω η μήτρα πυκνότητας  $\hat{\rho} \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{pmatrix}$ . Να την γράψετε με τη μορφή

$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{I} + \vec{p} \cdot \hat{\sigma})$  και να δείξετε ότι οι ιδιοτιμές της είναι  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm |\vec{p}|)$ . Να διερευνήσετε εάν είναι καθαρή ή μη καθαρή μήτρα πυκνότητας.

**Π.7** Έστω ότι έχετε στη διάθεσή σας έναν (πολύ μεγάλο) αριθμό σωματιδίων με σπιν  $1/2$ . Μετράτε την προβολή του σπιν στη διεύθυνση  $z$  και βρίσκετε, για ένα ποσοστό  $q$  από αυτά, την τιμή  $+\hbar/2$ . Στα υπόλοιπα σωματλια μετράτε την προβολή του σπιν στον άξονα  $x$ , κρατάτε αυτά για τα οποία το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι  $+\hbar/2$  και απορρίπτετε τα υπόλοιπα.

(α) Να βρείτε τη συλλογή καταστάσεων που έχετε στη διάθεσή σας.

(β) Να βρείτε την μήτρα πυκνότητας η οποία περιγράφει την εν λόγω συλλογή και να ελέγξετε εάν είναι καθαρή.

(γ) Να βρείτε μια διαφορετική συλλογή η οποία να περιγράφεται από την ίδια μήτρα πυκνότητας.

### Απάντηση.

(α) Έστω ότι αρχικά έχετε στη διάθεσή σας  $N$  σωματλια. Στην πρώτη μέτρηση βρίσκετε ένα ποσοστό  $q = N_1/N$  από αυτά να έχουν προβολή στον άξονα  $z$ ,  $+\hbar/2$ . Τα

υπόλοιπα σωματλια ένα ποσοστό, δηλαδή,  $1-q = \frac{N-N_1}{N} = \frac{N_2}{N}$  έχουν, προφανώς,

προβολή στον ίδιο άξονα,  $-\hbar/2$ . Σ' αυτά τα σωματλια μετράτε την προβολή στον άξονα  $x$ . Από την έκφραση  $|-1/2\rangle_z = (|1/2\rangle_x - |-1/2\rangle_x)/\sqrt{2}$  γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να μετρηθεί  $+\hbar/2$  στη διεύθυνση  $x$  είναι  $1/2$ . Επομένως, θα έχετε  $N_2/2$  σωματλια με

προβολή  $+\hbar/2$  και  $N_2/2$  σωμάτια με προβολή  $-\hbar/2$  τα οποία και θα απορρίψετε. Με τον τρόπο αυτό έχετε μείνει με  $N' = N_1 + N_2/2 = qN + (1-q)N/2 = \frac{1+q}{2}N$  σωμάτια συνολικά. Από αυτά, ένα ποσοστό  $p_z = N_1/N' = \frac{2q}{1+q}$  από αυτά έχει προβολή  $+\hbar/2$  στον άξονα  $z$  και ένα ποσοστό  $p_x = N_2/N' = \frac{1-q}{1+q}$  έχει προβολή  $+\hbar/2$  στον άξονα  $x$ .

Επομένως η συλλογή καταστάσεων είναι η

$$Q = \left\{ |1/2\rangle_z, |1/2\rangle_x; p_z = \frac{2q}{1+q}, p_x = \frac{1-q}{1+q} \right\}$$

(β) Η μήτρα πυκνότητας η οποία αντιπροσωπεύει τη συλλογή αυτή είναι η ακόλουθη:

$$\hat{\rho} = \frac{2q}{1+q} |1/2\rangle_{zz} \langle 1/2| + \frac{1-q}{1+q} |1/2\rangle_{xx} \langle 1/2| \doteq \frac{1}{2(1+q)} \begin{pmatrix} 3q+1 & 1-q \\ 1-q & 1-q \end{pmatrix}$$

Προφανώς, αυτή είναι μη καθαρή μήτρα πυκνότητας αφού:

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2 = \frac{3q^2+1}{(1+q)^2} < 1$$

(γ) Ακολουθώντας τη διαδρομή που περιγράψαμε στο κυρίως κείμενο ορίζουμε τις

$|\tilde{\varphi}\rangle_{z,x} = \sqrt{p_{z,x}} |1/2\rangle_{z,x}$  γράφουμε  $\hat{\rho} = |\tilde{\varphi}\rangle_{zz} \langle \tilde{\varphi}| + |\tilde{\varphi}\rangle_{xx} \langle \tilde{\varphi}|$ . Αν κάνουμε τον

μετασχηματισμό  $\begin{pmatrix} |\tilde{\varphi}\rangle_z \\ |\tilde{\varphi}\rangle_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\tilde{\psi}_1\rangle \\ |\tilde{\psi}_2\rangle \end{pmatrix}$ ,  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  θα βρούμε:

$$\hat{\rho} = |\tilde{\psi}_1\rangle \langle \tilde{\psi}_1| + |\tilde{\psi}_2\rangle \langle \tilde{\psi}_2|$$

Εισάγουμε τις κανονικοποιημένες καταστάσεις

$$|\tilde{\psi}_{1,2}\rangle = \sqrt{\lambda_{1,2}} |\psi_{1,2}\rangle, \quad \langle \tilde{\psi}_{1,2} | \tilde{\psi}_{1,2} \rangle = \lambda_{1,2} \geq 0$$

$$\lambda_1 = |a|^2 \frac{2q}{1+q} + |b|^2 \frac{1-q}{1+q} + 2|ab| \cos(\theta_b - \theta_a) \frac{\sqrt{q(1-q)}}{1+q}$$

$$\lambda_2 = |b|^2 \frac{2q}{1+q} + |a|^2 \frac{1-q}{1+q} - 2|ab| \cos(\theta_b - \theta_a) \frac{\sqrt{q(1-q)}}{1+q}$$

Έτσι:

$$\hat{\rho} = \lambda_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \lambda_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$$

**Π.8** Έστω ότι οι πιθανότητες να βρείτε  $+\hbar/2$ , εάν μετρήσετε την προβολή του spin ενός ηλεκτρονίου A στις διευθύνσεις  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  και  $\bar{z}$ , είναι  $p_x(+)=3/4$ ,  $p_y(+)=1/2$  και  $p_z(+)=3/4$  αντίστοιχα. Να βρείτε την μήτρα πυκνότητας η οποία περιγράφει την κατάσταση του ηλεκτρονίου και να ελέγξετε εάν αυτή είναι καθαρή.

**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε τη σχέση  $p_n(+)=\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{E}_n)$  και τη γενική μορφή

$\hat{\rho} \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{pmatrix}$  για την μήτρα πυκνότητας. Με τις πληροφορίες που έχετε θα βρείτε

$$\hat{\rho} \doteq \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \text{Tr}\hat{\rho}^2 = 3/4.$$

**Π.9** Σωματίο με spin  $1/2$  βρίσκεται σε κατάσταση για την οποία η μόνη σας πληροφορία είναι ότι εάν μετρήσετε την προβολή του spin στον άξονα  $x$  θα βρείτε  $\hbar/2$  με πιθανότητα  $1/3$ .

- (α) Υποθέτοντας ότι οι μετρήσεις της προβολής του spin στις διευθύνσεις  $y, z$  δίνουν ισοπίθανα αποτελέσματα, να βρείτε την κατάσταση του σωματίου  
 (β) Έστω ότι κάνετε μη επιλεκτική μέτρηση σε κάποια διεύθυνση  $\bar{n}$ . Να βρείτε την κατάσταση του σωματίου μετά την μέτρηση.

**Υπόδειξη.**

Ένας τρόπος να δουλέψετε είναι μέσω του φορμαλισμού της σφαίρας Bloch:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{I} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 1-p_z \end{pmatrix}$$

Όπου  $\frac{2}{\hbar} \langle \hat{S}_i \rangle = \langle \sigma_i \rangle = p_i$ ,  $i = x, y, z$ .

Επομένως

$$p_x = -1/3, p_y = 0, p_z = 0 \rightarrow \hat{\rho} = \frac{1}{2} \left( \hat{I} - \frac{1}{3} \sigma^x \right) \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

(β) Όταν κάνουμε μέτρηση η μήτρα πυκνότητας αλλάζει σύμφωνα με την (Π.6):

$$\hat{\rho} \xrightarrow{\text{μέτρηση}} \hat{\rho}' = \frac{\hat{E}_n \hat{\rho} \hat{E}_n}{\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{E}_n)}$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε δύο δυνατά αποτελέσματα:

$$\hat{\rho}_{\pm} = \frac{|\pm 1/2_n\rangle\langle\pm 1/2_n|\hat{\rho}|\pm 1/2_n\rangle\langle\pm 1/2_n|}{\langle\pm 1/2_n|\hat{\rho}|\pm 1/2_n\rangle} = |\pm 1/2_n\rangle\langle\pm 1/2_n|$$

Η πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από αυτά είναι

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\pm) &= \text{Tr}(|\pm 1/2_n\rangle\langle\pm 1/2_n|\hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\pm}\hat{\rho}) = \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left[ \left( \hat{I} \pm \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \right) \left( \hat{I} - \frac{1}{3} \sigma_x \right) \right] = \frac{1}{4} \text{Tr} \left( \hat{I} \mp \frac{1}{3} n_x \hat{I} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{1}{3} \sin \theta \cos \varphi \right) \end{aligned}$$

Μη επιλεκτική μέτρηση σημαίνει ότι δεν επιλέγουμε κάποιο από αυτά. Έτσι, θα προκύψει μια μη καθαρή συλλογή

$$\mathcal{Q} = \{|\pm 1/2_n\rangle; \text{Prob}(\pm)\}$$

Επομένως, η νέα μήτρα πυκνότητας είναι

$$\hat{\rho}' = \text{Prob}(+) \hat{\rho}_+ + \text{Prob}(-) \hat{\rho}_-$$

## II.10 Ανάλυση Schmidt (Schmidt decomposition).

Να αποδειχθεί ότι οποιαδήποτε διμερής κατάσταση μπορεί να γραφεί ως

$$|\chi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^D \sqrt{p_i} |i_A\rangle |u_{i,B}\rangle \quad (1)$$

όπου  $\{|i_A\rangle\}$ ,  $\{|u_{i,B}\rangle\}$  βάσεις στους χώρους Hilbert  $H_A$ ,  $H_B$  των επιμέρους μερών.

Οι μη αρνητικοί αριθμοί  $p_i$  αθροίζονται στην μονάδα

$$\sum_{i=1}^D p_i = 1, \quad D = \min(\dim H_A, \dim H_B)$$

Η γραφή μιας διμερούς κατάστασης με τη μορφή (1) ορίζει τη λεγόμενη **ανάλυση Schmidt**.

### Απάντηση.

Πριν από την απόδειξη μπορούμε να δούμε τις συνέπειες της (1).

Αν υπολογίσουμε την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας για καθένα από τα υποσυστήματα θα βρούμε:

$$\hat{\rho}_A^R = \text{Tr}_B |\chi_{AB}\rangle\langle\chi_{AB}| = \sum_{i=1}^D p_i |i_A\rangle\langle i_A|$$

$$\hat{\rho}_B^R = \text{Tr}_A |\chi_{AB}\rangle\langle\chi_{AB}| = \sum_{i=1}^D p_i |i'_B\rangle\langle i'_B|$$
(2)

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι οι βάσεις  $\{|i_A\rangle\}, \{|i'_B\rangle\}$  είναι ιδιοκαταστάσεις των αντίστοιχων μητρών πυκνότητας:

$$\hat{\rho}_A^R |i_A\rangle = p_i |i_A\rangle, \hat{\rho}_B^R |i'_B\rangle = p_i |i'_B\rangle$$
(3)

Προκύπτει, επίσης, το πολύ ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι οι ιδιοτιμές των δύο τελεστών ταυτίζονται. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι χώροι  $H_A$  και  $H_B$  έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

Σημαίνει ότι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές των πινάκων (2) ταυτίζονται. Θα μπορούσε, για παράδειγμα,  $\dim H_B > \dim H_A$  αλλά το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών των τελεστών (2) να είναι το ίδιο. Με άλλα λόγια, η (2) δηλώνει ότι η τάξη (rank) των δύο τελεστών είναι η ίδια. Είναι έτσι, προφανές, ότι το πλήθος των όρων στην (1) είναι ίσο με το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών το οποίο, με τη σειρά του, είναι, το πολύ, ίσο με τη μικρότερη από τις διαστάσεις των επιμέρους χώρων Hilbert.

Για την απόδειξη της (1) μπορούμε να ξεκινήσουμε από την πιο γενική δυνατή μορφή μιας διμερούς κατάστασης:

$$|\chi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{D_A} \sum_{\mu=1}^{D_B} a_{i\mu} |i_A\rangle |\mu_B\rangle$$
(4)

Έστω ότι  $\dim H_A \leq \dim H_B$  και ότι διαλέγουμε τη βάση  $\{|i_A\rangle\}$  να απαρτίζεται από τα ιδιοανύσματα του  $\hat{\rho}_A^R$ . Αυτή η επιλογή είναι απολύτως γενική διότι ακόμα και αν ξεκινήσουμε από κάποια άλλη βάση, μπορούμε, μέσω ενός μοναδιακού μετασχηματισμού να παράγουμε την (4).

Έστω, τώρα, ότι πραγματοποιούμε το άθροισμα ως τους δείκτες του B. Αυτή η άθροιση θα οδηγήσει σε κάποιο άνυσμα του χώρου B το οποίο θα εξαρτάται από τον δείκτη  $i$ :

$$\sum_{\mu=1}^{D_B} a_{i\mu} |\mu_B\rangle \equiv |\varphi_{i,B}\rangle$$
(5)

Τα ανύσματα αυτά δεν είναι κανονικοποιημένα ούτε, κατ' ανάγκη, ορθογώνια μεταξύ τους. Αντικαθιστώντας στην (4) θα βρούμε:

$$|\chi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{D_A} |i_A\rangle |\varphi_{i,B}\rangle$$
(6)

Επομένως:

$$\hat{\rho}_A^R = \text{Tr}_B |\chi_{AB}\rangle\langle\chi_{AB}| = \sum_{i,j=1}^{D_A} |i_A\rangle\langle j_A| \langle\varphi_{j,B}|\varphi_{i,B}\rangle$$
(7)

Επειδή τα  $\{|i_A\rangle\}$  είναι ιδιοανύσματα του  $\hat{\rho}_A^R$ , ισχύει ότι:

$$\hat{\rho}_A^R = \sum_{i=1}^{D_A} p_i |i_A\rangle\langle i_A|, \quad \sum_{i=1}^{D_A} p_i = \text{Tr}\hat{\rho}_A^R = 1 \quad (8)$$

Συγκρίνοντας τις (7) και (8) βλέπουμε ότι

$$\langle \varphi_{j,B} | \varphi_{i,B} \rangle = \delta_{j,i} p_i \quad (9)$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι τα ανύσματα (5) είναι μη κανονικοποιημένα αλλά ορθογώνια μεταξύ τους. Ορίζουμε τα κανονικοποιημένα ανύσματα

$$|\varphi_{i,B}\rangle = \sqrt{p_i} |u_{i,B}\rangle \rightarrow \langle u_{j,B} | u_{i,B} \rangle = \delta_{j,i} \quad (10)$$

τα οποία αποτελούν βάση στον χώρο B και γράφουμε την διμερή κατάσταση με την μορφή:

$$|\chi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{D_A} \sqrt{p_i} |i_A\rangle |u_{i,B}\rangle \quad (11)$$

Μια παρατήρηση στο σημείο αυτό είναι απαραίτητη. Για να περάσουμε από τη σχέση (9) στην (10) θα έπρεπε να γράψουμε  $|\varphi_{i,B}\rangle = \sqrt{p_i} e^{i\theta_i} |u'_{i,B}\rangle$ . Στην (10) θεωρήσαμε ότι αυτή η φάση έχει ενσωματωθεί στον ορισμό των ανυσμάτων βάσης:  $e^{i\theta_i} |u'_{i,B}\rangle \rightarrow |u_{i,B}\rangle$ . Το μόνο που χρειάζεται πλέον για να αποδειχθεί πλήρως το ζητούμενο είναι να βρούμε την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας του B:

$$\hat{\rho}_B^R = \text{Tr}_A |\chi_{AB}\rangle\langle \chi_{AB}| = \sum_{i=1}^{D_A} p_i |u_{i,B}\rangle\langle u_{i,B}| \quad (12)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι τα ανύσματα  $|u_{i,B}\rangle$  είναι ιδιοανύσματα του  $\hat{\rho}_B^R$  και ότι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του συμπίπτουν με τις ιδιοτιμές του  $\hat{\rho}_A^R$ .

**Σχόλιο 1.** Εάν η αρχική, διμερής, κατάσταση μπορεί να παραγοντοποιηθεί οι μήτρες πυκνότητας  $\hat{\rho}_{A,B}^R$  είναι καθαρές και επομένως έχουν μόνο μια μηδενική ιδιοτιμή. Το άμεσο συμπέρασμα είναι ότι εάν στην ανάλυση Schmidt (11) υπάρχουν περισσότεροι από ένας όροι, η διμερής κατάσταση είναι εναγκαλισμένη. Το πλήθος των όρων στην έκφραση (11) ορίζει τον λεγόμενο **αριθμό Schmidt**. Προφανώς, εάν ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος από ένα, η διμερής κατάσταση είναι εναγκαλισμένη.

**Σχόλιο 2.** Εάν οι μη μηδενικές ιδιοτιμές δεν είναι εκφυλισμένες, η ανάλυση Schmidt είναι μοναδική και καθορίζεται πλήρως από τις ανηγμένες μήτρες πυκνότητας των υποσυστημάτων.

**Σχόλιο 3.** Η πρακτική χρησιμότητα της ανάλυσης Schmidt είναι προφανής. Σε μια διμερή κατάσταση γραμμένη σε μια τυχαία βάση όπως στην (4), χρειαζόμαστε τους  $2(D_A D_B - 1)$  πραγματικούς αριθμούς για να προσδιορίσουμε τους (μιγαδικούς) συντελεστές  $\{a_{i\mu}\}$ . Η γραφή της στη βάση Schmidt μας επιτρέπει να την προσδιορίσουμε με τον οικονομικότερο δυνατό τρόπο αφού χρειαζόμαστε μόνο  $D = \min(D_A, D_B)$  πραγματικούς συντελεστές αφού οι επιπλέον παράμετροι έχουν ενσωματωθεί στα ανύσματα της βάσης Schmidt.

**Π.11** Έστω η διμερής κατάσταση (όλες οι καταστάσεις αφορούν τον άξονα  $z$ ):

$$|\chi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2_A\rangle \left( \frac{1}{2}|1/2_B\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}}|-1/2_B\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1/2_A\rangle \left( \frac{1}{2}|-1/2_B\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}}|1/2_B\rangle \right)$$

Να την γράψετε στη βάση Schmidt.

**Π.12** Δείξτε ότι ακόμα και εάν μια διμερής κατάσταση δεν είναι γραμμένη στη βάση Schmidt, μπορούμε πάντα να βρούμε τοπικούς μοναδιακούς (unitary- unimodular) μετασχηματισμούς  $\hat{U}_A, \hat{U}'_B$  τέτοιους ώστε να την μεταγράψουμε στη μορφή Schmidt.

**Παρατήρηση.** Μπορούμε να δούμε ότι είναι εφικτό αυτό που ζητάει η άσκηση εάν σκεφθούμε ότι ένας unitary- unimodular μετασχηματισμός σε χώρο Hilbert  $D_A$  διαστάσεων έχει  $D_A^2 - 1$  ελεύθερες πραγματικές παραμέτρους. Επομένως, οι δύο μετασχηματισμοί της άσκησης έχουν συνολικά  $D_A^2 + D_B^2 - 2$  ελεύθερες παραμέτρους. Από την άλλη μεριά, μια διμερής κατάσταση χρειάζεται  $2(D_A D_B - 1)$  παραμέτρους προκειμένου να προσδιορισθεί. Επειδή  $D_A^2 + D_B^2 - 2 \geq 2(D_A D_B - 1) \Leftrightarrow (D_A - D_B)^2 \geq 0$  αυτό είναι πάντα εφικτό.

**Π.13** Δείξτε ότι μια τριμερής κατάσταση

$$|\chi_{ABC}\rangle = \sum_{i_A, \mu_B, \nu_C} a_{i\mu\nu} |i_A, \mu_B, \nu_C\rangle$$

δεν είναι, εν γένει, δυνατόν να γραφεί με μορφή Schmidt:

$$|\chi_{ABC}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i_A\rangle |u_{i,B}\rangle |\varphi_{i,C}\rangle$$

όπου  $|i_A\rangle, |u_{i,B}\rangle, |\varphi_{i,C}\rangle$  στοιχεία βάσεων στους αντίστοιχους χώρους Hilbert.

### Υπόδειξη.

Ένας τρόπος να το δείξετε είναι να παρατηρήσετε ότι για να προσδιορίσετε την γενική έκφραση χρειάζεστε  $2(D_A D_B D_C - 1)$  πραγματικές παραμέτρους ενώ οι τοπικοί μοναδιακοί μετασχηματισμοί μέσω των οποίων μπορείτε να οδηγηθείτε στη δεύτερη έχουν μόνο  $D_A^2 + D_B^2 + D_C^2 - 3$  ελεύθερες παραμέτρους οι οποίες δεν σας επιτρέπουν να λύσετε το πρόβλημα γενικά.

**Π.14** Μια σύνθετη κατάσταση έχει στη βάση Schmidt τη μορφή:

$$|\chi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\lambda_i} |i_A\rangle |\phi_{i,B}\rangle$$

Δείξτε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να υπάρχουν 2 όροι στην παραπάνω έκφραση είναι το μέτρο του ανύσματος Bloch να είναι μικρότερο από τη μονάδα:  $|\vec{p}| < 1$

**Υπόδειξη:** Δείξτε ότι  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + |\vec{p}|)$  ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - |\vec{p}|)$

**Π.15** Έστω ότι το σύνολο των καταστάσεων στην επιφάνεια της σφαίρας Bloch αποτελούν μια συλλογή τα στοιχεία της οποίας είναι ισοπίθανα.

(α) Διαλέγετε με τυχαίο τρόπο κάποια από τις καταστάσεις της συλλογής αυτής και κάνετε την υπόθεση ότι είναι μια συγκεκριμένη κατάσταση  $|\psi\rangle$ . Ποια είναι η μέση fidelity αυτής της υπόθεσης;

(β) Διαλέγετε, όπως και πριν, μια τυχαία κατάσταση επί της οποίας κάνετε μη επιλεκτική μέτρηση της προβολής του σπιν στην διεύθυνση  $z$ . Στη συνέχεια υποθέτετε ότι η προκύπτουσα κατάσταση αντιπροσωπεύει την αρχικά επιλεγείσα. Ποια είναι η μέση fidelity αυτής της υπόθεσης;

(γ) Να επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα κάνοντας επιλεκτική μέτρηση στη διεύθυνση  $\vec{m}$ . Δείξτε ότι η μέση fidelity παραμένει η ίδια.

### Απάντηση.

(α) Μια τυχαία κατάσταση του διδιάστατου χώρου Hilbert μπορεί να γραφεί ως

$$\hat{\rho} = |1/2_n\rangle\langle 1/2_n| = \frac{1}{2}(\hat{I} + \vec{n} \cdot \hat{\sigma}) \quad (1)$$

όπου

$$\vec{n} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \quad (2)$$

μοναδιαία διεύθυνση η οποία ορίζει ένα σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας Bloch. Όλα αυτά τα σημεία θεωρούνται ως στοιχεία μιας τυχαίας μεταβλητής τα οποία κατανομούνται ομοιόμορφα στην επιφάνεια της σφαίρας.



Η fidelity της επιλογής που κάναμε είναι:

$$F(\theta, \varphi) = \langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle = \frac{1}{2} + \vec{n} \cdot \langle \hat{\sigma} \rangle \quad (3)$$

Η μέση fidelity θα προκύψει εάν πάρουμε τη μέση τιμή της (3) για όλα τα σημεία της επιφάνειας Bloch:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta F(\theta, \varphi) \quad (4)$$

Επειδή

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) = 0 \quad (5)$$

βρίσκουμε

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2} \quad (6)$$

**(β)** Έστω ότι, επί της κατάστασης (1), κάνουμε μέτρηση της προβολής του σπιν στη διεύθυνση  $z$ . Εάν το αποτέλεσμα είναι  $\pm \hbar / 2$  η κατάσταση (1) θα αλλάξει σύμφωνα με την (II.6):

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}'_{\pm} = \frac{\hat{E}_{z,\pm} \hat{\rho} \hat{E}_{z,\pm}}{\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{E}_{z,\pm})}, \quad \hat{E}_{z,\pm} = |\pm 1/2_z\rangle \langle \pm 1/2_z| \quad (7)$$

Η πιθανότητα εμφάνισης καθεμιάς από τις δυνατές τιμές  $\pm \hbar / 2$  είναι, σύμφωνα με την (II.2):

$$\text{Prob}_z(\pm 1/2) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{E}_{z,\pm}) \quad (8)$$

Μη επιλεκτική μέτρηση σημαίνει ότι η μήτρα πυκνότητας η οποία θα προκύψει είναι μικτή:

$$\hat{\rho}' = \text{Prob}_z(+1/2) \hat{\rho}'_+ + \text{Prob}_z(-1/2) \hat{\rho}'_- = \hat{E}_{z,+} \hat{\rho} \hat{E}_{z,+} + \hat{E}_{z,-} \hat{\rho} \hat{E}_{z,-} \quad (9)$$

Η υπόθεση που κάνουμε τώρα είναι ότι η κατάσταση (9) αντιπροσωπεύει την κατάσταση  $|\psi\rangle$ . Η fidelity μιας τέτοιας υπόθεσης είναι

$$\begin{aligned} F(\theta, \varphi) &= \langle 1/2_n | \hat{\rho}' | 1/2_n \rangle = \langle 1/2_n | 1/2_z \rangle \langle 1/2_z | \hat{\rho} | 1/2_z \rangle \langle 1/2_z | 1/2_n \rangle + \\ &\quad + \langle 1/2_n | -1/2_z \rangle \langle -1/2_z | \hat{\rho} | -1/2_z \rangle \langle -1/2_z | 1/2_n \rangle = \\ &= |\langle 1/2_n | 1/2_z \rangle|^4 + |\langle 1/2_n | -1/2_z \rangle|^4 = \cos^4(\theta/2) + \sin^4(\theta/2) \end{aligned} \quad (10)$$

Για το τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα της άσκησης I.6

Η μέση fidelity τώρα είναι:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta (\cos^4(\theta/2) + \sin^4(\theta/2)) = \frac{1}{4} \int_0^\pi d\theta \sin \theta (1 + \cos^2 \theta) = \frac{2}{3} \quad (11)$$

**Π.16** Έστω δύο συστήματα τα οποία ορίζονται σε χώρο Hilbert  $D$  διαστάσεων και τα οποία αντιπροσωπεύονται από τους τελεστές πυκνότητας  $\hat{\rho}$  και  $\hat{\sigma}$ . Θεωρείστε ένα πλήρες

σύνολο προβολικών τελεστών  $\left\{ \hat{E}_a; a = 1, 2, \dots, D \mid \sum_a \hat{E}_a = \hat{I} \right\}$  και έστω  $p_a = \text{Tr}(\hat{E}_a \hat{\rho})$  και

$q_a = \text{Tr}(\hat{E}_a \hat{\sigma})$  οι πιθανότητες να προκύψει το αποτέλεσμα  $\lambda_a$  όταν το μέγεθος

$\hat{M} = \sum_a \lambda_a \hat{E}_a$  μετρηθεί σε κάθε μία από τις καταστάσεις. Η απόσταση των δύο

κατανομών πιθανότητας ορίζεται ως  $d(p, q) \equiv \sum_a |p_a - q_a|$ . Δείξτε ότι

$$d(p, q) \leq \|\hat{\rho} - \hat{\sigma}\|_1 = \text{Tr}|\hat{\rho} - \hat{\sigma}|$$

### Απόδειξη.

Ο τελεστής  $\hat{\delta} = \hat{\rho} - \hat{\sigma}$  είναι αυτοσυζυγής και έχει ένα πλήρες σύστημα ιδιοκαταστάσεων,  $\hat{\delta}|i\rangle = \delta_i|i\rangle$ . Χρησιμοποιώντας τη βάση αυτών των καταστάσεων για τον υπολογισμό των ιχνών βρίσκουμε:

$$\text{Tr}|\hat{\rho} - \hat{\sigma}| = \sum_i |\delta_i| \quad (1)$$

$$|p_a - q_a| = \left| \text{Tr} \hat{E}_a (\hat{\rho} - \hat{\sigma}) \right| = \left| \sum_i \langle i | \hat{E}_a | i \rangle \delta_i \right| \leq \sum_i |\langle i | \hat{E}_a | i \rangle| |\delta_i| \rightarrow \quad (2)$$

$$\sum_a |p_a - q_a| \leq \sum_i \left( \sum_a \langle i | \hat{E}_a | i \rangle \right) |\delta_i| = \sum_a |p_a - q_a| \leq \sum_i |\delta_i|$$

Προφανώς η ισότητα ισχύει εάν το μέγεθος που μετράται είναι η διαφορά  $\hat{\delta}$ .

Έτσι, μπορεί να ερμηνεύσει κανείς την trace distance ως την μεγαλύτερη δυνατή απόσταση  $d(p, q)$  ανάμεσα στις κατανομές πιθανοτήτων που προκύπτουν από όλες τις δυνατές μετρήσεις που μπορούν να γίνουν επί των δύο καταστάσεων:

$$D_1 = \sup_{\{p, q\}} d(p, q)$$

**Π.17** Δείξτε ότι  $T(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) \geq 1 - \sqrt{F(\hat{\rho}, \hat{\sigma})}$

**Απόδειξη.**

Στο κυρίως κείμενο ορίσαμε την fidelity στη σχέση (Π.102):

$$\sqrt{F(\hat{\rho}, \hat{\sigma})} = \text{Tr} \sqrt{\hat{\rho}^{1/2} \hat{\sigma} \hat{\rho}^{1/2}} = \text{Tr} \sqrt{(\hat{\rho} \hat{\sigma})^{1/2} (\hat{\sigma} \hat{\rho})^{1/2}} = \text{Tr} \sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}} = \text{Tr} |\hat{A}| \quad (1)$$

όπου γράψαμε  $\hat{A} = (\hat{\sigma} \hat{\rho})^{1/2}$ . Για οποιαδήποτε αυτοσυζυγή τελεστή ισχύει η σχέση  $\text{Tr} |\hat{A}| \geq |\text{Tr} \hat{A}|$  η οποία μπορεί να αποδειχθεί πολύ εύκολα εάν υπολογίσουμε το ίχνος στη βάση των ιδιοκαταστάσεων του  $\hat{A}$ . Εάν, επιπλέον, ο τελεστής  $\hat{A}$  είναι μη αρνητικός (όπως στη συγκεκριμένη περίπτωση), θα ισχύει η ισότητα.

Επομένως:

$$\sqrt{F(\hat{\rho}, \hat{\sigma})} = \text{Tr} \sqrt{\hat{\rho} \hat{\sigma}} \quad (2)$$

Αν τώρα παρατηρήσουμε ότι  $\text{Tr} (\sqrt{\hat{\rho}} - \sqrt{\hat{\sigma}})^2 = 2 - 2\text{Tr} \sqrt{\hat{\rho} \hat{\sigma}}$  μπορούμε να γράψουμε την (2) με τη μορφή :

$$\frac{1}{2} \text{Tr} (\sqrt{\hat{\rho}} - \sqrt{\hat{\sigma}})^2 = 1 - \sqrt{F(\hat{\rho}, \hat{\sigma})} \quad (3)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι

$$\text{Tr} (\sqrt{\hat{\rho}} - \sqrt{\hat{\sigma}})^2 \leq \text{Tr} |\hat{\rho} - \hat{\sigma}| \quad (4)$$

και θα καταλήξουμε στο ζητούμενο.

Η ανισότητα (4) μπορεί να αποδειχθεί εύκολα:

$$\text{Tr} |\hat{\rho} - \hat{\sigma}| = \text{Tr} |\sqrt{\hat{\rho}} - \sqrt{\hat{\sigma}}| (\sqrt{\hat{\rho}} + \sqrt{\hat{\sigma}}) \geq \text{Tr} |\sqrt{\hat{\rho}} - \sqrt{\hat{\sigma}}|^2 \quad (5)$$

**Π.18** Δείξτε ότι για καθαρές καταστάσεις ισχύει ότι  $T(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \sqrt{1 - F(\hat{\rho}, \hat{\sigma})}$

**Απόδειξη.**

Όταν οι καταστάσεις είναι καθαρές:

$$\hat{\rho} - \hat{\sigma} = |\psi\rangle\langle\psi| - |\varphi\rangle\langle\varphi| \quad (1)$$

Υπάρχει μοναδιακός μετασχηματισμός μέσω του οποίου ο τελεστής μπορεί να διαγωνοποιηθεί:

$$\hat{V}(\hat{\rho} - \hat{\sigma})\hat{V}^\dagger = \hat{V}(|\psi\rangle\langle\psi| - |\varphi\rangle\langle\varphi|)\hat{V}^\dagger \doteq \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix} \quad (2)$$

Ορισμένες εξηγήσεις στο σημείο αυτό: Οι καταστάσεις  $|\psi\rangle$  και  $|\varphi\rangle$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία ενός χώρου Hilbert  $D$  διαστάσεων. Στη σχέση (2), περιοριστήκαμε στον δισδιάστατο υπόχωρο ο οποίος απαρτίζεται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς τους. Η μορφή του διαγώνιου πίνακα οφείλεται στο γεγονός ότι  $\text{Tr}\hat{V}(\hat{\rho} - \hat{\sigma})\hat{V}^\dagger = 0$ . Γράφοντας  $\hat{V}(\hat{\rho} - \hat{\sigma})\hat{V}^\dagger = \hat{A}$  βρίσκουμε:

$$\text{Tr}|\hat{A}| = \text{Tr}\sqrt{\hat{A}\hat{A}^\dagger} = 2|p| \rightarrow T(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = |p| \quad (3)$$

Για το τελευταίο βήμα βασιστήκαμε στο γεγονός ότι οι ιδιοτιμές του  $\hat{V}(\hat{\rho} - \hat{\sigma})\hat{V}^\dagger$  και του  $\hat{\rho} - \hat{\sigma}$  ταυτίζονται.

Από την άλλη μεριά:

$$|\hat{V}(|\psi\rangle\langle\psi| - |\varphi\rangle\langle\varphi|)\hat{V}^\dagger|^2 = |\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}| + |\tilde{\varphi}\rangle\langle\tilde{\varphi}| - |\tilde{\varphi}\rangle\langle\tilde{\varphi}| - |\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}| = |\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}| - |\tilde{\varphi}\rangle\langle\tilde{\varphi}| = |p|^2 \hat{I} \quad (4)$$

Εδώ γράψαμε  $|\tilde{\psi}\rangle = \hat{V}|\psi\rangle$ ,  $|\tilde{\varphi}\rangle = \hat{V}|\varphi\rangle$ .

Παίρνοντας το ίχνος και των μελών της Εξ. (4) βρίσκουμε:

$$2 - 2F(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = 2|p|^2 \rightarrow \sqrt{1 - F(\hat{\rho}, \hat{\sigma})} = T(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) \quad (5)$$

**Π.19 Να αποδειχθεί ότι  $T(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) \leq \sqrt{1 - F(\hat{\rho}, \hat{\sigma})}$ .**

### Απόδειξη.

Στην Άσκηση Π.18 αποδείξαμε ότι, για καθαρές καταστάσεις, ισχύει η ισότητα στη σχέση που μας απασχολεί στη συγκεκριμένη Άσκηση.

Προκειμένου να χειριστούμε τις μη καθαρές καταστάσεις θα θεωρήσουμε ότι οι τελεστές πυκνότητας  $\hat{\rho}, \hat{\sigma}$  προέρχονται από κάποιο σύνθετο σύστημα:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}_{AB}), \quad \hat{\sigma}_A = \text{Tr}_B(\hat{\sigma}_{AB}) \quad (1)$$

Το σύνθετο σύστημα είναι απομονωμένο και επομένως:

$$T(\hat{\rho}_{AB}, \hat{\sigma}_{AB}) = \sqrt{1 - F(\hat{\rho}_{AB}, \hat{\sigma}_{AB})} \quad (2)$$

Μπορούμε τώρα να κάνουμε χρήση δύο ανισοτήτων:

$$F(\hat{\rho}_{AB}, \hat{\sigma}_{AB}) \geq F(\hat{\rho}_A, \hat{\sigma}_A) \quad (3)$$

και

$$T(\hat{\rho}_{AB}, \hat{\sigma}_{AB}) \geq T(\hat{\rho}_A, \hat{\sigma}_A) \quad (4)$$

τις οποίες αν εφαρμόσουμε θα βρούμε

$$T(\hat{\rho}_A, \hat{\sigma}_A) \leq T(\hat{\rho}_{AB}, \hat{\sigma}_{AB}) = \sqrt{1 - F(\hat{\rho}_{AB}, \hat{\sigma}_{AB})} \leq \sqrt{1 - F(\hat{\rho}_A, \hat{\sigma}_A)} \quad (5)$$

Το γενικό επιχείρημα υπέρ της ισχύος των ανισοτήτων (2), (3) είναι ότι η δυνατότητα διαχωρισμού δύο καταστάσεων (είτε μέσω της fidelity είτε μέσω της απόστασης τους) δεν γίνεται καλύτερη κάνοντας μη επιλεκτικές μετρήσεις στο περιβάλλον τους. Η ακριβής απόδειξη της σχέσης (3) είναι απόρροια του θεωρήματος Uhlmann. Για τη σχέση (4) μπορεί κανείς να αναφερθεί στην Άσκηση II.16 :

$$\begin{aligned} |p_a - q_a| &= |\text{Tr}_A \hat{E}_a(\hat{\rho}_A - \hat{\sigma}_A)| = |\text{Tr}_{AB} \hat{E}_a(\hat{\rho}_{AB} - \hat{\sigma}_{AB})| \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_a |p_a - q_a| \leq \text{Tr}_{AB} |\hat{\rho}_{AB} - \hat{\sigma}_{AB}| = \|\hat{\rho}_{AB} - \hat{\sigma}_{AB}\|_1 \end{aligned} \quad (6)$$

## II.20 (Bell states).

Έστω οι τελεστές  $\hat{\Sigma}_{AB}^x = \hat{\sigma}_A^x \hat{\sigma}_B^x$ ,  $\hat{\Sigma}_{AB}^z = \hat{\sigma}_A^z \hat{\sigma}_B^z$  οι οποίοι δρουν σε κάποιον σύνθετο χώρο Hilbert  $\hat{H}_{AB} = \hat{H}_A \otimes \hat{H}_B$ ,  $\dim \hat{H}_A = \dim \hat{H}_B = 2$ .

(α) Να δείξετε ότι οι τελεστές μετατίθενται και να βρείτε τις ιδιοτιμές τους.

(β) Να βρείτε τις κοινές ιδιοκαταστάσεις τους.

### Απάντηση

(α) Αμέσως μπορούμε να δούμε ότι:

$$\begin{aligned} [\hat{\Sigma}_{AB}^x, \hat{\Sigma}_{AB}^z] &= \hat{\sigma}_A^x \hat{\sigma}_B^x \hat{\sigma}_A^z \hat{\sigma}_B^z - \hat{\sigma}_A^z \hat{\sigma}_B^z \hat{\sigma}_A^x \hat{\sigma}_B^x = \hat{\sigma}_A^x \hat{\sigma}_A^z \hat{\sigma}_B^x \hat{\sigma}_B^z - \hat{\sigma}_A^z \hat{\sigma}_A^x \hat{\sigma}_B^z \hat{\sigma}_B^x = \\ &= \hat{\sigma}_A^x \hat{\sigma}_A^z \hat{\sigma}_B^x \hat{\sigma}_B^z - (-\hat{\sigma}_A^x \hat{\sigma}_A^z)(-\hat{\sigma}_B^x \hat{\sigma}_B^z) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε ότι :

$$\left(\hat{\Sigma}_{AB}^x\right)^2 = \left(\hat{\Sigma}_{AB}^z\right)^2 = \hat{I}_{4 \times 4} \quad (2)$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι οι ιδιοτιμές των τελεστών είναι  $\pm 1$ . Πράγματι:

$$\hat{\Sigma}_{AB}^x |\varphi_{AB}\rangle = \lambda |\varphi_{AB}\rangle \rightarrow \left(\hat{\Sigma}_{AB}^x\right)^2 |\varphi_{AB}\rangle = \lambda^2 |\varphi_{AB}\rangle \rightarrow \lambda^2 = 1 \quad (3)$$

Επειδή οι τελεστές είναι αυτοσυζυγείς η τελευταία σημαίνει ότι  $\lambda = \pm 1$ .

(β) Ο χώρος στον οποίο δρουν οι τελεστές έχει διάσταση 4 και, επομένως, οι καταστάσεις που ψάχνουμε (και οι οποίες θα τον καλύπτουν πλήρως) είναι 4.

Ας γράψουμε κάποια από αυτές με τη πιο γενική δυνατή μορφή:

$$|\Phi_{AB}\rangle = \alpha|0_A 0_B\rangle + \beta|0_A 1_B\rangle + \gamma|1_A 0_B\rangle + \delta|1_A 1_B\rangle \quad (4)$$

Προκειμένου να είναι ιδιοκατάσταση του  $\hat{\Sigma}_{AB}^x$  θα πρέπει:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_A^x \hat{\sigma}_B^x |\Phi_{AB}\rangle &= \alpha|1_A 1_B\rangle + \beta|1_A 0_B\rangle + \gamma|0_A 1_B\rangle + \delta|0_A 0_B\rangle = \lambda(\alpha|0_A 0_B\rangle + \beta|0_A 1_B\rangle + \gamma|1_A 0_B\rangle + \delta|1_A 1_B\rangle) \\ &\rightarrow \alpha = \lambda\delta, \beta = \lambda\gamma, \gamma = \lambda\beta, \delta = \lambda\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι

$$\begin{aligned} |\Phi_{AB}(\lambda=1)\rangle &= \alpha(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) + \beta(|0_A 1_B\rangle + |1_A 0_B\rangle) \\ |\Phi_{AB}(\lambda=-1)\rangle &= \alpha(|0_A 0_B\rangle - |1_A 1_B\rangle) + \beta(|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle) \end{aligned} \quad (6)$$

Όπως θα περιμέναμε (λόγω του μηδενικού μεταθέτη) και οι δύο ιδιοτιμές παρουσιάζουν εκφυλισμό (αφού οι σχέσεις (6) ισχύουν για κάθε ζευγάρι  $\alpha, \beta: |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1/2$ ).

Εάν απαιτήσουμε η πρώτη από αυτές να είναι και ιδιοκατάσταση του  $\hat{\Sigma}_{AB}^z$  θα πρέπει

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_A^z \hat{\sigma}_B^z |\Phi_{AB}(\lambda=1)\rangle &= \alpha(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) - \beta(|0_A 1_B\rangle + |1_A 0_B\rangle) = \\ &= \pm \{ \alpha(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) + \beta(|0_A 1_B\rangle + |1_A 0_B\rangle) \} \end{aligned} \quad (7)$$

Η πρώτη από τις (6) θα είναι ιδιοκατάσταση του  $\hat{\Sigma}_{AB}^z$  με ιδιοτιμή +1 εάν  $\beta=0$ ,  $\alpha=1/\sqrt{2}$  και θα είναι ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή -1 εάν  $\alpha=0$ ,  $\beta=1/\sqrt{2}$ .

Επομένως, η κατάσταση

$$|\varphi_{AB}^{(+)}\rangle \equiv (|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) / \sqrt{2} \quad (8)$$

είναι κοινή ιδιοκατάσταση των δύο τελεστών με κοινή ιδιοτιμή +1:

$$\hat{\Sigma}_{AB}^x |\varphi_{AB}^{(+)}\rangle = \hat{\Sigma}_{AB}^z |\varphi_{AB}^{(+)}\rangle = |\varphi_{AB}^{(+)}\rangle \quad (9)$$

Η κατάσταση

$$|\psi_{AB}^{(+)}\rangle \equiv (|0_A 1_B\rangle + |1_A 0_B\rangle) / \sqrt{2} \quad (10)$$

είναι κοινή ιδιοκατάσταση των δύο τελεστών με ιδιοτιμές +1 και -1 αντίστοιχα:

$$\hat{\Sigma}_{AB}^x |\psi_{AB}^{(+)}\rangle = -\hat{\Sigma}_{AB}^z |\psi_{AB}^{(+)}\rangle = |\psi_{AB}^{(+)}\rangle \quad (11)$$

Με την ίδια λογική μπορούμε να εργαστούμε και για την δεύτερη από τις (6). Θα βρούμε ότι η κατάσταση:

$$|\varphi_{AB}^{(-)}\rangle \equiv (|0_A 0_B\rangle - |1_A 1_B\rangle) / \sqrt{2} \quad (12)$$

Είναι κοινή ιδιοκατάσταση των τελεστών  $\hat{\Sigma}_{AB}^x$ ,  $\hat{\Sigma}_{AB}^z$  με ιδιοτιμές  $-1$  και  $+1$  αντίστοιχα:

$$\hat{\Sigma}_{AB}^x |\varphi_{AB}^{(-)}\rangle = -\hat{\Sigma}_{AB}^z |\varphi_{AB}^{(-)}\rangle = -|\varphi_{AB}^{(-)}\rangle \quad (13)$$

Τέλος, η κατάσταση

$$|\psi_{AB}^{(-)}\rangle \equiv (|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle) / \sqrt{2} \quad (14)$$

Είναι κοινή ιδιοκατάσταση των δύο τελεστών με κοινή ιδιοτιμή  $-1$ :

$$\hat{\Sigma}_{AB}^x |\psi_{AB}^{(-)}\rangle = \hat{\Sigma}_{AB}^z |\psi_{AB}^{(-)}\rangle = -|\psi_{AB}^{(-)}\rangle \quad (15)$$

**Σχόλια.** Οι καταστάσεις (8), (10), (12) και (14) είναι βάση στον χώρο

$H_{AB}$ ,  $\dim H_{AB} = 4$ :

$$|\varphi_{AB}^{(+)}\rangle\langle\varphi_{AB}^{(+)}| + |\varphi_{AB}^{(-)}\rangle\langle\varphi_{AB}^{(-)}| + |\psi_{AB}^{(+)}\rangle\langle\psi_{AB}^{(+)}| + |\psi_{AB}^{(-)}\rangle\langle\psi_{AB}^{(-)}| = \hat{I}_{4 \times 4} \quad (16)$$

Κάθε μία από αυτές είναι εναγκαλισμένη και η ανηγμένη μήτρα πυκνότητας για καθένα από τα υποσυστήματα είναι:

$$\hat{\rho}_{A(B)}^R = \text{Tr}_{B(A)} |\varphi_{AB}^{(\pm)}\rangle\langle\varphi_{AB}^{(\pm)}| = \text{Tr}_{B(A)} |\psi_{AB}^{(\pm)}\rangle\langle\psi_{AB}^{(\pm)}| = \hat{I}_{2 \times 2}$$

## ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙΙ.

### ΧΡΟΝΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

#### (1) Τελεστές Kraus

Στην Ενότητα ΙΙ είδαμε ότι η χρονική εξέλιξη μιας καθαρής μήτρας πυκνότητας καθορίζεται από την εξίσωση von Neumann (ΙΙ.12). Όταν, όμως, το σύστημα το οποίο μας ενδιαφέρει είναι **ανοικτό** όταν, δηλαδή, αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του, η χρονική του εξέλιξη γίνεται εξαιρετικά μη τετριμμένη υπόθεση.

Για να αναλύσουμε το ζήτημα, θα ξεκινήσουμε από ένα διμερές σύστημα AB το οποίο θα θεωρήσουμε ότι είναι **κλειστό (ή απομονωμένο)**. Σε ένα τέτοιο σύστημα δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις άλλες εκτός από τις πιθανές αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα υποσυστήματά του. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε εύκολα να βρούμε τη χρονική του εξέλιξη:

$$\hat{\rho}_{AB}(t) = \hat{U}_{AB}(t, t_0) \hat{\rho}_{AB}(t_0) \hat{U}_{AB}^\dagger(t, t_0) \quad (\text{III.1})$$

Επομένως:

$$\hat{\rho}_A(t) = \text{Tr}_B \left[ \hat{U}_{AB}(t, t_0) \hat{\rho}_{AB}(t_0) \hat{U}_{AB}^\dagger(t, t_0) \right] \quad (\text{III.2})$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι η (III.1) δεν σημαίνει, απαραίτητα, ότι η κατάσταση  $\hat{\rho}_{AB}(t_0)$  είναι καθαρή. Σημαίνει ότι δεν υπάρχουν άλλα συστήματα με τα οποία να αλληλεπιδρά.

Θα μπορούσε, κάλλιστα, να είναι μια μη καθαρή κατάσταση:

$$\hat{\rho}_{AB}(t_0) = \sum_k p_k |\psi_{k,AB}(t_0)\rangle \langle \psi_{k,AB}(t_0)|, \quad p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1 \quad (\text{III.3})$$

Επειδή ο τελεστής της χρονικής εξέλιξης είναι γραμμικός, η χρονική εξέλιξη κάθε μίας από τις καθарές καταστάσεις στην επαλληλία (III.3), παράγει τη χρονική εξέλιξη (III.1) για τη συνολική, μη καθαρή, κατάσταση.

Η συνέχεια δεν είναι απλή αφού το ίχνος αναφέρεται στους βαθμούς ελευθερίας του B οι οποίοι, λόγω του εναγκαλισμού, εμπλέκονται με αυτούς του A. Για να προχωρήσει κανείς θα πρέπει να κάνει μια **σημαντική υπόθεση**: Ότι την αρχική χρονική στιγμή  $t_0$  στο σύνθετο σύστημα δεν υπήρχε εναγκαλισμός:

$$\hat{\rho}_{AB}(t_0) = \hat{\rho}_A(t_0) \otimes \hat{\rho}_B(t_0) \quad (\text{III.4})$$



Για λόγους πληρότητας, να σημειώσουμε ότι προκειμένου να μην υπάρχει εναγκαλισμός σε μια μικτή κατάσταση  $\hat{\rho}_{AB}(t_0)$  θα πρέπει αυτή να είναι **διαχωρίσιμη**:

$$\hat{\rho}_{AB}(t_0) = \sum_k p_k \hat{\rho}_A^{(k)}(t_0) \otimes \hat{\rho}_B^{(k)}(t_0), \quad p_k > 0, \quad \sum_k p_k = 1$$

Θα παραμείνουμε, όμως, στην έκφραση (III.4) αφενός για λόγους απλότητας και αφετέρου λόγω της γραμμικότητας των τελεστών που χρησιμοποιούμε, η οποία μας επιτρέπει να χειριστούμε κάθε όρο της επαλληλίας ξεχωριστά.

Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του ίχνους στην Εξ. (III.2) χρησιμοποιώντας ως βάση τις ιδιοκαταστάσεις της μήτρας πυκνότητας του συστήματος B:

$$\hat{\rho}_B(t_0)|\mu_B\rangle = \lambda_\mu |\mu_B\rangle, \quad \mu = 1, 2, \dots, D_B \quad (\text{III.5})$$

Έτσι, θα βρούμε:

$$\hat{\rho}_A(t) = \sum_{\mu, \nu} \hat{M}_{\mu\nu}^A(t, t_0) \hat{\rho}_A(t_0) \hat{M}_{\mu\nu}^{A\dagger}(t, t_0) \quad (\text{III.6})$$

Στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε τους τελεστές Kraus (βλ. Εξ. (I.76)):

$$\hat{M}_{\mu\nu}^A(t, t_0) = \sqrt{\lambda_\nu} \langle \mu_B | \hat{U}_{AB}(t, t_0) | \nu_B \rangle \quad (\text{III.7})$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$\sum_{\mu, \nu} \hat{M}_{\mu\nu}^{A\dagger}(t, t_0) \hat{M}_{\mu\nu}^A(t, t_0) = \hat{I}_{D_A \times D_A} \quad (\text{III.8})$$

Είναι πολύ σημαντικό να αναλύσουμε τις ιδιότητες του χρονικά εξελιγμένου τελεστή (III.6) αφού αυτός περιγράφει τη δυναμική μιας μη καθαρής κατάστασης.

Η πρώτη, μη αυτονόητη, παρατήρηση είναι ότι ο τελεστής (III.6) είναι τελεστής πυκνότητας υπό την έννοια ότι ικανοποιεί τις βασικές ιδιότητες που του επιτρέπουν να χαρακτηριστεί ως τέτοιος:

- Είναι μη αρνητικός (και επομένως, αυτοσυζυγής) τελεστής:  $\hat{\rho}_A(t) \geq 0$ .

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \langle \chi_A | \hat{\rho}_A(t) | \chi_A \rangle &= \sum_{\mu, \nu} \sum_k p_k \langle \chi_A | \hat{M}_{\mu\nu}^A | \psi_{k,A} \rangle \langle \psi_{k,A} | \hat{M}_{\mu\nu}^{A\dagger}(t, t_0) | \chi_A \rangle = \\ &= \sum_{\mu, \nu, k} p_k \left| \langle \chi_A | \hat{M}_{\mu\nu}^A | \psi_{k,A} \rangle \right|^2 \geq 0 \quad \forall | \chi_A \rangle \rightarrow \hat{\rho}_A(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Για την απόδειξη γράψαμε:  $\hat{\rho}_A(t_0) = \sum_k p_k |\psi_{k,A}\rangle \langle \psi_{k,A}|$ ,  $p_k > 0$ ,  $\sum_k p_k = 1$

• Το ίχνος του είναι μονάδα :  $\text{Tr} \hat{\rho}_A^R(t) = 1$ .

Πράγματι:

$$\text{Tr}_A \hat{\rho}_A^R(t) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_A(t_0) \sum_{\mu,\nu} \hat{M}_{\mu\nu}^{\Lambda\dagger} \hat{M}_{\mu\nu}^{\Lambda} \right] = \text{Tr} \hat{\rho}_A(t_0) = 1 \quad (\text{III.10})$$

• Για το τετράγωνο του τελεστή ισχύει ότι  $\text{Tr}(\hat{\rho}_A(t))^2 \leq 1$ .

Για την απόδειξη της τελευταίας, πολύ σημαντικής, ιδιότητας θα ορίσουμε την κατάσταση

$$|\tilde{\psi}_{\mu\nu k, A}\rangle \equiv \sqrt{p_k} \hat{M}_{\mu\nu}^{\Lambda} |\psi_{k, A}\rangle \equiv \hat{M}_{\mu\nu}^{\Lambda} |\tilde{\psi}_{k, A}\rangle \quad (\text{III.11})$$

Η κατάσταση αυτή δεν είναι κανονικοποιημένη αλλά, λόγω της (III.8) ισχύει ότι:

$$\sum_{\mu,\nu,k} \langle \tilde{\psi}_{\mu\nu k, A} | \tilde{\psi}_{\mu\nu k, A} \rangle = 1 \quad (\text{III.12})$$

Με τη βοήθειά της μπορούμε να δούμε ότι:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_A(t))^2 = \sum_{\mu,\nu,k,\mu',\nu',k'} \left| \langle \psi_{k', A} | \sqrt{p_{k'}} \hat{M}_{\mu'\nu'}^{\dagger} \hat{M}_{\mu\nu} \sqrt{p_k} | \psi_{k, A} \rangle \right|^2 = \sum_{\mu,\nu,k,\mu',\nu',k'} \left| \langle \tilde{\psi}_{\mu'\nu'k', A} | \tilde{\psi}_{\mu\nu k, A} \rangle \right|^2 \quad (\text{III.13})$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Schwartz βρίσκουμε:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_A(t))^2 \leq \left( \sum_{\mu,\nu,k} \langle \tilde{\psi}_{\mu\nu k, A} | \tilde{\psi}_{\mu\nu k, A} \rangle \right)^2 = 1 \quad (\text{III.14})$$

Η τελευταία ανισότητα καθορίζει εάν η χρονικά εξελιγμένη κατάσταση είναι καθαρή ή όχι και πρέπει να την αναλύσουμε περισσότερο.

Η κατάσταση (III.6) είναι καθαρή όταν, και μόνο όταν, ισχύει η ισότητα στην (III.14). Αυτό συμβαίνει εάν:

$$|\tilde{\psi}_{\mu\nu k, A}\rangle \sim |\tilde{\psi}_{\mu'\nu'k', A}\rangle \quad (\text{III.15})$$

Με τη σειρά της, η τελευταία ικανοποιείται μόνον εάν

$$|\tilde{\psi}_{\mu\nu k, A}\rangle = z_{\mu\nu} |\tilde{\Phi}_{k, A}\rangle, \quad |\tilde{\psi}_{\mu'\nu'k', A}\rangle = z_{\mu'\nu'} |\tilde{\Phi}_{k, A}\rangle \quad (\text{III.16})$$

όπου  $z_{\mu\nu}$  κάποιος μιγαδικός αριθμός και  $|\tilde{\Phi}_{k,A}\rangle$  κάποια κατάσταση του συστήματος A. Προφανώς, λόγω της (III.8), ισχύει ότι  $\sum_{\mu,\nu} |z_{\mu\nu}|^2 = 1$ .

Επειδή πάντα μπορούμε να βρούμε μοναδιακό μετασχηματισμό ώστε να γράψουμε  $|\tilde{\Phi}_{k,A}\rangle = \hat{V}_A |\tilde{\psi}_{k,A}\rangle$  βγάζουμε το συμπέρασμα ότι:

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_{\mu\nu k,A}\rangle &= \hat{M}_{\mu\nu}^A |\tilde{\psi}_{k,A}\rangle = \langle \mu_B | \hat{U}_{AB} | \nu_B \rangle |\tilde{\psi}_{k,A}\rangle = z_{\mu\nu} \hat{V}_A |\tilde{\psi}_{k,A}\rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \hat{U}_{AB} |\tilde{\psi}_{k,A}\rangle = \left( \sum_{\mu,\nu} z_{\mu\nu} |\mu_B\rangle \langle \nu_B| \right) \hat{V}_A |\tilde{\psi}_{k,A}\rangle \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Γράφοντας  $\sum_{\mu,\nu} z_{\mu\nu} |\mu_B\rangle \langle \nu_B| = \hat{V}_B$  βρίσκουμε αμέσως ότι:

$$\hat{U}_{AB} |\tilde{\psi}_{k,A}\rangle = \hat{V}_A \hat{V}_B |\tilde{\psi}_{k,A}\rangle \quad (\text{III.18})$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι η τελευταία ισχύει για τυχαία κατάσταση του συστήματος A βγάζουμε το άμεσο συμπέρασμα ότι η ισότητα στην (Γ.14) ισχύει όταν και μόνον όταν:

$$\hat{U}_{AB} = \hat{V}_A \hat{V}_B \quad (\text{III.19})$$

Με άλλα λόγια, η χρονικά εξελιγμένη κατάσταση είναι παραγοντοποιημένη όταν και μόνον όταν η αρχική κατάσταση και ο τελεστής χρονικής εξέλιξης μπορούν να παραγοντοποιηθούν. **Στην περίπτωση αυτή, εάν η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι καθαρή, θα παραμείνει καθαρή με την πάροδο του χρόνου.**

Η συνθήκη (III.19) σημαίνει ότι στη Χαμιλτονιανή του σύνθετου συστήματος (ή στη Χαμιλτονιανή που προκύπτει από την αρχική μέσω κάποιου μοναδιακού μετασχηματισμού) δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις. Το άμεσο συμπέρασμα είναι ότι, σε μια τέτοια περίπτωση, η μήτρα πυκνότητας του σύνθετου συστήματος είναι σε κάθε χρονική στιγμή, παραγοντοποιημένη:

$$\hat{\rho}_{AB}(t) = \hat{U}_{AB} \hat{\rho}_{AB}(t_0) \hat{U}_{AB}^\dagger = \hat{V}_A \hat{\rho}_A(t_0) \hat{V}_A^\dagger \hat{V}_B \hat{\rho}_B(t_0) \hat{V}_B^\dagger = \hat{\rho}_A(t) \hat{\rho}_B(t) \quad (\text{III.20})$$

Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από την προηγούμενη ανάλυση είναι ότι η χρονική εξέλιξη των ανοικτών συστημάτων, όπως περιγράφεται από την (III.6), είναι, γενικά, **μη αντιστρεπτή διαδικασία** σε αντίθεση με τη χρονική εξέλιξη κλειστών συστημάτων η οποία, όπως διαπιστώσαμε στις προηγούμενες ενότητες, είναι αντιστρεπτή. Πράγματι, εφόσον η αρχική κατάσταση είναι παραγοντοποιημένη, ο μόνος τρόπος η χρονική εξέλιξη να είναι αντιστρεπτή είναι να παραγοντοποιείται και η εξελιγμένη κατάσταση.

Όπως είδαμε, όμως, αυτό δεν είναι εν γένει δυνατόν. Συμβαίνει εάν και μόνον εάν ο τελεστής χρονικής εξέλιξης μπορεί να παραγοντοποιηθεί. Σε μια τέτοια περίπτωση:

$$\hat{M}_{\mu\nu}^A = \langle \mu_B | \hat{V}_A \hat{V}_B | \nu_B \rangle = \hat{V}_A \langle \mu_B | \hat{V}_B | \nu_B \rangle \equiv \hat{V}_A u_{\mu\nu}, \quad \sum_{\mu,\nu} |u_{\mu\nu}|^2 = 1 \quad (\text{III.21})$$

Επομένως:

$$\hat{\rho}_A(t) = \sum_{\mu,\nu} \hat{M}_{\mu\nu}^A \hat{\rho}_A(t_0) \hat{M}_{\mu\nu}^{A\dagger} = \left( \sum_{\mu,\nu} |u_{\mu\nu}|^2 \right) \hat{V}_A \hat{\rho}_A(t_0) \hat{V}_A^\dagger = \hat{V}_A \hat{\rho}_A(t_0) \hat{V}_A^\dagger \quad (\text{III.22})$$

Όπως είναι προφανές από τον ορισμό (III.7) η μορφή των τελεστών Kraus εξαρτάται από τη βάση  $\{|\mu_B\rangle\}$ . Εάν διαλέξουμε μια διαφορετική βάση  $\{|\alpha_B\rangle; \alpha=1,2,\dots,D_B\}$  η οποία να σχετίζεται με την αρχική μέσω ενός μοναδιακού μετασχηματισμού  $|\mu_B\rangle = \sum_{\alpha} \hat{V}_{\mu\alpha}^B |\alpha_B\rangle$  θα πάρουμε:

$$\hat{M}_{\mu\nu}^A(t,t_0) = \sum_{\alpha,\beta} (\hat{V}^{B\dagger})_{\alpha\mu} (\hat{V}^B)_{\nu\beta} \langle \alpha_B | \hat{U}_{AB}(t,t_0) | \beta_B \rangle \equiv \sum_{\alpha,\beta} (\hat{V}^{B\dagger})_{\alpha\mu} (\hat{V}^B)_{\nu\beta} \hat{N}_{\alpha\beta}^A(t,t_0) \quad (\text{III.23})$$

Επομένως βρίσκουμε:

$$\hat{\rho}_A(t) = \sum_{\alpha,\beta} \hat{N}_{\alpha\beta}^A \hat{\rho}(t_0) \hat{N}_{\alpha\beta}^{\dagger A} \quad (\text{III.24})$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι η αναπαράσταση του χρονικά εξελιγμένου τελεστή πυκνότητας μέσω τελεστών Kraus, δεν είναι μοναδική. Εν τούτοις τα συμπεράσματα που εξήχθησαν είναι γενικά.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να συζητήσουμε το πλήθος των όρων οι οποίοι εμφανίζονται στο δεξί μέλος της Εξ. (III.6). Σε μια πρώτη ανάγνωση φαίνεται να συνδέεται με τη διάσταση του συστήματος B. Εντούτοις, ο καθοριστικός παράγοντας για το πλήθος των τελεστών, που είναι απαραίτητοι για τον προσδιορισμό της χρονικά εξελιγμένης κατάστασης, είναι η διάσταση του συστήματος A. Ο λόγος είναι απλός:

Ο τελεστής πυκνότητας  $\hat{\rho}_A$  είναι στοιχείο ενός χώρου Liouville διάστασης  $D_A^2$  και, επομένως, το πλήθος των ανεξάρτητων τελεστών Kraus είναι, το πολύ,  $D_A^2 - 1$  (λόγω της δεσμευτικής σχέσης (III.8)). Εάν συμβαίνει να είναι  $D_B > D_A$ , στην τελική έκφραση (III.10) εμφανίζονται κατάλληλοι συνδυασμοί των αρχικών τελεστών. Η λέξη «κατάλληλοι» σημαίνει ότι οι ιδιότητες (III.9), (III.10) και (III.14) εξακολουθούν να πληρούνται.

Για να αναλύσουμε, με κάποια αυστηρότητα, το ζήτημα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια βάση τελεστών στον χώρο Liouville του συστήματος A (βλ. εδάφιο I.2)

$$\{\hat{F}_i^A, i=1, \dots, D_A^2\}, \quad (\hat{F}_i^A | \hat{F}_j^A) = \text{Tr}_A (\hat{F}_i^{A\dagger} \hat{F}_j^A) = \delta_{ij} \quad (\text{III.25})$$

και να γράψουμε:

$$\hat{M}_{\mu\nu}^A(t, t_0) = \sum_{i=1}^{D_A^2} \hat{F}_i^A \text{Tr}_A (\hat{F}_i^{A\dagger} \hat{M}_{\mu\nu}^A(t, t_0)) \equiv \sum_{i=1}^{D_A^2} \hat{F}_i^A c_{i,\mu\nu}(t, t_0) \quad (\text{III.26})$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην Εξ. (III.6) βρίσκουμε:

$$\hat{\rho}_A(t) = \sum_{i,j=1}^{D_A^2} c_{ij}(t, t_0) \hat{F}_i^A \hat{\rho}_A(t_0) \hat{F}_j^{A\dagger} \quad (\text{III.27})$$

Εδώ ορίσαμε:

$$c_{ij}(t, t_0) = \sum_{\mu,\nu=1}^{D_B} c_{i,\mu\nu}(t, t_0) \bar{c}_{j,\mu\nu}(t, t_0) \quad (\text{III.28})$$

Το αποτέλεσμα (III.27) αποδεικνύει τα σχόλια για το πλήθος των όρων στο δεξί μέλος της Εξ. (III.6).

Η σχέση (III.27) μπορεί να αντιμετωπισθεί και ως δράση ενός υπερ-τελεστή (super-operator) στην αρχική κατάσταση του συστήματος A:

$$\hat{\rho}_A(t) = \mathbf{S}_t(\hat{\rho}_A(t_0)) \quad (\text{III.29})$$

όπου ορίσαμε τον υπερ-τελεστή:

$$\mathbf{S}_t(\bullet) \equiv \sum_{i,j=1}^{D_A^2} c_{ij}(t, t_0) \hat{F}_i^A(\bullet) \hat{F}_j^{A\dagger} \quad (\text{III.30})$$

Η δράση του υπερ-τελεστή (III.10) εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο των δράσεων οι οποίες μετασχηματίζουν τελεστές πυκνότητας σε τελεστές πυκνότητας. Οι δράσεις αυτές, για τις οποίες θα μιλήσουμε αργότερα, αναφέρονται ως **quantum channels** ή TPCP (Trace Preserving Completely Positive) maps και χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένες ιδιότητες έτσι ώστε το αποτέλεσμα της δράσης τους να πληροί τις συνθήκες (III.9), (III.10) και (III.14) που συζητήσαμε προηγουμένως.

## (2) Εξίσωση Χρονικής Εξέλιξης.

Όταν η κατάσταση ενός συστήματος αντιπροσωπεύεται από καθαρή μήτρα πυκνότητας, η χρονική του εξέλιξη διέπεται από την εξίσωση von Neumann (II.12).

Η εξίσωση αυτή, η οποία είναι το αντίστοιχο της εξίσωσης Schrödinger, εκφράζει τη δυναμική ενός απομονωμένου κβαντικού συστήματος με τον ίδιο τρόπο που οι εξισώσεις κίνησης εκφράζουν τη δυναμική ενός κλασικού συστήματος.

Όπως διαπιστώσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, όταν ένα κβαντικό σύστημα είναι ανοικτό τα πράγματα αλλάζουν ριζικά. Ανάμεσα σε όλα τα άλλα, δεν είναι καθόλου δεδομένο ότι μπορεί να κατασκευαστεί μια διαφορική εξίσωση η οποία να παίζει τον ρόλο της εξίσωσης von Neumann.

Για να ξεκινήσουμε, πρέπει να πούμε ότι μια εξίσωση για τη χρονική εξέλιξη μιας μη καθαρής μήτρας πυκνότητας θα πρέπει, αναγκαστικά, να είναι πρώτης τάξης ως προς τον χρόνο αφού αφορά στην κβαντική μηχανική. Η ύπαρξη της σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε κάποιον υπερ-τελεστή τέτοιον ώστε:

$$\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_A(t) = \mathbf{L}(\hat{\rho}_A(t)) \quad (\text{III.31})$$

Για να διερευνήσουμε τη δυνατότητα μιας τέτοιας εξίσωσης μπορούμε να ξεκινήσουμε από την εξίσωση (III.30) του προηγούμενου εδαφίου η βάση της οποίας είναι η υπόθεση ότι η αρχική κατάσταση του σύνθετου συστήματος είναι παραγοντοποιημένη. Εάν θεωρήσουμε μια διαμέριση του χρόνου εύρους  $\delta t$  η εξίσωση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι:

$$\hat{\rho}(t_0 + \delta t) = \sum_{i,j=1}^{D_A^2} c_{ij}(t_0 + \delta t, t_0) \hat{F}_i^A \hat{\rho}_A(t_0) \hat{F}_j^{A\dagger} \equiv \mathbf{S}_{\delta t}(\hat{\rho}_A(t_0)) \quad (\text{III.32})$$

Στην περίπτωση των κλειστών συστημάτων η ύπαρξη της εξίσωσης Schrödinger συνδέεται με την ύπαρξη του τελεστή χρονικής εξέλιξης βασική ιδιότητα του οποίου είναι η δυνατότητα σταδιακής εφαρμογής του (δες Εξ. (I.44)). Στην περίπτωση των ανοικτών συστημάτων αυτό δεν ισχύει. Πράγματι, αν προσπαθήσουμε να φθάσουμε στη στιγμή  $t + 2\delta t$  ξεκινώντας από τη στιγμή  $t + \delta t$  θα διαπιστώσουμε ότι:

$$\hat{\rho}_A(t_0 + 2\delta t) = \mathbf{S}_{2\delta t}(\hat{\rho}_A(t_0)) \neq \mathbf{S}_{\delta t}(\hat{\rho}_A(t_0 + \delta t)) = \mathbf{S}_{\delta t} \circ \mathbf{S}_{\delta t}(\hat{\rho}_A(t_0)) \quad (\text{III.33})$$

Γενικότερα, διαδοχική εφαρμογή του υπερτελεστή (III.30) δεν παράγει διαδοχικές χρονικές μεταβολές:

$$\hat{\rho}_A(t + \delta t) = \mathbf{S}_{t+\delta t}(\hat{\rho}_A(t_0)) \neq \mathbf{S}_{\delta t}(\hat{\rho}_A(t)) \quad (\text{III.34})$$

Ο λόγος για τον οποίο δεν μπορούμε να ακολουθήσουμε μια τέτοια σταδιακή πορεία είναι το γεγονός ότι η κατάσταση (III.32) είναι, εν γένει, μη καθαρή. Αυτό σημαίνει ότι στην διμερή κατάσταση  $\hat{\rho}_{AB}(t), t > t_0$ , τα υποσυστήματα είναι εναγκαλισμένα και επομένως ότι δεν ισχύει η βασική υπόθεση της παραγοντοποίησης:

$$\hat{\rho}_{AB}(t) \neq \hat{\rho}_A(t) \otimes \hat{\rho}_B(t) \quad (\text{III.35})$$

Όπως πιστοποιήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, η τελευταία σχέση είναι το αναπόδραστο αποτέλεσμα της ύπαρξης αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στα δύο υποσυστήματα. Η συνακόλουθη συνεχής μεταφορά πληροφοριών ανάμεσά τους οδηγεί στην ανάπτυξη κβαντικών συσχετίσεων και στον εναγκαλισμό τους.

Σε κάθε περίπτωση, και για να καταλήξουμε σε μια διαφορική εξίσωση για την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας, θα έπρεπε να υπάρχει υπερ-τελεστής τέτοιος ώστε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_A^R(t + \delta t) &= \mathbf{S}_{\delta t}(\hat{\rho}_A^R(t)) \underset{\delta t \rightarrow 0}{=} \hat{\rho}_A^R(t) + \frac{\delta t}{\hbar} \mathbf{L}(\hat{\rho}_A^R(t)) \rightarrow \\ &\rightarrow \hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_A^R(t) = \mathbf{L}(\hat{\rho}_A^R(t))\end{aligned}\quad (\text{III.36})$$

Στη σχέση αυτή συμβολίσαμε

$$\mathbf{S}_{\delta t}(\bullet) \underset{\delta t \rightarrow 0}{=} \left( \mathbf{I} + \frac{\delta t}{\hbar} \mathbf{L} \right) (\bullet) \quad (\text{III.37})$$

Είναι προφανές ότι, λόγω της ύπαρξης αλληλεπιδράσεων, οι σχέσεις (III.36), (III.37), εν γένει, δεν ισχύουν για τους υπερ-τελεστές (III.30). Από την άλλη μεριά, χωρίς αυτές είναι αδύνατο να κατασκευαστεί διαφορική εξίσωση η οποία να χαρακτηρίζει τη χρονική εξέλιξη μιας μη καθαρής κατάστασης.

Είναι, επομένως, φανερό ότι η δυνατότητα κατασκευής μιας τέτοιας εξίσωσης αναγκαστικά συνδέεται με σημαντικές υποθέσεις και προσεγγίσεις. Τέτοιου τύπου πρωτοβάθμιες εξισώσεις ανήκουν στην κατηγορία των λεγόμενων εξισώσεων **Master**, οι οποίες συναντώνται τόσο στην κλασική όσο και την κβαντική φυσική και συνδέονται, κυρίως, με στοχαστικές διαδικασίες. Στο πλαίσιο των ανοικτών κβαντικών συστημάτων μια τέτοια εξίσωση είναι η λεγόμενη εξίσωση GKSL (από τα ονόματα των Gorini, Kossakowski, Sudarshan, Lindblad) η οποία, συνήθως, αναφέρεται ως **εξίσωση Lindblad** [16-17]

### (3) Προσέγγιση Markov.

Η πιο βασική από τις προσεγγίσεις στις οποίες στηρίζεται η εξίσωση Lindblad, είναι η προσέγγιση **Markov** η οποία, χονδρικά, σημαίνει ότι, ανά πάσα χρονική στιγμή, η μήτρα πυκνότητας του σύνθετου συστήματος μπορεί να παραγοντοποιηθεί. Επειδή αυτή η απλοϊκή διατύπωση είναι, αν την πάρει κάποιος κατά γράμμα, λάθος αλλά και επειδή η προσέγγιση Markov βρίσκεται στον πυρήνα της εξίσωσης Lindblad, θα πρέπει να την συζητήσουμε περισσότερο.

Το κλειδί στην προσέγγιση Markov είναι η ύπαρξη τριών διαφορετικών χρονικών κλιμάκων. Η πρώτη από αυτές,  $\tau_B$ , αναφέρεται στο σύστημα B το οποίο έχει τον ρόλο του περιβάλλοντος και ορίζει τον χρόνο μετά τον οποίο οι εσωτερικές του συσχετίσεις

μπορούν να αγνοηθούν. Στα μεγάλα συστήματα (όπως συνήθως είναι το περιβάλλον) υπάρχουν πολλά ενεργειακά επίπεδα τα οποία, για επαρκώς μικρό χρονικό διάστημα και λόγω της σχέσης αβεβαιότητας ενέργεια-χρόνου, μπορούν να διεγερθούν. Υπάρχουν, επομένως, πολλές συχνότητες ταλάντωσης οι οποίες χαρακτηρίζουν τα φυσικά μεγέθη που το αφορούν. Η μικρότερη από αυτές,  $\omega_B$ , ορίζει τη χρονική κλίμακα  $\tau_B \sim (\hbar\omega_B)^{-1}$  μετά την οποία το περιβάλλον επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση μετά από κάποια διαταραχή.

Η δεύτερη χρονική κλίμακα,  $T_A$ , αφορά στο υποσύστημα A. Είναι η χαρακτηριστική κλίμακα των αλλαγών που επιφέρει η αλληλεπίδρασή του με το περιβάλλον:

$$\Delta E_A \sim \hbar / T_A \quad (\text{III.37})$$

Στην τελευταία έκφραση,  $\Delta E_A$  είναι η διασπορά των τιμών της ενέργειας του συστήματος A λόγω της αλληλεπίδρασης με το B και είναι ένα μέτρο της έντασής της:  $\Delta E_A \sim V$ . Για να έχει βάση η προσέγγιση Markov θα πρέπει

$$T_A \gg \tau_B \quad (\text{III.38})$$

Η φυσική ερμηνεία αυτής της ανισότητας είναι ότι οι συσχετίσεις στο περιβάλλον σβήνουν πολύ πριν το σύστημα A αλλάξει σημαντικά. Αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (III.37) και (III.38) μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι

$$(\Delta E_A) \tau_B / \hbar \ll 1 \quad (\text{III.39})$$

Η κλίμακα  $\tau_B$  εξαρτάται από τις παραμέτρους του περιβάλλοντος ενώ η (III.37) εξαρτάται από την ένταση της αλληλεπίδρασης και τις παραμέτρους του συστήματος A. Η σχέση (III.39) δηλώνει ότι, για να ισχύει η υπόθεση Markov είναι απαραίτητο η αλληλεπίδραση συστήματος-περιβάλλοντος να είναι, σχετικά, ασθενής. Η συνθήκη αυτή είναι πολύ σημαντική διότι η κατασκευή της εξίσωσης Lindblad στηρίζεται στη χρονοεξαρτημένη θεωρία διαταραχών (και, βέβαια, στην υπόθεση της σύγκλισής της). Η τρίτη κλίμακα αφορά τη διαμέριση  $\delta t$  του χρόνου στην οποία ήδη αναφερθήκαμε και η οποία ορίζει το χρονικό βήμα παρατήρησης του συστήματος. Στο πλαίσιο της προσέγγισης Markov η μονάδα χρόνου  $\delta t$  είναι επαρκώς μικρή ώστε να παρακολουθούνται οι αλλαγές του συστήματος A αλλά αρκετά μεγάλη ώστε μέσα σε αυτή να έχουν σβήσει οι διακυμάνσεις του περιβάλλοντος:

$$\tau_B \ll \delta t \ll T_A \quad (\text{III.40})$$

Στο πλαίσιο της προσέγγισης Markov μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει υπερ-τελεστής τέτοιος ώστε:

$$\mathbf{S}_{t+\delta t}(\hat{\rho}_A(t_0)) \approx \mathbf{S}_{\delta t}(\hat{\rho}_A(t)) \quad (\text{III.41})$$



Η πλήρης απόδειξη αυτής της σχέσης και η συνακόλουθη κατασκευή της εξίσωσης

$$\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_A(t) \underset{\text{Born-Markov}}{\approx} \mathbf{L}(\hat{\rho}_A(t)) \quad (\text{III.42})$$

στηρίζεται στην κλιμάκωση (III.40), στο λήμμα (III.39) και στην χρονικά εξαρτώμενη θεωρία διαταραχών από την οποία διατηρείται μόνο ο πρώτος μη τετριμμένος όρος (όρος Born) ο οποίος είναι τάξης  $O(V^2)$ . Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο η προσέγγιση στην οποία στηρίζεται η εξίσωση (III.36) αναφέρεται και ως **προσέγγιση Born-Markov**. Όπως είναι προφανές, η σχέση (III.41) θα ίσχυε εάν μπορούσαμε να γράψουμε

$$\hat{\rho}_{AB}(t) \approx \hat{\rho}_A^R(t) \otimes \hat{\rho}_B(t_0) \quad (\text{III.43})$$

Για την λεπτομερή ανάλυση του ζητήματος παραπέμπουμε στην αναφορά [...]. Εδώ μπορούμε να πούμε ότι η σχέση (III.43) μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο στο πλαίσιο της προσέγγισης Born-Markov και μόνο στο εσωτερικό της σχέσης (III.41). Για τη φυσική της ερμηνεία πρέπει να σκεφθούμε ότι ο χρόνος στην (III.39) μετράται σε μονάδες  $\delta t$ :

$$t = t_0 + n\delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.44})$$

Το χρονικό βήμα  $\delta t$  είναι αρκετά μεγάλο ώστε, μέσα σ' αυτό, οι συσχετίσεις στο σύστημα B να έχουν αποσβεσθεί και αυτό να έχει επανέλθει στην αρχική του κατάσταση πριν το σύστημα A αλλάξει σημαντικά.

#### **(4) Εξίσωση Lindblad.**

Για την κατασκευή της εξίσωσης Lindblad μπορεί κανείς να ακολουθήσει δύο διαφορετικούς δρόμους οι οποίοι συγκλίνουν στο ίδιο αποτέλεσμα. Καθένας από αυτούς έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Ο πρώτος από αυτούς στηρίζεται στον υπερτελεστή (Γ.30) ενώ ο δεύτερος ξεκινάει από την εξίσωση von Neumann για την μήτρα πυκνότητας του σύνθετου συστήματος. Στο εδάφιο αυτό θα ακολουθήσουμε τον πρώτο δρόμο αφήνοντας τον δεύτερο για το επόμενο.

Ο πρώτος δρόμος κατασκευής θεωρεί δεδομένο ότι:

$$\mathbf{S}_{t+t'} = \mathbf{S}_t \mathbf{S}_{t'}; \quad t, t' \geq t_0 \quad (\text{III.45})$$

Όπως είπαμε, η ιδιότητα αυτή είναι απολύτως καθοριστική για την κατασκευή της εξίσωσης Lindblad και, από την πλευρά της φυσικής, μπορεί να υποστηριχθεί στο πλαίσιο της προσέγγισης Born-Markov. Στο βαθμό που ισχύει δηλώνει ότι οι υπερτελεστές (Γ.45) συγκροτούν ημι-ομάδα (**quantum dynamical semi-group**).

Όπως και να είναι, ξεκινώντας από την (III.45) μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\hbar}{\delta t}(\hat{\rho}_A(t+\delta t)-\hat{\rho}_A(t))=\frac{\hbar}{\delta t}(\mathbf{S}_{\delta t}(\hat{\rho}_A(t))-\hat{\rho}_A(t))\equiv\mathbf{L}(\hat{\rho}_A(t)) \quad (\text{III.46})$$

Στην προηγούμενη παράγραφο διαπιστώσαμε (βλ. Εξ. (III.32)) ότι

$$\mathbf{S}_{\delta t}(\bullet)=\sum_{i,j=1}^{D_A^2}c_{ij}(\delta t)\hat{F}_i^A(\bullet)\hat{F}_j^{A\dagger} \quad (\text{III.47})$$

Στη βάση των τελεστών (III.25) υπάρχει οπωσδήποτε και ο ταυτοτικός τελεστής τον οποίο θα διαλέξουμε να αντιστοιχεί στον τελευταίο δείκτη:

$$\hat{F}_0^A=\frac{1}{\sqrt{D_A}}\hat{I}^A \quad (\text{III.48})$$

Στην τελευταία σχέση μετονομάσαμε τον δείκτη " $D_A^2$ " σε "0" για λόγους οικονομίας. Η κανονικοποίηση είναι τέτοια ώστε  $\text{Tr}_A(\hat{F}_0^{A\dagger}\hat{F}_0^A)=1$ .

Μετά από αυτά μπορούμε να γράψουμε την (III.46) διαχωρίζοντας τη συνεισφορά του τελευταίου όρου:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\hat{\rho}_A(t))&=\frac{1}{D_A}\frac{c_{00}(\delta t)-D_A}{\delta t}\hat{\rho}_A(t)+\frac{1}{\sqrt{D_A}}\sum_{i=1}^{D_A-1}\left[\frac{c_{i0}(\delta t)}{\delta t}\hat{F}_i^A\hat{\rho}_A(t)+\frac{c_{0i}(\delta t)}{\delta t}\hat{\rho}_A(t)\hat{F}_i^{A\dagger}\right]+ \\ &+\sum_{i,j=1}^{D_A-1}\frac{c_{ij}(\delta t)}{\delta t}\hat{F}_i^A\hat{\rho}_A(t)\hat{F}_j^{A\dagger} \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

Η τυπική συνέχεια είναι να θεωρήσουμε το όριο  $\delta t \rightarrow 0$  ώστε να μετατρέψουμε την Εξ. (III.46) σε διαφορική εξίσωση. Εν τούτοις, στο πλαίσιο της προσέγγισης Markov, η οποία είναι στη βάση της τελευταίας εξίσωσης, θα πρέπει  $\delta t \gg \tau_B$  έτσι ώστε να αποσβένονται οι έντονες διακυμάνσεις του περιβάλλοντος οι οποίες θα έκαναν το μαθηματικό όριο  $\delta t \rightarrow 0$  προβληματικό. Για τον λόγο αυτόν η (III.49) θα πρέπει να αναλυθεί στο όριο  $\delta t/T_A \ll 1$ . Στο όριο αυτό και στο πλαίσιο της προσέγγισης Born οι συντελεστές στην (III.49) μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητοι του χρόνου:

$$\frac{c_{00}(\delta t)-D_A}{\delta t} \underset{\delta t/T_A \ll 1}{\approx} a_{00}, \quad \frac{c_{i0}(\delta t)}{\delta t} \underset{\delta t/T_A \ll 1}{\approx} a_{i0}, \quad \frac{c_{0i}(\delta t)}{\delta t} \underset{\delta t/T_A \ll 1}{\approx} a_{0i}, \quad \frac{c_{ij}(\delta t)}{\delta t} \underset{\delta t/T_A \ll 1}{\approx} a_{ij} \quad (\text{III.50})$$

Η δομή των όρων αυτών οφείλεται στο γεγονός ότι

$$\mathbf{S}_0(\bullet)=\sum_{i,j=1}^{D_A^2}c_{ij}(0)\hat{F}_i^A(\bullet)\hat{F}_j^{A\dagger}=\hat{I}^A \rightarrow c_{00}(0)=D^A, \quad c_{ij}(0)=0 \quad \forall i, j \neq 0 \quad (\text{III.51})$$

και στην υπόθεση ότι , στο πλαίσιο της προσέγγισης Markov, οι συντελεστές (III.50) είναι πεπερασμένες ποσότητες ανεξάρτητες του βήματος  $\delta t$ . Η υπόθεση αυτή, αν και ευλογοφανής καθώς συνδέεται με τον κβαντικό χαρακτήρα του περιβάλλοντος, δεν είναι προφανής. Για την απόδειξή της πρέπει κάποιος να αναφερθεί στις λεπτομέρειες της αλληλεπίδρασης συστήματος-περιβάλλοντος (βλέπε το επόμενο εδάφιο). Μπορούμε να προχωρήσουμε περισσότερο ορίζοντας τους τελεστές:

$$\hat{F}^A \equiv \frac{1}{D_A} \sum_{j=1}^{D_A^2-1} a_{j0} \hat{F}_j^A, \quad \hat{G}^A \equiv \frac{1}{2D_A} a_{00} \hat{I}^A + \frac{1}{2} (\hat{F}^A + \hat{F}^{A\dagger}) \quad (\text{III.52})$$

και

$$\hat{H}_A^R \equiv \frac{i}{2} (\hat{F}^A - \hat{F}^{A\dagger}) \quad (\text{III.53})$$

Με τη βοήθειά τους μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (III.49) με τη μορφή:

$$\mathbf{L}(\hat{\rho}_A(t)) = -i [\hat{H}_A^R, \hat{\rho}_A(t)] + \{\hat{G}^A, \hat{\rho}_A(t)\} + \sum_{i,j=1}^{D_A^2-1} a_{ij} \hat{F}_i^A \hat{\rho}_A(t) \hat{F}_j^{A\dagger} \quad (\text{III.54})$$

Από την (III.46) γνωρίζουμε ότι  $\text{Tr}_A \mathbf{L}(\hat{\rho}_A(t)) = 0$ . Επομένως μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι:

$$\text{Tr}_A \left( 2\hat{G}^A \hat{\rho}_A(t) + \sum_{i,j=1}^{D_A^2-1} a_{ij} \hat{F}_i^A \hat{\rho}_A(t) \hat{F}_j^{A\dagger} \right) = 0 \rightarrow \hat{G}^A = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{D_A^2-1} a_{ij} \hat{F}_i^A \hat{\rho}_A(t) \hat{F}_j^{A\dagger} \quad (\text{III.55})$$

Συνδυάζοντας τις Εξ. (III.54) και (III.55) καταλήγουμε στην:

$$\mathbf{L}(\hat{\rho}_A(t)) = -i [\hat{H}_A^R, \hat{\rho}_A(t)] + \sum_{i,j=1}^{D_A^2-1} a_{ij} \left( \hat{F}_i^A \hat{\rho}_A(t) \hat{F}_j^{A\dagger} - \frac{1}{2} \{ \hat{F}_i^A \hat{F}_j^{A\dagger}, \hat{\rho}_A(t) \} \right) \quad (\text{III.56})$$

Το αριστερό μέλος αυτής της σχέσης, σύμφωνα με την (III.46), είναι:

$$\mathbf{L}(\hat{\rho}_A(t)) = \frac{\hbar}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} dt' \frac{d}{dt'} \hat{\rho}_A(t') = \frac{\hbar}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} dt' \frac{d}{dt'} \text{Tr}_B \hat{\rho}_{AB}(t') \quad (\text{III.57})$$

Η τελευταία έκφραση δείχνει ότι ο υπερ-τελεστής  $\mathbf{L}$  παρουσιάζει τη μέση συμπεριφορά της  $d\hat{\rho}_A/dt$  στο διάστημα  $(t, t + \delta t)$ . Αυτή η μέση τιμή οδηγεί στην εξομάλυνση (**coarse graining**) των έντονων διακυμάνσεων που μπορούν να προκληθούν στο σύστημα B για χρονικά διαστήματα  $\tau_B \ll \delta t$ .

Θεωρώντας ότι, σε σύγκριση με τα διαστατά μεγέθη των συστημάτων  $\tau_B / T_A \rightarrow 0$ , θα γράψουμε  $\mathbf{L}(\hat{\rho}_A) \approx \hbar d\hat{\rho}_A / dt$  και, επομένως, θα μετατρέψουμε την Εξ. (III.57) σε διαφορική εξίσωση (παραλείποντας τον προφανή δείκτη A) :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}^R, \hat{\rho}(t)] + \frac{1}{\hbar} \sum_{i,j=1}^{D_A^2-1} a_{ij} \left( \hat{F}_i \hat{\rho}(t) \hat{F}_j^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{F}_i \hat{F}_j^\dagger, \hat{\rho}(t) \} \right) \quad (\text{III.58})$$

Η έκφραση αυτή είναι γνωστή ως η **πρώτη standard form** της εξίσωσης Lindblad. Μπορούμε να φθάσουμε στην standard form μετά από δύο παρατηρήσεις.

Η πρώτη είναι ότι ο πίνακας  $a \doteq (a_{ij})$  είναι αυτοσυζυγής και μη αρνητικός. Πράγματι:

$$\sum_{i,j} \bar{x}_i a_{ij} x_j \stackrel{(\text{Γ.28})}{=} \sum_{i,j} \sum_{\mu,\nu=1}^{D_B} \bar{x}_i \bar{c}_{i,\mu\nu} c_{j,\mu\nu} x_j = \sum_{\mu,\nu=1}^{D_B} \left| \sum_j c_{j,\mu\nu} x_j \right|^2 \geq 0 \quad (\text{III.59})$$

Η δεύτερη είναι ότι ο πίνακας αυτός μπορεί να διαγωνοποιηθεί μέσω ενός μοναδιακού μετασχηματισμού:

$$\hat{V} \hat{a} \hat{V}^\dagger = \hat{\Gamma} \doteq \delta_{ij} \Gamma_j, \quad \Gamma_j \geq 0 \quad (\text{III.60})$$

Γράφοντας

$$\hat{L}_i = \sum_{j=1}^{D_A^2-1} V_{ij} \hat{F}_j \quad (\text{III.61})$$

καταλήγουμε στην **standard form** της εξίσωσης Lindblad:

$$\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -i[\hat{H}^R, \hat{\rho}(t)] + \sum_{j=1}^{D_A^2-1} \Gamma_j \left( \hat{L}_j \hat{\rho}(t) \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_j \hat{L}_j^\dagger, \hat{\rho}(t) \} \right) \quad (\text{III.62})$$

Ορισμένες παρατηρήσεις είναι χρήσιμες στο σημείο αυτό.

Εάν δεν υπήρχε η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα δύο συστήματα ο δεύτερος όρος της τελευταίας εξίσωσης θα απουσίαζε, ο τελεστής  $\hat{H}^R$  θα ταυτιζόταν με την αρχική Χαμιλτονιανή του συστήματος A και η εξίσωση (III.62) θα αντιστοιχούσε στην εξίσωση von Neumann. Η ύπαρξη της αλληλεπίδρασης οδηγεί στη μεταφορά στο περιβάλλον των πληροφοριών που αφορούν το σύστημα A, διάχυση η οποία οδηγεί στην παρουσία του όρου

$$\mathbf{D}(\hat{\rho}(t)) \equiv \sum_{j=1}^{D_A^2-1} \Gamma_j \left( \hat{L}_j \hat{\rho}(t) \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_j \hat{L}_j^\dagger, \hat{\rho}(t) \} \right) \quad (\text{III.63})$$

ο οποίος, για προφανείς λόγους, ονομάζεται **dissipator**. Οι τελεστές  $\hat{L}_j$  ονομάζονται **jump operators** και εκφράζουν τη δράση του περιβάλλοντος επί του συστήματος. Ένα σημαντικό ερώτημα είναι το κατά πόσο οι τελεστές αυτοί είναι μοναδικοί. Για να

απαντήσουμε μπορούμε να κάνουμε μια σειρά παρατηρήσεων. Η πρώτη ξεκινάει από τον ορισμό (III.61) ο οποίος μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο τελεστών:

$$\text{Tr}(\hat{F}_i^\dagger \hat{F}_j) = \sum_{k,l} \text{Tr}(\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_l) \hat{V}_{jl} \hat{V}_{ki}^\dagger = \delta_{ij} \rightarrow \text{Tr}(\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_l) = \delta_{kl} \quad (\text{III.64})$$

Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι η εξίσωση Lindblad είναι αναλλοίωτη στους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\sqrt{\Gamma_j} \hat{L}_j \rightarrow \sqrt{\Gamma'_j} \hat{L}'_j = \sum_k \hat{V}_{jk} \sqrt{\Gamma_k} \hat{L}_k ; \hat{V} \hat{V}^\dagger = \hat{V}^\dagger \hat{V} = \hat{I} \quad (\text{III.65})$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_j &\rightarrow \hat{L}_j + \hat{I} \alpha_j \\ \mathbf{H}^R &\rightarrow \hat{H}'^R + \frac{i}{2} \sum_j \Gamma_j (\bar{\alpha}_j \hat{L}_j - \alpha_j \hat{L}_j^\dagger) + \hat{I} \beta ; \alpha_j \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{III.66})$$

Ο πρώτος από αυτούς δεν σέβεται τη σχέση (III.64) (εκτός και εάν  $\Gamma_j = \Gamma \forall j$ ) και επομένως μπορεί να αποκλεισθεί εάν απαιτήσουμε οι jump operators να είναι ορθοκανονικοί. Ο μετασχηματισμός (III.66) μπορεί να αποκλεισθεί εάν απαιτήσουμε οι jump operators να είναι μηδενικού ίχνους:

$$\text{Tr}(\hat{L}_i) = 0 \quad (\text{III.67})$$

Επομένως, εάν απαιτήσουμε την ισχύ των σχέσεων (III.64), (III.67) οι jump operators μπορούν να προσδιορισθούν μονοσήμαντα από τη δυναμική των συστημάτων.

Ένα από τα πλεονεκτήματα της προηγούμενης κατασκευής είναι ότι η αφηρητική της σχέση

$$\hat{\rho}(t + \delta t) = \mathbf{S}_{\delta t}(\hat{\rho}(t)) \quad (\text{III.68})$$

η οποία βεβαιώνει ότι η απεικόνιση  $\mathbf{S}_{\delta t}(\bullet)$  οδηγεί μήτρες πυκνότητας σε μήτρες πυκνότητας (Θεώρημα Choi-Kraus).

## (5) Εξίσωση Lindblad-Μικροσκοπική κατασκευή.

Στην παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε την εξίσωση Lindblad με αφετηρία την εξίσωση von Neumann:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{AB}(t) = [\hat{H}_{AB}, \hat{\rho}_{AB}(t)] \quad (\text{III.69})$$

Ο βασικός λόγος για τον οποίο παρεμβάλλουμε αυτήν την, μάλλον εκτενή, παράγραφο (η οποία σε πρώτη ανάγνωση μπορεί να παραλειφθεί) οφείλεται στο ότι μέσω αυτής θα γίνουν εμφανείς οι προσεγγίσεις οι οποίες βρίσκονται πίσω από την εξίσωση Lindblad (III.63).

Όπως έχουμε ήδη πει, η **πρώτη και πιο βασική** από αυτές είναι η **προσέγγιση Markov**. Ακολουθεί η υπόθεση της ασθενούς αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο σύστημα A και το περιβάλλον του (σύστημα B) και η, συνακόλουθη, **προσέγγιση Born**. Τελευταία είναι η προσέγγιση στο πλαίσιο της οποίας παραλείπονται έντονες χρονικές διακυμάνσεις (η μέση συνεισφορά των οποίων είναι αμελητέα) και η οποία είναι γνωστή με το όνομα **rotating wave approximation**. Σε κάθε περίπτωση, η προσέγγιση «ομπρέλα» είναι η Markov. Ο λόγος που αναφέρονται ξεχωριστά και οι υπόλοιπες είναι ότι κάθε μία από αυτές λειτουργεί αυτόνομα και σε άλλα πεδία της φυσικής.

Για την ανάλυση που ακολουθεί θα θεωρήσουμε ότι η Χαμιλτονιανή του σύνθετου συστήματος έχει τη μορφή:

$$\hat{H}_{AB} = \hat{H}_A \otimes \hat{I}_B + \hat{I}_A \otimes \hat{H}_B + \hat{V}_{AB}(t) \equiv \hat{H}_0 + \hat{V}_{AB}(t) \quad (\text{III.70})$$

Επειδή η πολυπλοκότητα της περιγραφής οφείλεται στην ύπαρξη της αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα συστήματα A και B, είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε την εικόνα της αλληλεπίδρασης η οποία επικεντρώνεται ακριβώς σ' αυτό το μέρος της Χαμιλτονιανής.

Για λόγους απλότητας θα υποθέσουμε ότι  $\partial_t \hat{H}_0 = 0$  και θα γράψουμε τον τελεστή χρονικής εξέλιξης (βλ. Άσκηση I.12, για απλότητα θα θεωρήσουμε ότι  $t_0 = 0$ ):

$$\hat{U}_{AB}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0} \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{V}_{LAB}(t')} , \quad \hat{V}_{LAB}(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0} \hat{V}_{AB}(t) e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0} \quad (\text{III.71})$$

Μπορούμε να ορίσουμε και την μήτρα πυκνότητας στην εικόνα της αλληλεπίδρασης:

$$\hat{\rho}_{LAB}(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0} \hat{\rho}_{AB}(t) e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0} , \quad \hat{\rho}_{LA(B)}(t) = \text{Tr}_{B(A)} [\hat{\rho}_{LAB}(t)] \quad (\text{III.72})$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι, στην εικόνα της αλληλεπίδρασης, η εξίσωση von Neumann παίρνει τη μορφή:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{LAB}(t) = [\hat{V}_{LAB}(t), \hat{\rho}_{LAB}(t)] \quad (\text{III.73})$$

Η τελευταία μπορεί να ολοκληρωθεί και να πάρουμε:

$$\hat{\rho}_{LAB}(t) - \hat{\rho}_{LAB}(0) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 [\hat{V}_{LAB}(t_1), \hat{\rho}_{LAB}(t_1)] \quad (\text{III.74})$$

Εάν αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα (III.74) στην εξίσωση (III.75) θα βρούμε ότι:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{I,AB}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{V}_{I,AB}(t), \hat{\rho}_{I,AB}(0) \right] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \left[ \hat{V}_{I,AB}(t), \left[ \hat{V}_{I,AB}(t_1), \hat{\rho}_{I,AB}(t_1) \right] \right] \quad (\text{III.75})$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να πάρουμε το ίχνος ως προς τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος B. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{I,A}(t) = \frac{-i}{\hbar} \text{Tr}_B \left[ \hat{V}_{I,AB}(t), \hat{\rho}_{I,AB}(0) \right] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_B \left[ \hat{V}_{I,AB}(t), \left[ \hat{V}_{I,AB}(t_1), \hat{\rho}_{I,AB}(t_1) \right] \right] \quad (\text{III.76})$$

Η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα δύο συστήματα μπορεί πάντα να γραφεί ως

$$\hat{V}_{AB} = \sum_j \hat{V}_A^{(j)} \otimes \hat{V}_B^{(j)} \rightarrow \hat{V}_{I,AB} = \sum_j \hat{V}_{I,A}^{(j)} \otimes \hat{V}_{I,B}^{(j)} ; \hat{V}_{AB} = \hat{V}_{AB}^\dagger \quad (\text{III.77})$$

Στην τελευταία σχέση οι τελεστές  $\hat{V}_{A,B}^{(j)}$  δρουν στους χώρους των συστημάτων A και B αντίστοιχα. Ορίσαμε, επίσης, και την εκδοχή τους στην εικόνα της αλληλεπίδρασης:

$$\hat{V}_{I,A(B)}^{(j)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_{A(B)}} \hat{V}_{A(B)}^{(j)}(0) e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_{A(B)}} \quad (\text{III.78})$$

Εδώ, να σημειώσουμε ότι, σιωπηρά, έχουμε υποθέσει ότι **η αλληλεπίδραση συστήματος-περιβάλλοντος δεν εξαρτάται από τον χρόνο.**

Λαμβάνοντας υπόψη ότι, αρχικά, δεν υπάρχει εναγκαλισμός, ο πρώτος όρος στην Εξ. (III.76) γράφεται:

$$\text{Tr}_B \left[ \hat{V}_{I,AB}(t), \hat{\rho}_{I,AB}(0) \right] = \sum_j \left[ \hat{V}_{I,A}^{(j)}(t), \hat{\rho}_{I,A}(0) \right] \text{Tr}_B \left( \hat{\rho}_{I,B}(0) \hat{V}_{I,B}^{(j)}(t) \right) \quad (\text{III.79})$$

**Η βασική υπόθεση Markov** μας βεβαιώνει ότι

$$\text{Tr}_B \left( \hat{\rho}_{I,B}(0) \hat{V}_{I,B}^{(j)}(t) \right) \approx \text{Tr}_B \left( \hat{\rho}_{I,B}(t) \hat{V}_{I,B}^{(j)}(t) \right) \equiv \left\langle \hat{V}_{I,B}^{(j)}(t) \right\rangle_B \quad (\text{III.80})$$

Χωρίς καμιά απώλεια γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $\left\langle \hat{V}_{I,B}^{(j)} \right\rangle_B = 0$ . Ο λόγος είναι ότι, ακόμα και αν δεν είναι έτσι, μπορούμε πάντα να επαναορίσουμε τη Χαμιλτονιανή κάνοντας την αλλαγή:

$$\hat{V}_{I,B}^{(j)} \rightarrow \hat{V}'_{I,B} = \hat{V}_{I,B} - \left\langle \hat{V}_{I,B}^{(j)} \right\rangle_B \quad (\text{III.81})$$

Επομένως η Εξ. (III.76) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{I,A}(t) = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt_1 \text{Tr}_B \left[ \hat{V}_{I,AB}(t), \left[ \hat{V}_{I,AB}(t_1), \hat{\rho}_{I,AB}(t_1) \right] \right] \quad (\text{III.82})$$

Είναι προφανές ότι πάντα μπορούμε να γράψουμε:

$$\hat{\rho}_{I,AB}(t) = \hat{\rho}_{I,A}(t)\hat{\rho}_{I,B}(t) + \hat{\rho}_{I,AB}^{\text{corr.}}(t) \quad (\text{III.83})$$

Ο τελευταίος όρος περιέχει όλες τις συσχετίσεις ανάμεσα στα συστήματα A και B, συσχετίσεις οι οποίες οφείλονται στις αλληλεπιδράσεις και δεν επιτρέπουν την παραγοντοποίηση της μήτρας πυκνότητας του σύνθετου συστήματος και, επομένως, η συνεισφορά του είναι τουλάχιστον τάξης  $O(V)$ .

Για να συνεχίσουμε θα θεωρήσουμε, σε συμφωνία με τη σχέση (III.35), ότι η ισχύς της αλληλεπίδρασης είναι επαρκώς μικρή επομένως ότι μπορούμε να βασισθούμε στην (χρονοεξαρτημένη) θεωρία διαταραχών και να μελετήσουμε την Εξ. (III.82) με ακρίβεια τάξης  $O(V^2)$  δηλαδή, **στην προσέγγιση Born**.

Έτσι:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{I,A}(t) \approx -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt_1 \text{Tr}_B \left[ \hat{V}_{I,AB}(t), \left[ \hat{V}_{I,AB}(t_1), \hat{\rho}_{I,A}(t_1)\hat{\rho}_{I,B}(t_1) \right] \right] + O(V^3) \quad (\text{III.84})$$

Η υπόθεση Markov μας επιτρέπει, να θεωρήσουμε ότι  $\hat{\rho}_{I,B}(t_1) \approx \hat{\rho}_B(0)$  και επομένως να ξαναγράψουμε την τελευταία ως:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{I,A}(t) \approx -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt_1 \text{Tr}_B \left[ \hat{V}_{I,AB}(t), \left[ \hat{V}_{I,AB}(t_1), \hat{\rho}_{I,A}(t_1)\hat{\rho}_B(0) \right] \right] + O(V^3) \quad (\text{III.85})$$

Εάν ολοκληρώσουμε την εξίσωση αυτή θα βρούμε ότι:

$$\hat{\rho}_{I,A}(t) - \hat{\rho}_{I,A}(t_1) \approx -\frac{1}{\hbar^2}\int_{t_1}^t dt' \int_0^{t'} dt'' \text{Tr}_B \left[ \hat{V}_{I,AB}(t'), \left[ \hat{V}_{I,AB}(t''), \hat{\rho}_{I,A}(t'')\hat{\rho}_B(0) \right] \right] + O(V^3) \quad (\text{III.86})$$

Το αποτέλεσμα αυτό δηλώνει ότι η διαφορά  $\hat{\rho}_{I,A}(t) - \hat{\rho}_{I,A}(t_1) \approx O(V^2)$ . Επομένως, η Εξ. (III.85) πρέπει να γραφεί:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{I,A}(t) \approx -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt_1 \text{Tr}_B \left[ \hat{V}_{I,AB}(t), \left[ \hat{V}_{I,AB}(t_1), \hat{\rho}_{I,A}(t)\hat{\rho}_B(0) \right] \right] + O(V^3) \quad (\text{III.87})$$



Το σύμβολο  $O(V^3)$ , σε όλες τις προηγούμενες εκφράσεις, δηλώνει ότι ακολουθεί σειρά όρων οι οποίοι είναι, το ελάχιστο, ανάλογοι της τρίτης δύναμης του μεγέθους της αλληλεπίδρασης. Υπονοεί, επίσης, ότι η αλληλεπίδραση είναι επαρκώς ασθενής ώστε η διατήρηση μόνο του πρώτου όρου να αποτελεί μια καλή εκτίμηση του πλήρους αποτελέσματος. Τέλος, υπονοεί ότι η σειρά η οποία παράγεται από  $N$  επαναλήψεις της διαδικασίας (III.86) συγκλίνει για  $N \rightarrow \infty$ .

Όσο πολύπλοκη και εάν φαίνεται η έκφραση (III.85) είναι φανερό ότι είναι μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_A(t) \approx \mathbf{L}(\hat{\rho}_A(t)) \quad (\text{III.88})$$

Η παρατήρηση αυτή υποδεικνύει ότι η δυνατότητα ύπαρξης μιας διαφορικής εξίσωσης για την εξέλιξη της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας στηρίζεται στις δύο σημαντικές προσεγγίσεις, Markov και Born.

Για να επεξεργαστούμε περισσότερο αυτό το συμπέρασμα θα αναπτύξουμε τους μεταθέτες στην Εξ. (III.85) δίνοντάς της τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{I,A}(t) \approx \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_B \{ \hat{V}_{I,AB}(t_1) \hat{\rho}_{I,A}(t) \hat{\rho}_B(0) \hat{V}_{I,AB}(t) - \hat{V}_{I,AB}(t) \hat{V}_{I,AB}(t_1) \hat{\rho}_{I,A}(t) \hat{\rho}_B(0) \} + \\ + \text{hermitian conjugate} \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (III.77) για την αλληλεπίδραση και λάβουμε υπόψη ότι ο αντίστοιχος τελεστής είναι αυτοσυζυγής θα γράψουμε την τελευταία εξίσωση ως:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{I,A}(t) \approx \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j,k} \int_0^t dt_1 \{ \hat{V}_{I,A}^{(j)}(t_1) \hat{\rho}_{I,A}(t) \hat{V}_{I,A}^{(k)\dagger}(t) - \hat{V}_{I,A}^{(k)\dagger}(t) \hat{V}_{I,A}^{(j)}(t_1) \hat{\rho}_{I,A}(t) \} \times \\ \times \text{Tr}_B \left( \hat{V}_{I,B}^{(k)\dagger}(t) \hat{V}_{I,B}^{(j)}(t_1) \hat{\rho}_B(0) \right) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

Ο τελευταίος παράγοντας στην προηγούμενη εξίσωση ορίζει τις συσχετίσεις στο σύστημα B:

$$\text{Tr}_B \left( \hat{V}_{I,B}^{(k)\dagger}(t) \hat{V}_{I,B}^{(j)}(t_1) \hat{\rho}_B(0) \right) \equiv \left\langle \hat{V}_{I,B}^{(k)\dagger}(t) \hat{V}_{I,B}^{(j)}(t_1) \right\rangle_B \quad (\text{III.91})$$

**Υπό τον όρο ότι η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα δυο συστήματα δεν εξαρτάται ρητά από τον χρόνο**, μπορούμε να δείξουμε ότι, λόγω της υπόθεσης Markov, οι συσχετίσεις του περιβάλλοντος εξαρτώνται μόνο από την χρονική απόσταση  $|t - t_1|$ .

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{V}_{1,B}^{(k)\dagger}(t) \hat{V}_{1,B}^{(j)}(t_1) \right\rangle_B &= \text{Tr}_B \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_B} \hat{V}_B^{(k)\dagger} e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_B} \hat{V}_B^{(j)} e^{-\frac{i}{\hbar} t_1 \hat{H}_B} \hat{\rho}_B(0) \right\} \approx \\ &\approx \text{Tr}_B \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} (t-t_1) \hat{H}_B} \hat{V}_B^{(k)\dagger} e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_1) \hat{H}_B} \hat{V}_B^{(j)} \hat{\rho}_B(0) \right\} = \left\langle \hat{V}_{1,B}^{(k)\dagger}(t-t_1) \hat{V}_{1,B}^{(j)}(0) \right\rangle_B \end{aligned} \quad (\text{III.92})$$

Το σημαντικό βήμα για την παραγωγή του τελευταίου αποτελέσματος είναι ότι οι χρόνοι αποκατάστασης του περιβάλλοντος B, σε σύγκριση με τα βήματα  $\delta t$  παρατήρησης του συστήματος A (βλ. Εξ. (III.44)) είναι τόσο μικροί ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_B} \hat{\rho}_B(0) e^{\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_B} \approx \hat{\rho}_B(0) \quad (\text{III.93})$$

Εισάγοντας την μεταβλητή  $s = t - t_1$  η Εξ. (III.90) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{1,A}(t) &\approx \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j,k} \int_0^t ds \left\{ \hat{V}_{1,A}^{(j)}(t-s) \hat{\rho}_{1,A}(t) \hat{V}_{1,A}^{(k)\dagger}(t) - \hat{V}_{1,A}^{(k)\dagger}(t) \hat{V}_{1,A}^{(j)}(t-s) \hat{\rho}_{1,A}(t) \right\} \times \\ &\times \left\langle \hat{V}_{1,B}^{(k)\dagger}(s) \hat{V}_{1,B}^{(j)}(0) \right\rangle_B + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (\text{III.94})$$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως **εξίσωση Redfield**.

Εν τούτοις, η υπόθεση της κατασκευής της διαφορικής εξίσωσης που αναζητούμε δεν τελειώνει εδώ. Ο λόγος είναι ότι στο ολοκλήρωμα που υπεισέρχεται στην Εξ. (III.94) ενυπάρχουν ταλαντώσεις οι οποίες, αφενός, δεν εγγυώνται ότι η λύση της είναι ένας θετικά ορισμένος τελεστής (όπως πρέπει να είναι μια μήτρα πυκνότητας) και, αφετέρου, θα πρέπει, στο πλαίσιο των προσεγγίσεων που δουλεύουμε να παραλειφθούν.

Προκειμένου να χειριστούμε το πρόβλημα πρέπει να επεξεργαστούμε περισσότερο την Εξ. (III.94) ώστε να τη φέρουμε στη μορφή (III.62) η οποία εγγυάται, μέσω του θεωρήματος Choi-Kraus, ότι η λύση της ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις μιας μήτρας πυκνότητας. Για τον λόγο αυτόν θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της Άσκησης I.13 στην οποία διαπιστώσαμε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\hat{V}_{1,A}^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \hat{V}_A^{(j)}(\omega) \quad (\text{III.95})$$

όπου

$$\begin{aligned} \hat{V}_A^{(j)}(\omega) &= \sqrt{2\pi} \sum_{n,m} \delta(\omega - \omega_{nm}) |n\rangle \langle n| \hat{V}_A^{(j)} |m\rangle \langle m| \\ \hat{H}_A |n\rangle &= \hbar \omega_n |n\rangle, \quad \omega_{nm} = \omega_m - \omega_n \end{aligned} \quad (\text{III.96})$$

Αντικαθιστώντας την (III.95) στην (III.94) θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{1,A}(t) \approx \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \hat{V}_A^{(j)}(\omega) \hat{\rho}_{1,A}(t) \hat{V}_A^{(k)\dagger}(\omega') - \hat{V}_A^{(k)\dagger}(\omega') \hat{V}_A^{(j)}(\omega) \hat{\rho}_{1,A}(t) \right\} e^{-it(\omega-\omega')} \times \\ \times \int_0^t ds e^{ios} \left\langle \hat{V}_{1,B}^{(k)\dagger}(s) \hat{V}_{1,B}^{(j)}(0) \right\rangle_B + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (\text{III.97})$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις. Η πρώτη αφορά τις συσχετίσεις στο σύστημα B οι οποίες, στο πλαίσιο της προσέγγισης Markov, ουσιαστικά μηδενίζονται έξω από την περιοχή  $|s| \leq \tau_B$ . Αυτό σημαίνει ότι, στο τελευταίο ολοκλήρωμα, το επάνω όριο του οποίου μετράται, όπως είδαμε στην Εξ. (III.44), σε μονάδες  $\delta t \gg \tau_B$ , μπορεί να επεκταθεί, χωρίς πρόβλημα, έως το άπειρο και να γράψουμε:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{1,A}(t) \approx \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}} G_{kj}(\omega) \hat{J}_{jk}(\omega, \omega'; t) e^{-it(\omega-\omega')} + \text{h.c.} \quad (\text{III.98})$$

Εδώ εισαγάγαμε τις συναρτήσεις :

$$G_{kj}(\omega) \equiv \int_0^{\infty} ds e^{ios} \left\langle \hat{V}_{1,B}^{(k)\dagger}(s) \hat{V}_{1,B}^{(j)}(0) \right\rangle_B \quad (\text{III.99})$$

και

$$\hat{J}_{jk}(\omega, \omega') \equiv \hat{V}_A^{(j)}(\omega) \hat{\rho}_{1,A}(t) \hat{V}_A^{(k)\dagger}(\omega') - \hat{V}_A^{(k)\dagger}(\omega') \hat{V}_A^{(j)}(\omega) \hat{\rho}_{1,A}(t) \quad (\text{III.100})$$

Η δεύτερη παρατήρηση αφορά στον ρόλο εκθετικού παράγοντα στην Εξ. (III.98). Για να αναλύσουμε την κατάσταση θα πάρουμε τη μέση τιμή της εν λόγω εξίσωσης στην περιοχή  $(t, t + \delta t)$ :

$$\frac{\hat{\rho}_{1,A}(t + \delta t) - \hat{\rho}_{1,A}(t)}{\delta t} \approx \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}} G_{kj}(\omega) \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} dt' \hat{J}_{jk}(\omega, \omega'; t') e^{-it'(\omega-\omega')} + \text{h.c} \quad (\text{III.101})$$

Γράφοντας  $e^{-i(\omega-\omega')t'} = \frac{i}{\omega-\omega'} \frac{\partial}{\partial t'} e^{-i(\omega-\omega')t'}$  το χρονικό ολοκλήρωμα στην τελευταία

εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} dt' \hat{J}_{jk}(\omega, \omega'; t') e^{-it'(\omega-\omega')} = \frac{i}{\omega-\omega'} \frac{1}{\delta t} \left[ \hat{J}_{jk}(\omega, \omega'; t + \delta t) e^{-it'(\omega-\omega')(t+\delta t)} - \hat{J}_{jk}(\omega, \omega'; t) e^{-it'(\omega-\omega')t} \right] - \\ - \frac{i}{\omega-\omega'} \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} dt' \partial_{t'} \hat{J}_{jk}(\omega, \omega'; t') e^{-it'(\omega-\omega')t'} \end{aligned} \quad (\text{III.102})$$

Όπως φαίνεται από την Εξ. (III.100) ο τελεστής  $\hat{J}_{jk}$  εξαρτάται από τον χρόνο μέσω του τελεστή πυκνότητας. Επομένως, και σύμφωνα με όλη την ανάλυση που προηγήθηκε, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

$$\frac{\hat{\rho}_{I,A}(t+\delta t) - \hat{\rho}_{I,A}(t)}{\delta t} \approx O(V^2), \quad \partial_t \hat{\rho}_{I,A}(t) \approx O(V^2) \quad (\text{III.103})$$

Έτσι, για την ακρίβεια της Εξ. (III.101), μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (III.102) ως:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} dt' \hat{J}_{jk}(\omega, \omega'; t') e^{-it'(\omega-\omega')} &\approx \hat{J}_{jk}(\omega, \omega'; t) \frac{1}{\delta t} \frac{i}{\omega-\omega'} \left[ e^{-it'(\omega-\omega')(t+\delta t)} - e^{-it'(\omega-\omega')t} \right] + O(V^2) \\ &= \hat{J}_{jk}(\omega, \omega'; t) e^{-it'(\omega-\omega')(t+\delta t/2)} i \frac{e^{-it'(\omega-\omega')\delta t/2} - e^{it'(\omega-\omega')\delta t/2}}{\delta t(\omega-\omega')} + O(V^2) \\ &= \hat{J}_{jk}(\omega, \omega'; t) e^{-it'(\omega-\omega')(t+\delta t/2)} \frac{\sin(\omega-\omega')\delta t/2}{(\omega-\omega')\delta t/2} + O(V^2) \end{aligned} \quad (\text{III.104})$$

Με τον τρόπο αυτό, η Εξ. (III.101) θα πάρει τη μορφή:

$$\frac{\hat{\rho}_{I,A}(t+\delta t) - \hat{\rho}_{I,A}(t)}{\delta t} \approx \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{kj}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{J}_{jk}(\omega, \omega'; t) \delta(\omega, \omega') + \text{h.c.} \quad (\text{III.105})$$

Όπου

$$\delta(\omega, \omega') = e^{-it'(\omega-\omega')(t+\delta t/2)} \frac{\sin(\omega-\omega')\delta t/2}{2\pi(\omega-\omega')\delta t/2} \quad (\text{III.106})$$

Όπως είναι προφανές, η κύρια συνεισφορά στο τελευταίο ολοκλήρωμα στην Εξ. (III.105) έρχεται από την περιοχή  $|\omega' - \omega| \delta t \rightarrow 0$  και επομένως:

$$\frac{\hat{\rho}_{I,A}(t+\delta t) - \hat{\rho}_{I,A}(t)}{\delta t} \approx \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{kj}(\omega) \hat{J}_{jk}(\omega, \omega; t) + \text{h.c.} \quad (\text{III.107})$$

Εάν, τώρα, θεωρήσουμε ότι, σε σύγκριση με τις διαστατές παραμέτρους συστήματος A, το χρονικό βήμα είναι πολύ μικρό,  $\delta t \rightarrow 0$ , η τελευταία έκφραση μπορεί να γραφεί ως διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{I,A}(t) \approx \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{kj}(\omega) J_{jk}(\omega, \omega; t) + \text{h.c.} \quad (\text{III.108})$$

Η προσέγγιση που μας οδήγησε στην τελευταία εξίσωση αναφέρεται ως **rotating wave approximation**.

Εάν λάβουμε υπόψη όλους τους όρους στην (III.101) θα βρούμε:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} G_{kj}(\omega) J_{jk}(\omega, \omega) + \text{h.c.} &= \sum_{j,k} (G_{kj}(\omega) + G_{jk}^*(\omega)) \hat{V}_A^{(j)}(\omega) \hat{\rho}_{I,A}(t) \hat{V}_A^{(k)\dagger}(\omega) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j,k} (G_{kj}(\omega) + G_{jk}^*(\omega)) \{ \hat{V}_A^{(k)\dagger}(\omega) \hat{V}_A^{(j)}(\omega), \hat{\rho}_{I,A}(t) \} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j,k} (G_{kj}(\omega) - G_{jk}^*(\omega)) [ \hat{V}_A^{(k)\dagger}(\omega) \hat{V}_A^{(j)}(\omega), \hat{\rho}_{I,A}(t) ] \end{aligned} \quad (\text{III.109})$$

Γράφοντας

$$G_{kj}(\omega) + G_{jk}^*(\omega) \equiv \gamma_{kj}(\omega), \quad \frac{1}{2}(G_{kj}(\omega) - G_{jk}^*(\omega)) \equiv i\hbar S_{kj}(\omega) \quad (\text{III.110})$$

η Εξ. (III.111) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{I,A}(t) \approx -\frac{i}{\hbar} [ \hat{H}_{LS}, \hat{\rho}_{I,A}(t) ] + \mathbf{D}(\hat{\rho}_{I,A}(t)) \quad (\text{III.111})$$

Στην τελευταία σχέση γράψαμε:

$$\mathbf{D}(\hat{\rho}_{I,A}(t)) \equiv \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{j,k} \gamma_{kj}(\omega) \left\{ \hat{V}_A^{(j)}(\omega) \hat{\rho}_{I,A}(t) \hat{V}_A^{(k)\dagger}(\omega) - \frac{1}{2} \{ \hat{V}_A^{(k)\dagger}(\omega) \hat{V}_A^{(j)}(\omega), \hat{\rho}_{I,A}(t) \} \right\} \quad (\text{III.112})$$

και

$$\hat{H}_{LS} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{j,k} S_{kj}(\omega) \hat{V}_A^{(k)\dagger}(\omega) \hat{V}_A^{(j)}(\omega) \quad (\text{III.113})$$

Επανερχόμενοι στην εικόνα Schrödinger η Εξ. (III.111) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_A(t) \approx -\frac{i}{\hbar} [ \hat{H}_A + \hat{H}_{LS}, \hat{\rho}_A(t) ] + \mathbf{D}(\hat{\rho}_A(t)) = -\frac{i}{\hbar} [ \hat{H}_A^R, \hat{\rho}_A(t) ] + \mathbf{D}(\hat{\rho}_A(t)) \quad (\text{III.114})$$

Το αποτέλεσμα αυτό αντιστοιχεί στην **πρώτη standard μορφή της εξίσωσης Lindblad** (βλ. Εξ. (III.58)).

Η **standard** μορφή της εξίσωσης Lindblad μπορεί να προκύψει από την παρατήρηση ότι ο πίνακας  $(\gamma_{kj})$  είναι αυτοσυζυγής και μη αρνητικός (θα το αποδείξουμε στη συνέχεια).

Επομένως, όπως και στην Εξ. (III.60), μπορεί να διαγωνοποιηθεί μέσω ενός μοναδιακού μετασχηματισμού και να οδηγήσει σε έναν διαγώνιο πίνακα τα στοιχεία του οποίου είναι μη αρνητικά:

$$\hat{Q}\hat{\gamma}\hat{Q}^\dagger = \hat{\Gamma} \doteq \delta_{ij}\Gamma_j, \Gamma_j \geq 0 \quad (\text{III.113})$$

Γράφοντας

$$\hat{L}_j = \sum_k Q_{jk} \hat{V}_A^{(k)}, \hat{L}_j^\dagger = \sum_k \hat{V}_A^{\dagger(k)} Q_{kj}^* \quad (\text{III.114})$$

βρίσκουμε:

$$\mathbf{D}(\hat{\rho}(t)) = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_j \Gamma_j(\omega) \left\{ \hat{L}_j(\omega) \hat{\rho}(t) \hat{L}_j^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \left\{ \hat{L}_j^\dagger(\omega) \hat{L}_j(\omega), \hat{\rho}(t) \right\} \right\} \quad (\text{III.115})$$

Η τελευταία μορφή του dissipator ορίζει την **standard** μορφή της εξίσωσης Lindblad.

Για την σύγκριση με το αποτέλεσμα (III.63) θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι για ένα σύστημα πεπερασμένων διαστάσεων το ολοκλήρωμα είναι, στην πραγματικότητα, ένα διακριτό άθροισμα σε όλες τις διαφορές των ιδιοενεργειών του συστήματος (βλ. Εξ. (III.96)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega (...) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{m,n} \delta(\omega - \omega_{mn}) (...) \quad (\text{III.117})$$

Με τον τρόπο αυτό στην τελική μορφή της εξίσωσης Lindblad εμφανίζεται ένα διακριτό άθροισμα jump operators το σύνολο των οποίων δεν μπορεί να υπερβεί τη διάσταση του χώρου Liouville ο οποίος αντιστοιχεί στο υπό μελέτη σύστημα.

Πριν κλείσουμε την παράγραφο μπορούμε να δείξουμε ότι οι συντελεστές  $(\gamma_{kj})$  είναι η αναπαράσταση ενός μη αρνητικού τελεστή  $\hat{\gamma}$ . Το πρώτο βήμα για την απόδειξη αυτή είναι να τους γράψουμε ως τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης συσχετισμού:

$$\begin{aligned} \gamma_{kj}(\omega) &= \int_0^{\infty} ds e^{i\omega s} \left\langle \hat{V}_{1,B}^{(k)\dagger}(s) \hat{V}_{1,B}^{(j)}(0) \right\rangle_B + \int_0^{\infty} ds e^{-i\omega s} \left\langle \hat{V}_{1,B}^{(k)\dagger}(0) \hat{V}_{1,B}^{(j)}(s) \right\rangle_B = \\ &= \int_0^{\infty} ds e^{i\omega s} \left\langle \hat{V}_{1,B}^{(k)\dagger}(s) \hat{V}_{1,B}^{(j)}(0) \right\rangle_B + \int_{-\infty}^0 ds e^{i\omega s} \left\langle \hat{V}_{1,B}^{(k)\dagger}(s) \hat{V}_{1,B}^{(j)}(0) \right\rangle_B = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega s} \left\langle \hat{V}_{1,B}^{(k)\dagger}(s) \hat{V}_{1,B}^{(j)}(0) \right\rangle_B \end{aligned} \quad (\text{III.119})$$

Έτσι, αυτό που πρέπει να αποδείξουμε είναι ότι

$$\langle \vec{x} | \hat{\gamma} | \vec{x} \rangle = \sum_{k,j} \bar{x}_k \gamma_{kj} x_j \geq 0 \quad \forall | \vec{x} \rangle = | x_1, x_2, \dots \rangle \quad (\text{III.120})$$

Εάν ορίσουμε τους τελεστές  $\hat{W} = \sum_j x_j \hat{V}_{1,B}^{(j)}$  η τελευταία σχέση γράφεται:

$$\langle \bar{x} | \hat{\gamma} | \bar{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega s} \langle \hat{W}^\dagger(s) \hat{W}(0) \rangle \quad (\text{III.121})$$

Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $f(s) = \langle \hat{W}^\dagger(s) \hat{W}(0) \rangle$  είναι μη αρνητικά ορισμένη (**positive semi-definite**). Μια συνάρτηση είναι τέτοιου τύπου εάν ο πίνακας  $f_{\alpha\beta} = f(t_\alpha - t_\beta)$  είναι μη-αρνητικά ορισμένος. Αυτό μπορεί, στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει, εύκολα να αποδειχθεί εάν λάβουμε υπόψη ότι η συνάρτηση συσχέτισης εξαρτάται μόνο από την χρονική διαφορά και επομένως

$$f_{\alpha\beta} = \langle \hat{W}^\dagger(t_\alpha) \hat{W}(t_\beta) \rangle \rightarrow \sum_{\alpha,\beta} \bar{y}_\alpha f_{\alpha\beta} y_\beta = \left\langle \left| \sum_\alpha y_\alpha \hat{W}(t_\alpha) \right|^2 \right\rangle \geq 0 \quad (\text{III.122})$$

Θα τελειώσουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας το θεώρημα **Bochner** το οποίο βεβαιώνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας μη αρνητικά ορισμένης συνάρτησης είναι μη αρνητική συνάρτηση.

## (6) Κβαντικά Κανάλια

Στο εδάφιο για τη χρονική εξέλιξη μιλήσαμε για τον υπερ-τελεστή ο οποίος περιγράφει τη χρονική εξέλιξη ενός τελεστή πυκνότητας (δες Εξ. III.29):

$$\mathbf{S}(\hat{\rho}(0)) = \hat{\rho}(t) \quad (\text{III.123})$$

Γενικότερα, μπορούμε να συζητήσουμε υπερ-τελεστές οι οποίοι απεικονίζουν μια δεδομένη μήτρα πυκνότητας σε μια άλλη:

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}' = \Phi(\hat{\rho}) \quad (\text{III.124})$$

Προκειμένου η παραγόμενη κατάσταση να μπορεί να παίζει ρόλο τελεστή πυκνότητας θα πρέπει η απεικόνιση (III.124) να έχει συγκεκριμένες ιδιότητες.

**(α)** Θα πρέπει να είναι γραμμική:

$$\Phi(\alpha\hat{\rho}_1 + \beta\hat{\rho}_2) = \alpha\Phi(\hat{\rho}_1) + \beta\Phi(\hat{\rho}_2) \quad (\text{III.125})$$

Για να διαπιστώσουμε την ανάγκη αυτής της απαίτησης θα αναφερθούμε στο γεγονός ότι ένας τελεστής πυκνότητας μπορεί, πάντα, να γραφεί ως κυρτό άθροισμα άλλων μητρών πυκνότητας:

$$\hat{\sigma} = \sum_j q_j \hat{\sigma}_j, \quad \sum_j q_j = 1 \quad (\text{III.126})$$

Όπως έχουμε δει, υπάρχουν άπειροι τρόποι να πραγματοποιηθεί η ανάλυση αυτή. Ας πούμε τώρα ότι ξεκινάμε από τον τελεστή

$$\hat{\rho}(p) = p\hat{\rho}_1 + (1-p)\hat{\rho}_2 \quad (\text{III.127})$$

Μέσω της απεικόνισης (III.124) παράγουμε τους τελεστές

$$\hat{\rho}'(p) = \Phi(p\hat{\rho}_1 + (1-p)\hat{\rho}_2), \quad \hat{\rho}'_{1,2} = \Phi(\hat{\rho}_{1,2}) \quad (\text{III.128})$$

Εφόσον θέλουμε οι τελεστές αυτοί να είναι τελεστές πυκνότητας θα πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα να γράψουμε:

$$\hat{\rho}'(p) = \lambda\hat{\rho}'_1 + (1-\lambda)\hat{\rho}'_2, \quad \lambda = \lambda(p) \quad (\text{III.129})$$

Μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι  $\lambda = p$ . Πράγματι εάν δεν ήταν έτσι θα μπορούσαμε να βρούμε μήτρες πυκνότητας  $\hat{\rho}''_{1,2} \neq \hat{\rho}'_{1,2}$  τέτοιες ώστε να γράψουμε

$$\hat{\rho}'(p) = p\hat{\rho}''_1 + (1-p)\hat{\rho}''_2 \quad (\text{III.130})$$

βλέποντας ότι  $\hat{\rho}'(1) = \hat{\rho}'_1$ ,  $\hat{\rho}'(0) = \hat{\rho}'_2$  καταλήγουμε στο συμπέρασμα  $\hat{\rho}''_{1,2} = \hat{\rho}'_{1,2}$ .

Επομένως:

$$\hat{\rho}'(p) = p\hat{\rho}'_1 + (1-p)\hat{\rho}'_2 \rightarrow \Phi(p\hat{\rho}_1 + (1-p)\hat{\rho}_2) = p\Phi(\hat{\rho}_1) + (1-p)\Phi(\hat{\rho}_2) \quad (\text{III.131})$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύει την ανάγκη της γραμμικότητας της απεικόνισης (III.124).

**(β)** Θα πρέπει να διατηρεί την ερμιτιανότητα:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger \rightarrow \Phi(\hat{\rho}) = \Phi^\dagger(\hat{\rho}) \quad (\text{III.132})$$

**(γ)** Θα πρέπει να διατηρεί το ίχνος:

$$\text{Tr}\hat{\rho}' = \text{Tr}\Phi(\hat{\rho}) = \text{Tr}\hat{\rho} = 1 \quad (\text{III.133})$$

**(δ)** Τέλος, η απεικόνιση (III.124) πρέπει να είναι τέτοια ώστε να απεικονίζει μη αρνητικούς τελεστές σε μη αρνητικούς τελεστές:

$$\hat{\rho} \geq 0 \rightarrow \hat{\rho}' = \Phi(\hat{\rho}) \geq 0 \quad (\text{III.134})$$

Μια τέτοια ιδιότητα ορίζει την απεικόνιση ως θετική. Εν τούτοις ο ορισμός του κβαντικού καναλιού απαιτεί κάτι περισσότερο προκειμένου να περιγράψει μια πιθανή



φυσική διαδικασία: Η απεικόνιση (III.124) πρέπει να είναι πλήρως θετική (**completely positive map**).

Για να καταλάβουμε τη σημασία μιας τέτοιας απαίτησης πρέπει να σκεφθούμε ότι το σύστημα που μας ενδιαφέρει (ας το πούμε A) μπορεί να είναι εναγκαλισμένο με κάποιο άλλο σύστημα B διάστασης  $\dim H_B = n$ . Σε μια τέτοια περίπτωση ορίζουμε τον επεκτεταμένο υπερ-τελεστή

$$\Phi_{AB} \equiv \Phi_A \otimes \mathbf{I}_{n,B} \quad (\text{III.135})$$

Στον τελευταίο ορισμό  $\mathbf{I}_B$  είναι ο τελεστής μονάδα, ο οποίος δρα επί του υποσυστήματος B χωρίς να το αλλάζει. Ο δείκτης στον πρώτο όρο είναι για να υπενθυμίζει ότι το σύστημα που μας ενδιαφέρει είναι μέρος ενός μεγαλύτερου συστήματος. Η απαίτηση της πλήρους θετικότητας σημαίνει ότι:

$$\hat{\rho}_A \geq 0 \rightarrow \Phi_{AB}(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\mathbf{I}}_{n,B}) \geq 0 \quad \forall n \quad (\text{III.136})$$

Για να καταλάβουμε τη σημασία της τελευταίας απαίτησης μπορούμε να πάρουμε ένα απλό παράδειγμα.

Θα ξεκινήσουμε από την κατάσταση ενός ηλεκτρονίου  $|\chi_A\rangle = a|1/2_A\rangle + b|-1/2_A\rangle$  ή τον

τελεστή πυκνότητας  $\hat{\rho}_A = \begin{pmatrix} |a|^2 & a^*b \\ ab^* & |b|^2 \end{pmatrix}$ . Ας θεωρήσουμε τώρα την απεικόνιση

$$\hat{\rho}_A \rightarrow \hat{\rho}'_A = \Phi_A(\hat{\rho}_A) = \hat{\rho}_A^\perp. \quad (\text{III.137})$$

θα παραχθεί ο τελεστής

$$\hat{\rho}'_A = \Phi_A(\hat{\rho}_A) = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.138})$$

Ο τελεστής αυτός έχει όλες τις ιδιότητες που απαιτούνται ώστε να είναι τελεστής πυκνότητας. Αντιστοιχεί στην κατάσταση  $|\chi'_A\rangle = b|1/2_A\rangle + a|-1/2_A\rangle$  και, προφανώς, είναι μη αρνητικός:

$$(x^*, y^*) \Phi_A(\hat{\rho}_A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |xa + (yb)^*|^2 \geq 0 \quad (\text{III.139})$$

Εάν, όμως, το ηλεκτρόνιο είναι μέρος της singlet κατάστασης

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1/2_A, -1/2_B\rangle - |-1/2_A, 1/2_B\rangle) \quad (\text{III.140})$$

τα πράγματα αλλάζουν.

Η μήτρα πυκνότητας που αντιστοιχεί στην (III.140) είναι η

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{1}{2} |1/2_A, -1/2_B\rangle\langle 1/2_A, -1/2_B| + \frac{1}{2} |-1/2_A, 1/2_B\rangle\langle -1/2_A, 1/2_B| - \frac{1}{2} |1/2_A, -1/2_B\rangle\langle -1/2_A, 1/2_B| - \frac{1}{2} |-1/2_A, 1/2_B\rangle\langle 1/2_A, -1/2_B| \quad (\text{III.141})$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τον υπερ-τελεστή  $\Phi_{AB} = \Phi_A \mathbf{I}_B$  η δράση του στην κατάσταση (III.140) παράγει τον τελεστή:

$$\hat{\rho}'_{AB} = \frac{1}{2} |1/2_A, -1/2_B\rangle\langle 1/2_A, -1/2_B| + \frac{1}{2} |-1/2_A, 1/2_B\rangle\langle -1/2_A, 1/2_B| - \frac{1}{2} |-1/2_A, -1/2_B\rangle\langle 1/2_A, 1/2_B| - \frac{1}{2} |1/2_A, 1/2_B\rangle\langle 1/2_A, -1/2_B| \quad (\text{III.142})$$

Στη βάση  $\{|\pm 1/2_A, \pm 1/2_B\rangle\}$  ο προηγούμενος τελεστής αναπαρίσταται ως:

$$\hat{\rho}'_{AB} \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.143})$$

Είναι πολύ εύκολο να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1/2, \lambda_4 = -1/2 \quad (\text{III.144})$$

Η ύπαρξη αρνητικής ιδιοτιμής αποδεικνύει ότι ο τελεστής (III.142) δεν είναι θετικός τελεστής και επομένως δεν μπορεί να είναι τελεστής πυκνότητας .

Το παράδειγμα αυτό αποδεικνύει ότι, όταν η κατάσταση που μας ενδιαφέρει είναι μέρος ενός μεγαλύτερου συστήματος ένα κβαντικό κανάλι αναπαριστά μια πιθανή φυσική διαδικασία μόνο εάν η αντίστοιχη απεικόνιση είναι πλήρως θετική.

Υπάρχει το σημαντικό θεώρημα Stinespring (quantum dilation theorem) το οποίο βεβαιώνει ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα κβαντικό κανάλι είναι απολύτως θετικό είναι να μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω τελεστών Kraus:

$$\Phi(\bullet) = \sum \hat{M}(\bullet) \hat{M}^\dagger, \sum \hat{M}^\dagger \hat{M} = \hat{I} \quad (\text{III.145})$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι μια έκφραση όπως η τελευταία ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις που χρειάζονται ώστε τελεστές πυκνότητας να απεικονίζονται σε τελεστές πυκνότητας. Το θεώρημα Stinespring βεβαιώνει ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεωρώντας δεδομένη την (III.145) και ανακαλώντας τη συζήτηση που κάναμε για τους τελεστές Kraus καταλαβαίνουμε ότι η αναπαράσταση ενός καναλιού μέσω τελεστών δεν είναι μοναδική και ότι η εφαρμογή ενός κβαντικού καναλιού δεν είναι αντιστρεπτή διαδικασία.

Στις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου υπάρχουν παραδείγματα κβαντικών καναλιών:

Άσκηση III.8 (amplitude damping), Άσκηση III.11 (dephasing channel) , Άσκηση III.12 (depolarizing channel).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ ΙΙΙ

**ΙΙΙ.1** Σύστημα δύο ηλεκτρονίων βρίσκεται, τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , στην κατάσταση  $|\psi_{AB}\rangle = |1/2_{z,A}, -1/2_{z,B}\rangle$ . Η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από την  $\hat{H} = 2\omega \hat{S}_A \cdot \hat{S}_B / \hbar$ . Να βρείτε την κατάσταση του συστήματος μετά από χρόνο  $t$ .

### Απάντηση.

Η άσκηση μπορεί να επιλυθεί εύκολα με τον συμβατικό τρόπο:

$$|\psi_{AB}(t)\rangle = e^{-i\frac{2\omega}{\hbar} \hat{S}_A \cdot \hat{S}_B} |1/2_{z,A}, -1/2_{z,B}\rangle \quad (1)$$

Αυτό που κάνουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε το συνολικό σπιν

$$\hat{S}_{ολ.} = \hat{S}_A + \hat{S}_B \quad (2)$$

και να γράψουμε

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar} (\hat{S}_{ολ.}^2 - \hat{S}_A^2 - \hat{S}_B^2) \quad (3)$$

Στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση Clebsch-Gordan και να γράψουμε

$$\begin{aligned} |S_{ολ.} = 1, S_{ολ.z} = 0\rangle &= (|1/2_{z,A}, -1/2_{z,B}\rangle + |1/2_{z,A}, -1/2_{z,B}\rangle) / \sqrt{2} \\ |S_{ολ.} = 0, S_{ολ.z} = 0\rangle &= (|1/2_{z,A}, -1/2_{z,B}\rangle - |1/2_{z,A}, -1/2_{z,B}\rangle) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Η τελευταία σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} |1/2_{z,A}, -1/2_{z,B}\rangle &= (|S_{ολ.} = 1, S_{ολ.z} = 0\rangle + |S_{ολ.} = 0, S_{ολ.z} = 0\rangle) / \sqrt{2} \\ |-1/2_{z,A}, 1/2_{z,B}\rangle &= (|S_{ολ.} = 1, S_{ολ.z} = 0\rangle - |S_{ολ.} = 0, S_{ολ.z} = 0\rangle) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (5)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (3) και (5) θα βρούμε:

$$|\psi_{AB}(t)\rangle = \cos(\omega t) |1/2_{z,A}, -1/2_{z,B}\rangle - i \sin(\omega t) |-1/2_{z,A}, 1/2_{z,B}\rangle \quad (6)$$

Η κατάσταση του σωματίου A περιγράφεται από την

$$\hat{\rho}_A^R(t) = \cos^2(\omega t) |1/2_{z,A}\rangle\langle 1/2_{z,A}| + \sin^2(\omega t) |-1/2_{z,A}\rangle\langle -1/2_{z,A}| \doteq \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t) & 0 \\ 0 & \sin^2(\omega t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να φθάσουμε και μέσω των τελεστών Kraus:

$$\hat{M}_\mu^A = \langle \mu_B | e^{-i\frac{2\omega}{\hbar^2} \bar{s}_A \bar{s}_B} | -1/2_{z,B} \rangle \quad (8)$$

Είναι βολικό να διαλέξουμε  $|\mu_B\rangle = |\pm 1/2_{z,B}\rangle$  και να ορίσουμε:

$$\hat{M}_\pm^A = \langle \pm 1/2_{z,B} | e^{-i\frac{2\omega}{\hbar^2} \bar{s}_A \bar{s}_B} | -1/2_{z,B} \rangle \quad (9)$$

Καθένας από τους τελεστές αυτούς μπορεί να αναπαρασταθεί στη βάση  $|\pm 1/2_{z,A}\rangle$ .

Χρησιμοποιώντας τις (5) και τις

$$|1/2_{z,A}, 1/2_{z,B}\rangle = |S_{\text{ολ.}} = 1, S_{\text{ολ.z}} = 1\rangle, \quad |-1/2_{z,A}, 1/2_{z,B}\rangle = |S_{\text{ολ.}} = 1, S_{\text{ολ.z}} = -1\rangle \quad (10)$$

βρίσκουμε εύκολα:

$$\hat{M}_+^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -ie^{i\omega t/2} \sin(\omega t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{M}_-^A = \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι

$$\hat{M}_+^{A\dagger} \hat{M}_+^A + \hat{M}_-^{A\dagger} \hat{M}_-^A = \hat{I}_{2 \times 2} \quad (12)$$

Τη στιγμή  $t = 0$  η μήτρα πυκνότητας του σωματίου A είναι:

$$\hat{\rho}_A(0) = |1/2_{z,A}\rangle\langle 1/2_{z,A}| \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Επομένως:

$$\hat{\rho}_A^R(t) = \hat{M}_+^A \hat{\rho}_A(0) \hat{M}_+^{A\dagger} + \hat{M}_-^A \hat{\rho}_A(0) \hat{M}_-^{A\dagger} \doteq \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t) & 0 \\ 0 & \sin^2(\omega t) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Όπως φαίνεται από το αποτέλεσμα αυτό η κατάσταση του A είναι, εν γένει, μη καθαρή αφού

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_A^R(t))^2 = \cos^4(\omega t) + \sin^4(\omega t) \quad (15)$$

Προφανώς, υπάρχουν χρονικές στιγμές ( $\omega t = \pi n$ ) στις οποίες η καθαρότητα επανέρχεται και άλλες ( $\omega t = \pi/4 + \pi n/2$ ) στις οποίες η απώλεια πληροφορίας γίνεται η μέγιστη δυνατή:

$$\hat{\rho}_A^R(t) \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

**III.2** Να επαναλάβετε το ίδιο όταν η Χαμιλτονιανή είναι  $H = \omega \hbar \sigma_A^x \sigma_B^x$ .

**Απάντηση.**

Επειδή  $(\sigma_A^x \sigma_B^x)^2 = \hat{I}_A \hat{I}_B$  μπορούμε να γράψουμε:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_{AB}} = e^{-i \omega t \sigma_A^x \sigma_B^x} = \cos(\omega t) \hat{I}_A \hat{I}_B - i \sin(\omega t) \sigma_A^x \sigma_B^x \quad (1)$$

Όπως και στην προηγούμενη άσκηση βρίσκουμε τους τελεστές Kraus:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\pm}^A &= \langle \pm 1/2_{z,B} | \cos(\omega t) \hat{I}_A \hat{I}_B - i \sin(\omega t) \sigma_A^x \sigma_B^x | -1/2_{z,B} \rangle \rightarrow \\ \hat{M}_+^A &= -i \sin(\omega t) \sigma_A^x \doteq \begin{pmatrix} 0 & -i \sin(\omega t) \\ -i \sin(\omega t) & 0 \end{pmatrix}, \hat{M}_-^A = \cos(\omega t) \hat{I}_A \doteq \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Έτσι:

$$\hat{\rho}_A^R(t) = \hat{M}_+^A \hat{\rho}_A(0) \hat{M}_+^{A\dagger} + \hat{M}_-^A \hat{\rho}_A(0) \hat{M}_-^{A\dagger} \doteq \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t) & 0 \\ 0 & \sin^2(\omega t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

**III.3** Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η κατάσταση σύνθετου συστήματος ηλεκτρονίων είναι:

$$|\psi_{AB}(0)\rangle = |1_A\rangle |\vec{0}_B\rangle ; |1_A\rangle = |1/2_{z,A}\rangle, |\vec{0}_B\rangle = \prod_{n=1}^N |-1/2_{z,B}\rangle^{(n)}$$

Η δυναμική του σύνθετου συστήματος διέπεται από τη Hamiltonian

$$\begin{aligned} \hat{H}_{AB} &= \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{V}_{AB} \doteq \frac{1}{2} \hbar \omega_A \sigma_A^z + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \hbar \omega_{j,B} \sigma_{B,j}^z + \hbar \sigma_A^x \sum_{j=1}^N g_j \sigma_{B,j}^x \\ &(\omega_A, \omega_{j,B} > 0, g_j \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι ισχύουν όλες οι σχετικές προϋποθέσεις, να βρεθεί η εξίσωση Lindblad η οποία διέπει τη χρονική εξέλιξη του συστήματος A.

### Απάντηση.

Αναφερόμενοι στους συμβολισμούς του κυρίως κειμένου (εδάφιο III.6) η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα δύο συστήματα έχει τη μορφή:

$$\hat{V}_A^{(1)} = \sigma_A^x, \quad \forall j, \quad \hat{V}_B^{(j)} = \hbar g_j \sigma_{B,j}^x \rightarrow \hat{V}_{AB} = \sum_{j=1}^N \hat{V}_A^{(j)} \otimes \hat{V}_B^{(j)} = \hbar \sigma_A^x \sum_{j=1}^N g_j \sigma_{B,j}^x \quad (1)$$

Στην εικόνα της αλληλεπίδρασης:

$$\hat{V}_{1,A}^{(j)}(t) = \sigma_A^x(t) = e^{\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_A} \sigma_A^x e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_A} \quad (2)$$

Αν γράψουμε

$$e^{\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_A} = \cos(\omega_A t) + i \sin(\omega_A t) \sigma_A^x \quad (3)$$

θα βρούμε:

$$\sigma_A^x(t) = \cos(\omega_A t) \sigma_A^x - \sin(\omega_A t) \sigma_A^y = e^{i\omega_A t} \sigma^+ + e^{-i\omega_A t} \sigma^- \quad (4)$$

Στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό :

$$\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma_A^x + i\sigma_A^y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \frac{1}{2}(\sigma_A^x - i\sigma_A^y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Οι τελεστές (5) είναι οι γνωστοί μας τελεστές ανόδου και καθόδου:

$$\sigma^+ |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle, \quad \sigma^- |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |0\rangle; \quad \{\sigma^+, \sigma^-\} = \hat{I} \quad (6)$$

Συγκρίνοντας με τις εξισώσεις (III.93) και (III.94) διαπιστώνουμε ότι

$$\hat{V}_A(\omega) = \delta(\omega + \omega_A) \sigma_A^+ + \delta(\omega - \omega_A) \sigma_A^- \quad (7)$$

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε την εξίσωση Lindblad. Ο όρος που αντιστοιχεί στη διάχυση (dissipator) είναι (βλ. Εξ. (III.110)):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\hat{\rho}_{1,A}(t)) &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{j,k} \gamma_{kj}(\omega) \left\{ \hat{V}_A(\omega) \hat{\rho}_{1,A}(t) \hat{V}_A^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \left\{ \hat{V}_A^\dagger(\omega) \hat{V}_A(\omega), \hat{\rho}_{1,A}(t) \right\} \right\} = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j,k} \gamma_{kj}(\omega_A) \left( \sigma_A^- \hat{\rho}_{1,A}(t) \sigma_A^+ - \frac{1}{2} \left\{ \sigma_A^+ \sigma_A^-, \hat{\rho}_{1,A}(t) \right\} \right) + \\ &+ \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j,k} \gamma_{kj}(-\omega_A) \left( \sigma_A^+ \hat{\rho}_{1,A}(t) \sigma_A^- - \frac{1}{2} \left\{ \sigma_A^- \sigma_A^+, \hat{\rho}_{1,A}(t) \right\} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Τους συντελεστές στην τελευταία εξίσωση μπορούμε να τους βρούμε μέσω της Εξ. (III.117):

$$\sum_{j,k} \gamma_{kj}(\omega) = \hbar^2 \sum_{j,k} g_k g_j \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega s} \langle \vec{0}_B | e^{\frac{i}{\hbar} s \hat{H}_B} \sigma_{k,B}^x e^{-\frac{i}{\hbar} s \hat{H}_B} \sigma_{j,B}^x | \vec{0}_B \rangle \quad (9)$$

Γράφοντας  $\sigma^x = \sigma^+ + \sigma^-$  και σημειώνοντας ότι  $\sigma^- |0\rangle = 0$ , η τελευταία παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{j,k} \gamma_{kj}(\omega) = \hbar^2 \sum_{j,k} g_k g_j \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega s} e^{\frac{i}{\hbar} s E_0} \langle \vec{0}_B | \sigma_{k,B}^- e^{-\frac{i}{\hbar} s \hat{H}_B} \sigma_{j,B}^+ | \vec{0}_B \rangle \quad (10)$$

Παρατηρώντας ότι

$$\sigma_{j,B}^+ | \vec{0}_B \rangle = \sigma_{j,B}^+ | 0_{1,B}, 0_{2,B}, \dots, 0_{j,B}, \dots, 0_{N,B} \rangle = | 0_{1,B}, 0_{2,B}, \dots, 1_{j,B}, \dots, 0_{N,B} \rangle \equiv | \vec{1}_{(j),B} \rangle \quad (11)$$

η εξίσωση (10) γίνεται:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \gamma_{kj}(\omega) &= \hbar^2 \sum_{j,k} g_k g_j \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega s} e^{\frac{i}{\hbar} s E_0} \langle \vec{1}_{(k),B} | e^{-\frac{i}{\hbar} s \hat{H}_B} | \vec{1}_{(j),B} \rangle = \hbar^2 \sum_j g_j^2 \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega s} e^{\frac{i}{\hbar} s E_0} e^{-\frac{i}{\hbar} s E_{1j}} = \\ &= \hbar^2 \sum_j g_j^2 \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega s} e^{\frac{i}{\hbar} s E_0} e^{-\frac{i}{\hbar} s E_{1j}} = \hbar^2 \sum_j g_j^2 \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i(\omega - \omega_{j,B}) s} = 2\pi \hbar^2 \sum_j g_j^2 \delta(\omega - \omega_{j,B}) \end{aligned} \quad (12)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$D(\omega) = \hbar \sum_j g_j^2 \delta(\omega - \omega_{j,B}) \quad (13)$$

η οποία χαρακτηρίζει πλήρως τη δομή της αλληλεπίδρασης του περιβάλλοντος με το σύστημα. Έτσι, βρίσκουμε:

$$\sum_{j,k} \gamma_{kj}(\omega) = 2\pi \hbar D(\omega) \quad (14)$$

Γράφοντας

$$2\pi \hbar D(\omega_A) = \Gamma \quad (15)$$

και σημειώνοντας ότι  $D(-\omega_A) = 0$ , ο dissipator (8) παίρνει τη μορφή:

$$\mathbf{D}(\hat{\rho}_{I,A}(t)) = \frac{1}{\hbar} \Gamma \left( \sigma_A^- \hat{\rho}_{I,A}(t) \sigma_A^+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_A^+ \sigma_A^-, \hat{\rho}_{I,A}(t) \} \right) \quad (16)$$

Η επίδραση του περιβάλλοντος θα αλλάξει και τις χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος με αποτέλεσμα η εξίσωση Lindblad (III.112) να πάρει τη μορφή:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_A(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hbar}{2} \omega_A^R \sigma_A^z, \hat{\rho}_A(t) \right] + \frac{1}{\hbar} \Gamma \left( \sigma_A^- \hat{\rho}_A(t) \sigma_A^+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_A^+ \sigma_A^-, \hat{\rho}_A(t) \} \right) \quad (17)$$



Για τον υπολογισμό της διορθωμένης συχνότητας θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (III.113):

$$\hat{H}_{LS} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{j,k} S_{kj}(\omega) \hat{V}_A^\dagger(\omega) \hat{V}_A(\omega) \quad (18)$$

Οι συναρτήσεις οι οποίες ορίζουν τον συντελεστή ορίζονται στη σχέση (III.110) :

$$i\hbar S_{kj}(\omega) = \frac{1}{2} (G_{kj}(\omega) - G_{jk}^*(\omega)) = \frac{\hbar^2}{2} \delta_{jk} g_j^2 \int_0^{\infty} ds e^{i(\omega - \omega_{j,B})s} - \frac{\hbar^2}{2} \delta_{jk} g_j^2 \int_0^{\infty} ds e^{-i(\omega - \omega_{j,B})s} \quad (19)$$

Για να προχωρήσουμε πρέπει να χειριστούμε τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην τελευταία έκφραση:

$$\int_0^{\infty} ds e^{\pm i(\omega - \omega_{j,B})s} = \int_{-\infty}^{\infty} ds \theta(s) e^{\pm i(\omega - \omega_{j,B})s}, \quad \theta(s) = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ 1/2 & s = 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases} \quad (20)$$

Η συνάρτηση βήματος μπορεί να γραφεί ως:

$$\theta(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - i\varepsilon} e^{is\xi} \quad (21)$$

Συνδυάζοντας τις τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε

$$\int_0^{\infty} ds e^{\pm i(\omega - \omega_{j,B})s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - i\varepsilon} 2\pi \delta(\xi \pm (\omega - \omega_{j,B})) = \mp \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{i(\omega - \omega_{j,B}) + i\varepsilon} \quad (22)$$

Υπάρχει ένα πολύ γνωστό θεώρημα στην μιγαδική ανάλυση (θεώρημα Sokhotski-Plemelj) το οποίο βεβαιώνει ότι

$$\mp \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(\omega - \omega_{j,B}) + i\varepsilon} = \text{Pr.} \frac{1}{\omega - \omega_{j,B}} \pm i\pi \delta(\omega - \omega_{j,B}) \quad (23)$$

Επομένως:

$$S_{kj}(\omega) = -\hbar \delta_{jk} g_j^2 \text{Pr.} \frac{1}{\omega - \omega_{j,B}} \quad (24)$$

Ο συμβολισμός δηλώνει την κύρια τιμή (Cauchy principal value) του ολοκληρώματος της συνάρτησης με οποιαδήποτε ομαλή και συνεχή συνάρτηση:

$$\text{Pr.} \frac{1}{\omega - \omega_{j,B}} : \text{Pr.} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_{j,B}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega_{j,B} - \varepsilon} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_{j,B}} + \int_{\omega_{j,B} + \varepsilon}^{\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_{j,B}} \right\} \quad (25)$$

Με τον συνδυασμό των εξισώσεων (7), (18) και (24) βρίσκουμε:

$$\hat{H}_{LS} = -\hbar \sum_{j=1}^N g_j^2 \text{Pr} \cdot \frac{1}{\omega_A - \omega_{j,B}} [\sigma_A^-, \sigma_A^+] \equiv \frac{\hbar \delta \omega_A}{2} \sigma_A^z \quad (26)$$

Στην τελευταία σχέση γράψαμε:

$$\delta \omega_A \equiv \hbar \sum_{j=1}^N g_j^2 \text{Pr} \cdot \frac{1}{\omega_{j,B} - \omega_A} \quad (27)$$

Επομένως, η ύπαρξη του περιβάλλοντος έχει αλλάξει τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος:

$$\omega_A \rightarrow \omega_A^R = \omega_A + \delta \omega_A \quad (28)$$

**III.4** Να επαναλάβετε το προηγούμενο πρόβλημα εάν η αλληλεπίδραση των δύο συστημάτων έχει τη μορφή:

$$\hat{V}_{AB} = \hbar g_j \sum_{j=1}^N (\sigma_{j,B}^+ \sigma_A^- + \sigma_{j,B}^- \sigma_A^+)$$

**III.5** Να επαναλάβετε την άσκηση Γ.3 όταν η Χαμιλτονιανή του συνολικού συστήματος είναι

$$\hat{H}_{AB} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{V}_{AB} = \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N \hbar \omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \hbar \sum_{j=1}^N g_j (\hat{a} \hat{b}_j^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{b}_j)$$

$$(\omega, \omega_j > 0, g_j \in \mathbb{R})$$

Στην έκφραση αυτή οι τελεστές  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}, \hat{b}^\dagger$  είναι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας οι οποίοι αφορούν στα συστήματα A και B αντίστοιχα.

**Υπόδειξη.** Εργαστείτε όπως στην άσκηση III.3. Η εξίσωση Lindblad που θα βρείτε έχει τη μορφή

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}(t)] + \frac{1}{\hbar} \Gamma \left( \hat{a} \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}(t) \} \right)$$

**III.6** Με βάση την εξίσωση Lindblad του προηγούμενου προβλήματος, να υπολογίσετε τη χρονική εξέλιξη της μέσης ενέργειας του συστήματος.

**Υπόδειξη.** Αυτό που πρέπει να υπολογίσετε είναι η ποσότητα

$$\langle E(t) \rangle / \hbar \omega = \text{Tr} [\hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}]$$

**III.7** Να λύσετε την εξίσωση Lindblad του προβλήματος III.3:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[\frac{\hbar}{2}\omega^R\sigma^z, \hat{\rho}(t)\right] + \frac{1}{\hbar}\Gamma\left(\sigma^-\hat{\rho}(t)\sigma^+ - \frac{1}{2}\{\sigma^+\sigma^-, \hat{\rho}(t)\}\right)$$

**Απάντηση.**

Αν γράψουμε

$$\hat{\rho} \doteq \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (1)$$

η εξίσωση Lindblad παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\rho}_{00} & \dot{\rho}_{01} \\ \dot{\rho}_{10} & \dot{\rho}_{11} \end{pmatrix} &= \hbar\omega^R \begin{pmatrix} 0 & \rho_{01} \\ -\rho_{10} & 0 \end{pmatrix} + i\Gamma \begin{pmatrix} -\rho_{00} & -\rho_{01}/2 \\ -\rho_{10}/2 & 1-\rho_{11} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i\Gamma\rho_{00} & (\omega^R - i\Gamma/2)\rho_{01} \\ -(\omega^R + i\Gamma/2)\rho_{10} & i\Gamma(1-\rho_{11}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Έτσι, καταλήγουμε στην τετράδα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{00}(t) &= -\frac{\Gamma}{\hbar}\rho_{00}(t) & , & & \dot{\rho}_{01}(t) &= -i\left(\omega^R - i\frac{\Gamma}{2\hbar}\right)\rho_{01}(t) \\ \dot{\rho}_{10}(t) &= i\left(\omega^R + i\frac{\Gamma}{2\hbar}\right)\rho_{10}(t) & , & & \dot{\rho}_{11}(t) &= \frac{\Gamma}{\hbar}(1-\rho_{11}(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

Οι εξισώσεις μπορούν να λυθούν με αρχική συνθήκη:

$$\hat{\rho}(0) \doteq \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \rho_{10}(0) \\ \rho_{01}(0) & \rho_{00}(0) \end{pmatrix}, \rho_{ij} \equiv \langle i|\hat{\rho}|j\rangle \quad , \quad i, j = 0, 1 \quad (4)$$

Η λύση είναι πολύ εύκολο να βρεθεί:

$$\hat{\rho}(t) \doteq \begin{pmatrix} e^{-\Gamma t/\hbar}\rho_{11}(0) & e^{-i(\omega^R - i\Gamma/2\hbar)t}\rho_{10}(0) \\ e^{i(\omega^R + i\Gamma/2\hbar)t}\rho_{01}(0) & 1 - e^{-\Gamma t/\hbar}\rho_{11}(0) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Ορισμένες παρατηρήσεις για το αποτέλεσμα αυτό είναι χρήσιμες:

- Σε κάθε πεπερασμένη χρονική στιγμή  $0 < t < \infty$ , η κατάσταση του συστήματος είναι μη καθαρή. Πράγματι, μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι

$$\text{Tr}\hat{\rho}^2(t) = e^{-2\Gamma t/\hbar}\text{Tr}\hat{\rho}^2(0) + (1 - e^{-\Gamma t/\hbar})(1 - e^{-\Gamma t/\hbar}(1 - 2\rho_{00}(0))) \quad (6)$$

Αφού η αρχική κατάσταση είναι καθαρή :

$$\text{Tr}\hat{\rho}^2(0) = 1, \rho_{00}(0) \leq 1 \rightarrow -(1 - 2\rho_{00}(0)) \leq 1 \quad (7)$$

Επομένως:

$$\text{Tr}\hat{\rho}^2(t) \leq e^{-2\Gamma t/\hbar} + (1 - e^{-\Gamma t/\hbar})^2 < (e^{-\Gamma t/\hbar} + 1 - e^{-\Gamma t/\hbar})^2 = 1 \quad \forall t < \infty \quad (8)$$

- Όποια και είναι η αρχική καθαρή κατάσταση του συστήματος, στο όριο  $t \rightarrow \infty$ , η προκύπτουσα κατάσταση θα είναι επίσης καθαρή:

$$\hat{\rho}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| \quad (9)$$

Η φυσική σημασία αυτού του αποτελέσματος είναι απλή. Εάν το σύστημα ξεκινήσει από τη διεγερμένη κατάσταση

$$\hat{\rho}(0) = |1\rangle\langle 1| \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

η επιπλέον ενέργεια θα **διαχυθεί** στο περιβάλλον και το σύστημα, τελικά, θα αποδιεγερθεί. Επειδή η όλη διαδικασία είναι Μαρκοβιανή η ενέργεια αυτή δεν θα επιστρέψει στο σύστημα και για αυτό η κατάσταση, στο όριο  $t \rightarrow \infty$ , είναι καθαρή.

- Ο μαθηματικός λόγος ο οποίος επιτρέπει τη διάχυση (**dissipation**) της ενέργειας οφείλεται στο γεγονός ότι η ενέργεια του συστήματος δεν διατηρείται λόγω της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον:  $[\hat{H}_A, \hat{V}_{AB}] \neq 0$  (αναφερόμαστε πάντα στο πρόβλημα III.3). Εάν αυτό δεν συνέβαινε δεν θα υπήρχε διάχυση. Ως παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση:

$$\hat{V}_{AB} = \hbar\sigma_A^z \sum_{j=1}^N g_j \sigma_{B,j}^x \quad (11)$$

Εάν επαναλάβουμε τους υπολογισμούς που κάναμε στο πρόβλημα III.3 θα διαπιστώσουμε ότι

$$\hat{V}_{1,A}^{(j)} = \sigma_A^z, \forall j \rightarrow \hat{V}_{1,A}^{(j)}(t) = \sigma_A^z(t) = e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}_A} \sigma_A^z e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}_A} = \sigma_A^z \quad (12)$$

Επομένως

$$\hat{V}_A(\omega) = \delta(\omega) \sigma_A^z \quad (13)$$

Αυτό το αποτέλεσμα οδηγεί στο συμπέρασμα  $\sum_{j,k} \gamma_{kj}(\omega) = 0$  και επομένως ότι ο

dissipator μηδενίζεται:  $\mathbf{D}(\hat{\rho}_A(t)) = 0$ . Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτό το συμπέρασμα, δηλαδή ότι για μια αλληλεπίδραση της μορφής (11), το σύστημα δεν εμφανίζει decoherence, ισχύει μόνο στα όρια των υποθέσεων στις οποίες βασίζεται η εξίσωση Lindblad.

**III.8** Έστω δισταθμικό άτομο A εμβαπτισμένο σε περιβάλλον B. Η αλληλεπίδραση ανάμεσά τους είναι τέτοια ώστε όταν το άτομο βρίσκεται στη βασική του κατάσταση  $|0_A\rangle$  να παραμένει σ' αυτήν. Όταν βρίσκεται στη διεγερμένη του κατάσταση  $|1_A\rangle$ , αποδιεγείρεται εκπέμποντας ακτινοβολία την οποία απορροφά το περιβάλλον. Με την απλοποιητική υπόθεση ότι και το περιβάλλον μπορεί να βρεθεί μόνο σε δύο καταστάσεις τη βασική  $|0_B\rangle$  και τη διεγερμένη  $|1_B\rangle$ , η δυναμική της διαδικασίας, για επαρκώς μικρό χρονικό διάστημα  $\delta t$ , μπορεί να περιγραφεί ως

$$\begin{aligned} \hat{U}^{AB}(\delta t)(|0_A\rangle|0_B\rangle) &= |0_A\rangle|0_B\rangle \\ \hat{U}^{AB}(\delta t)(|1_A\rangle|0_B\rangle) &= \sqrt{p(\delta t)}|0_A\rangle|1_B\rangle + \sqrt{1-p(\delta t)}|1_A\rangle|0_B\rangle \end{aligned} \quad (1)$$

Να βρεθεί η κατάσταση του ατόμου μετά από χρόνο  $t$ .

### Απάντηση.

Πριν από οτιδήποτε άλλο, ορισμένες εξηγήσεις είναι απαραίτητες: Στην προηγούμενη σχέση,  $\hat{U}$  είναι ο μοναδιακός τελεστής χρονικής εξέλιξης. Ο χρόνος  $\delta t$  για τον οποίο εφαρμόζεται, θεωρείται πολύ μικρός σε σχέση με τη χαρακτηριστική κλίμακα του συστήματος και πολύ μεγαλύτερος από τον χρόνο αποκατάστασης του περιβάλλοντος:  $\tau_B \ll \delta t \ll T_A$  (βλ. σχέση III.40).

Αυτή η χρονική κλιμάκωση, η οποία βρίσκεται στη βάση της προσέγγισης Markov, μπορεί να φωτίσει το φυσικό περιεχόμενο της σχέσης (1): Σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα το άτομο είναι εμβαπτισμένο σε περιβάλλον πολλών βαθμών ελευθερίας (στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, για παράδειγμα). Η αλληλεπίδραση ατόμου-περιβάλλοντος μπορεί, για επαρκώς μικρό χρονικό διάστημα, να ενεργοποιήσει οποιοδήποτε από τα ενεργειακά επίπεδα του περιβάλλοντος λόγω της σχέσης αβεβαιότητας  $\delta t \delta E \sim \hbar$ . Όταν, όμως, περάσει το χρονικό διάστημα που είναι απαραίτητο για το σβήσιμο των συσχετίσεων στο περιβάλλον, αυτό ισορροπεί με τον ενεργειακά οικονομικότερο τρόπο. Αυτό το σκηνικό απεικονίζει η σχέση (1) η οποία είναι μια καρικατούρα της υποκείμενης φυσικής.

Σε έναν πλήρη υπολογισμό η πιθανότητα  $p = p(\delta t)$  μπορεί να βρεθεί αναλυτικά. Στο απλοποιημένο μοντέλο (1) θα υποθέσουμε ότι η μορφή της είναι τέτοια ώστε να

μπορούμε να καταλήξουμε στην εξίσωση Lindblad. Όπως θα διαπιστώσουμε αυτό σημαίνει ότι  $p(\delta t) \sim \delta t$ .

Μετά από τη συζήτηση αυτή, μπορούμε να προχωρήσουμε στη λύση του προβλήματός μας.

Οι τελεστές Kraus οι οποίοι περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη του συστήματος A είναι:

$$\hat{M}_0^A(\delta t) = \langle 0_B | \hat{U}^{AB}(\delta t) | 0_B \rangle, \quad \hat{M}_1^A(\delta t) = \langle 1_B | \hat{U}^{AB}(\delta t) | 0_B \rangle \quad (1)$$

Οι αναπαραστάσεις των τελεστών αυτών στη βάση  $\{|0_A\rangle, |1_A\rangle\}$  βρίσκεται εύκολα:

$$\hat{M}_0^A(\delta t) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p(\delta t)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{M}_1^A(\delta t) \doteq \begin{pmatrix} \sqrt{1-p(\delta t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Αμέσως μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$\hat{M}_0^{A\dagger} \hat{M}_0^A + \hat{M}_1^{A\dagger} \hat{M}_1^A \doteq \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Με τη βοήθεια των τελεστών (2) βρίσκουμε:

$$\hat{\rho}_A(\delta t) = \hat{M}_0^A \hat{\rho}_A(0) \hat{M}_0^{A\dagger} + \hat{M}_1^A \hat{\rho}_A(0) \hat{M}_1^{A\dagger} \doteq \begin{pmatrix} (1-p)\rho_{11} & \sqrt{1-p}\rho_{10} \\ \sqrt{1-p}\rho_{01} & \rho_{00} + p\rho_{11} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Για το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιήσαμε ως αρχική συνθήκη την κατάσταση στην σχέση (4) του προηγούμενου προβλήματος.

Το επόμενο βήμα δεν είναι τετριμμένο. Ο λόγος είναι ότι η κατάσταση (4) δεν είναι καθαρή. Εάν λάβουμε υπόψη ότι  $\hat{\rho}_A(\delta t) = \text{Tr}_B \{ \hat{\rho}_{AB}(\delta t) \}$ , αυτή η διαπίστωση μας

οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τη χρονική στιγμή  $t = \delta t$  η κατάσταση του σύνθετου συστήματος είναι εναγκαλισμένη και, ως εκ τούτου, μη διαχωρίσιμη. Επομένως, αυστηρά μιλώντας, δεν μπορούμε να επαναλάβουμε τον κανόνα (4) για να βρούμε την κατάσταση του συστήματος A τη χρονική στιγμή  $t = 2\delta t$ . Όπως, όμως, σημειώσαμε στα αρχικά σχόλια η άσκηση αυτή είναι μια καρικατούρα ενός ρεαλιστικού προβλήματος στο οποίο οι όροι για την ισχύ της Μαρκοβιανής προσέγγισης ισχύουν.

Με αυτή τη συμφωνία, θα γράψουμε

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A(2\delta t) &= \hat{M}_0^A(\delta t) \hat{\rho}_A(\delta t) \hat{M}_0^{A\dagger}(\delta t) + \hat{M}_1^A(\delta t) \hat{\rho}_A(\delta t) \hat{M}_1^{A\dagger}(\delta t) = \\ &\doteq \begin{pmatrix} (1-p)^2 \rho_{11}(0) & (\sqrt{1-p})^2 \rho_{10}(0) \\ (\sqrt{1-p})^2 \rho_{01} & 1 - (1-p)^2 \rho_{11}(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Με την ίδια λογική μπορούμε να βρούμε την κατάσταση του συστήματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t = n\delta t$ :

$$\hat{\rho}_A(t) \doteq \begin{pmatrix} (1-p)^n \rho_{11}(0) & (1-p)^{n/2} \rho_{10}(0) \\ (1-p)^{n/2} \rho_{01}(0) & 1-(1-p)^n \rho_{11}(0) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Αν υποθέσουμε ότι  $p = \delta t \Gamma / \hbar$  θα βρούμε στο όριο  $\delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ :

$$(1-p)^n = \left(1 - \frac{\Gamma}{\hbar} \delta t\right)^n = \left(1 - \frac{\Gamma}{\hbar} t / n\right)^n \underset{n \rightarrow \infty}{=} e^{-\Gamma t / \hbar} \quad (7)$$

Επομένως:

$$\hat{\rho}_A(t) \doteq \begin{pmatrix} e^{-\Gamma t / \hbar} \rho_{11}(0) & e^{-\Gamma t / 2\hbar} \rho_{10}(0) \\ e^{-\Gamma t / 2\hbar} \rho_{01}(0) & 1 - e^{-\Gamma t / \hbar} \rho_{11}(0) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Το αποτέλεσμα αυτό συμπίπτει με αυτό του προηγούμενου προβλήματος (εάν θέσουμε  $\omega^R = 0$ ). Το γεγονός οφείλεται στο ότι το παρόν πρόβλημα συνοψίζει, αν και με σχηματικό τρόπο, τη διαδικασία της διάχυσης του προηγούμενου, πιο σύνθετου, προβλήματος.

**III.9** Αναφερόμενοι στην προηγούμενη άσκηση να χρησιμοποιήσετε τους τελεστές Kraus που βρήκατε για να κατασκευάσετε την εξίσωση Lindblad η οποία περιγράφει τη χρονική εξέλιξη του συστήματος A.

**Απάντηση.** Οι τελεστές που βρήκαμε στην προηγούμενη άσκηση είναι οι:

$$\begin{aligned} \hat{M}_0^A(\delta t) &\doteq \sqrt{p(\delta t)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{p(\delta t)} \sigma^- , \\ \hat{M}_1^A(\delta t) &\doteq \begin{pmatrix} \sqrt{1-p(\delta t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1-p(\delta t)} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \sqrt{1-p(\delta t)} \frac{1}{2} (1 + \sigma^z) + \frac{1}{2} (1 - \sigma^z) = \sqrt{1-p(\delta t)} \sigma^+ \sigma^- + \sigma^- \sigma^+ \end{aligned} \quad (1)$$

Αν γράψουμε  $p(\delta t) = \Gamma \delta t / \hbar$  και αναπτύξουμε σε δυνάμεις του  $\delta t$  θα βρούμε:

$$\begin{aligned} \hat{M}_0^A(\delta t) &= \sqrt{\Gamma / \hbar} \sigma^- \sqrt{\delta t} , \\ \hat{M}_1^A(\delta t) &\approx (1 - \Gamma \delta t / 2\hbar) \sigma^+ \sigma^- - \sigma^- \sigma^+ = \\ &= \{ \sigma^+ , \sigma^- \} - \Gamma \delta t / 2\hbar \sigma^+ \sigma^- = 1 - \Gamma \delta t / 2\hbar \sigma^+ \sigma^- \end{aligned} \quad (2)$$

Για την κατασκευή της εξίσωσης Lindblad μπορούμε να αναφερθούμε στο αντίστοιχο εδάφιο του κυρίως κειμένου και συγκεκριμένα στις εξισώσεις (Γ.46)-(Γ.49). Είναι, όμως, χρήσιμο να την κατασκευάσουμε και στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Ξεκινάμε από τη σχέση-κλειδί:

$$\hat{\rho}(t + \delta t) = \hat{M}_0^A(\delta t)\hat{\rho}_A(t)\hat{M}_0^{A\dagger}(\delta t) + \hat{M}_1^A(\delta t)\hat{\rho}_A(t)\hat{M}_1^{A\dagger}(\delta t) \quad (3)$$

Η σχέση αυτή, όπως είπαμε και στην προηγούμενη άσκηση, ισχύει μόνο υπό τις προϋποθέσεις της προσέγγισης Born-Markov.

Συνδυάζοντας τις (2) και (3) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t + \delta t) &\approx \delta t \Gamma / \hbar \sigma^- \hat{\rho}_A(t) \sigma^+ + (1 - \delta t \Gamma / 2\hbar \sigma^+ \sigma^-) \hat{\rho}_A(t) (1 - \delta t \Gamma / 2\hbar \sigma^+ \sigma^-) \approx \\ &\approx \delta t \frac{\Gamma}{\hbar} \sigma^- \hat{\rho}_A(t) \sigma^+ + \hat{\rho}_A(t) - \delta t \frac{\Gamma}{2\hbar} (\sigma^+ \sigma^- \hat{\rho}_A(t) + \hat{\rho}_A(t) \sigma^+ \sigma^-) \end{aligned} \quad (4)$$

Επομένως:

$$\frac{\hat{\rho}(t + \delta t) - \hat{\rho}_A(t)}{\delta t} \approx \frac{\Gamma}{\hbar} \sigma^- \hat{\rho}_A(t) \sigma^+ - \frac{\Gamma}{2\hbar} \{ \sigma^+ \sigma^-, \hat{\rho}_A(t) \} \quad (5)$$

Στο όριο που το χρονικό βήμα  $\delta t$  θεωρείται πολύ μικρό σε σύγκριση με τις κλίμακες του συστήματος η εξίσωση (5) γίνεται η διαφορική εξίσωση Lindblad:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_A(t) = \frac{\Gamma}{\hbar} \sigma^- \hat{\rho}_A(t) \sigma^+ - \frac{\Gamma}{2\hbar} \{ \sigma^+ \sigma^-, \hat{\rho}_A(t) \} \quad (6)$$

Όπως είναι προφανές η εξίσωση αυτή με την εξίσωση Lindblad των ασκήσεων Γ.3 και Γ.5 εάν θέσουμε  $\omega^R = 0$ .

**III.10** Αναφερόμενοι, και πάλι, στην άσκηση III.6 να βρείτε τελεστές τέτοιους ώστε να γράψετε τον τελεστή πυκνότητας (8) με τη μορφή:

$$\hat{\rho}_A(t) = \sum_j \hat{K}_j^A(t) \hat{\rho}_A(0) \hat{K}_j^{A\dagger}(t), \quad \sum_j \hat{K}_j^{A\dagger}(t) \hat{K}_j^A(t) = \hat{I}^A \quad (1)$$

**Απάντηση.**

Όπως έχουμε συζητήσει στο κυρίως κείμενο εάν, τόσο ο τελεστής  $\hat{\rho}_A(t)$  όσο και ο  $\hat{\rho}_A(0)$ , είναι τελεστές πυκνότητας, πάντα μπορούμε να βρούμε τελεστές Kraus οι οποίοι να υλοποιούν την αναπαράσταση (1). Έχουμε, επίσης, δει ότι η αναπαράσταση (1) δεν είναι μοναδική (βλ. Εξ. III.23). Με την ανάλυση αυτή στο μυαλό μπορούμε να προχωρήσουμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα.



Όπως είναι προφανές οι τελεστές στην (1) δεν εξαρτώνται από τη μορφή της μήτρας πυκνότητας την αρχική κατάσταση του συστήματος. Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κατάσταση (8) της άσκησης Γ.6 θεωρώντας ότι:

$$\hat{\rho}_A(0) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |1\rangle\langle 1| \quad (2)$$

Στην περίπτωση αυτή

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A(t) &\doteq \begin{pmatrix} e^{-\Gamma t/\hbar} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\Gamma t/\hbar} \end{pmatrix} = e^{-\Gamma t/\hbar} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 - e^{-\Gamma t/\hbar}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= e^{-\Gamma t/\hbar} |1\rangle\langle 1| + (1 - e^{-\Gamma t/\hbar}) |0\rangle\langle 0| = e^{-\Gamma t/\hbar} |1\rangle\langle 1| + (1 - e^{-\Gamma t/\hbar}) \sigma^- |1\rangle\langle 1| \sigma^+ \end{aligned} \quad (3)$$

Θα μπορούσαμε, ορμώμενοι από τη τελευταία σχέση, να δοκιμάσουμε την επιλογή:

$$\hat{K}_1^\Lambda(t) = e^{-\Gamma t/2\hbar} \hat{I}^\Lambda, \quad \hat{K}_0^\Lambda(t) = \sqrt{1 - e^{-\Gamma t/2\hbar}} \sigma^- \quad (4)$$

Εν τούτοις, μια τέτοια επιλογή δεν είναι σωστή αφού οι τελεστές (4) δεν ικανοποιούν τη σχέση πληρότητας.

Για να βρούμε τις πλέον γενικές επιλογές θα πρέπει να λάβουμε υπόψη

$$\sigma^- |1\rangle = |0\rangle, \quad \sigma^+ |1\rangle = 0, \quad \sigma^- |0\rangle = 0, \quad \sigma^+ |0\rangle = |1\rangle \quad (5)$$

$$\{\sigma^+, \sigma^-\} = \hat{I}, \quad (\sigma^+)^2 = (\sigma^-)^2 = 0, \quad (\sigma^\pm \sigma^\mp)^n = \sigma^\pm \sigma^\mp \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (6)$$

και ότι  $\hat{K}_1^\Lambda(0) = \hat{I}^\Lambda$ ,  $\hat{K}_0^\Lambda(0) = 0$ , η πιο γενική επιλογή για τους τελεστές Kraus είναι:

$$\hat{K}_1^\Lambda(t) = e^{-\Gamma t/2\hbar} \sigma^+ \sigma^- + \sigma^- \sigma^+, \quad \hat{K}_0^\Lambda(t) = \sqrt{1 - e^{-\Gamma t/2\hbar}} (\sigma^- + a \sigma^+ \sigma^-) \quad (7)$$

Η απαίτηση της πληρότητας μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι  $a = 0$  και επομένως:

$$\hat{K}_1^\Lambda(t) = e^{-\Gamma t/2\hbar} \sigma^+ \sigma^- + \sigma^- \sigma^+ = e^{-\frac{\Gamma t}{2\hbar} \sigma^+ \sigma^-}, \quad \hat{K}_0^\Lambda(t) = \sqrt{1 - e^{-\Gamma t/2\hbar}} \sigma^- \quad (8)$$

Είναι πολύ εύκολο να πιστοποιήσουμε ότι εάν η αρχική κατάσταση είναι η

$$\hat{\rho}_A(0) \doteq \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \rho_{10}(0) \\ \rho_{01}(0) & \rho_{00}(0) \end{pmatrix} \quad (9)$$

η χρονικά εξελιγμένη παίρνει τη μορφή:

$$\hat{\rho}_A(t) \doteq \begin{pmatrix} e^{-\Gamma t/\hbar} \rho_{11}(0) & e^{-\Gamma t/2\hbar} \rho_{10}(0) \\ e^{-\Gamma t/2\hbar} \rho_{01}(0) & 1 - e^{-\Gamma t/\hbar} \rho_{11}(0) \end{pmatrix} \quad (10)$$

**III. 11** Έστω δισταθμικό άτομο A εμβαπτισμένο σε περιβάλλον B. Η αλληλεπίδραση ανάμεσά τους είναι τέτοια ώστε όταν το άτομο βρίσκεται στη βασική του κατάσταση  $|0_A\rangle$  θα παραμείνει σ' αυτήν αλλά το περιβάλλον, με κάποια πιθανότητα, θα μεταβεί στην πρώτη διεγερμένη  $|1_B\rangle$ . Όταν το άτομο βρίσκεται στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση  $|1_A\rangle$ , το περιβάλλον θα μεταβεί, με την ίδια πιθανότητα, στη δεύτερη διεγερμένη  $|2_B\rangle$ .

Με την απλοποιητική υπόθεση ότι και το περιβάλλον μπορεί να βρεθεί μόνο σε τρεις καταστάσεις  $|0_B\rangle$ ,  $|1_B\rangle$  και  $|2_B\rangle$  η δυναμική της διαδικασίας, για επαρκώς μικρό διάστημα, μπορεί να περιγραφεί ως:

$$\begin{aligned}\hat{U}^{AB}(\delta t)(|0_A\rangle|0_B\rangle) &= \sqrt{1-p(\delta t)}|0_A\rangle|0_B\rangle + \sqrt{p(\delta t)}|0_A\rangle|1_B\rangle \\ \hat{U}^{AB}(\delta t)(|1_A\rangle|0_B\rangle) &= \sqrt{1-p(\delta t)}|1_A\rangle|0_B\rangle + \sqrt{p(\delta t)}|1_A\rangle|2_B\rangle\end{aligned}$$

Να βρείτε την κατάσταση του ατόμου μετά από χρόνο  $t$ .

**Απάντηση.**

Οι τελεστές Kraus είναι:

$$\hat{M}_j^A(\delta t) = \langle j_B | \hat{U}^{AB}(\delta t) | 0_B \rangle, \quad j = 0, 1, 2 \quad (1)$$

Εάν τους αναπαραστήσουμε στη βάση  $\{|0_A\rangle, |1_A\rangle\}$  θα βρούμε:

$$\hat{M}_0^A(\delta t) \doteq \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{M}_1^A(\delta t) \doteq \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{M}_2^A(\delta t) \doteq \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Επομένως:

$$\hat{\rho}(\delta t) = (1-p)\hat{\rho}(0) + p \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{\rho}(0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{\rho}(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι τελεστές (2) δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Εάν παρατηρήσουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \sigma^z), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \sigma^z) \quad (4)$$

η εξίσωση (3) γράφεται:

$$\hat{\rho}(\delta t) = \left(1 - \frac{p}{2}\right) \hat{\rho}(0) + \frac{p}{2} \sigma^z \hat{\rho}(0) \sigma^z \quad ($$

Η τελευταία σημαίνει ότι θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε 2 τελεστές Kraus:

$$\hat{N}_0^A = \sqrt{1-p/2} \hat{I}^A, \quad \hat{N}_1^A = \sqrt{p/2} \sigma^z \quad (6)$$

Σε κάθε περίπτωση, εάν ξεκινήσουμε από την  $\hat{\rho}_A(0) \doteq \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \rho_{10}(0) \\ \rho_{01}(0) & \rho_{00}(0) \end{pmatrix}$  θα βρούμε:

$$\hat{\rho}_A(\delta t) \doteq \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & (1-p)\rho_{10}(0) \\ (1-p)\rho_{01}(0) & \rho_{00}(0) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Θεωρώντας ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις για την προσέγγιση Markov, μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία  $n$  φορές και να βρούμε την κατάσταση μετά από χρόνο  $t = n\delta t$ :

$$\hat{\rho}_A(t) \doteq \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & (1-p)^n \rho_{10}(0) \\ (1-p)^n \rho_{01}(0) & \rho_{00}(0) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Όπως είπαμε και στις προηγούμενες ασκήσεις θα υποθέσουμε ότι  $p = \Gamma \delta t / \hbar \ll 1$  και αφού

$$(1-p)^n = (1 - \Gamma t / \hbar n)^n \underset{n \rightarrow \infty}{=} e^{-\Gamma t / \hbar} \quad (9)$$

βρίσκουμε:

$$\hat{\rho}_A(t) \doteq \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & e^{-\Gamma t / \hbar} \rho_{10}(0) \\ e^{-\Gamma t / \hbar} \rho_{01}(0) & \rho_{00}(0) \end{pmatrix} \quad (10)$$

**Σχόλιο.**

Αυτό που διαβάζει κανείς από το αποτέλεσμα (10) είναι ότι εάν, το υπό μελέτη σύστημα, ξεκινήσει από μια κατάσταση της μορφής

$$|\psi\rangle = |a\rangle|0\rangle + |b\rangle e^{i\theta} |1\rangle \rightarrow \rho(0) \doteq \begin{pmatrix} |a|^2 & |ab|e^{i\theta} \\ |ab|e^{-i\theta} & |b|^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

θα καταλήξει σε μια μη καθαρή κατάσταση στην οποία η διαφορά φάσης ανάμεσα στους όρους της επαλληλίας δεν έχει σημασία:

$$\hat{\rho}(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\doteq} \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Στην κατάσταση (12) η περιγραφή του συστήματος είναι πλέον κλασική αφού οι διαφορές φάσης δεν παίζουν κανένα ρόλο και, επομένως, όλα τα παρατηρήσιμα μεγέθη καθορίζονται από τις πιθανότητες  $|a|^2$  και  $|b|^2$ . Θα πρέπει να προσέξουμε ότι αυτό το συμπέρασμα, όπως και η μορφή του διαγώνιου πίνακα (12), εξαρτάται από τη βάση  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  την οποία χρησιμοποιήσαμε για την αναπαράσταση των τελεστών του συστήματος. Εάν είχαμε διαλέξει μια άλλη βάση, για παράδειγμα την  $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle) / \sqrt{2}$ , το αποτέλεσμα (12) θα είχε τη μορφή:

$$\hat{\rho}(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\doteq} \begin{pmatrix} 1/2 + |ab| \cos \theta & 0 \\ 0 & 1/2 - |ab| \cos \theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

Αυτή η απλή παρατήρηση συνδέεται με το ζήτημα της προτιμώμενης βάσης (**preferred basis**) της βάσης, δηλαδή, στην οποία η περιγραφή του συστήματος γίνεται «κλασική» και βασίζεται σε κλασικές πιθανότητες. Στο εξαιρετικά απλό παράδειγμα που εξετάσαμε, η βάση αυτή τέθηκε από τη μορφή της αλληλεπίδρασης συστήματος-περιβάλλοντος. Σε πολλά ρεαλιστικά προβλήματα η προτιμητέα βάση είναι καθορίζεται από τις ιδιοκαταστάσεις της θέσης  $\{|x\rangle\}$  διότι οι όλες οι βασικές αλληλεπιδράσεις είναι τοπικές στον χώρο.

**III.12** Ένα σύστημα δύο καταστάσεων βρίσκεται σε κάποια καθαρή κατάσταση  $|\chi\rangle$ . Η αλληλεπίδρασή του με το περιβάλλον περιγράφεται από την απεικόνιση:

$$\Phi_{A \rightarrow AB} : |\chi_A\rangle \rightarrow \sqrt{1-p} |\chi_A\rangle |0_B\rangle + \sqrt{p/3} (\hat{\sigma}_A^x |\chi_A\rangle |1_B\rangle + \hat{\sigma}_A^y |\chi_A\rangle |2_B\rangle + \hat{\sigma}_A^z |\chi_A\rangle |3_B\rangle)$$

Να βρείτε την αλλαγή της κατάστασης με το χρόνο.

**Απάντηση.**

Η άσκηση αυτή είναι μια σχηματική περιγραφή του τι μπορεί να συμβεί σε ένα qubit  $|\chi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  όταν βρεθεί μέσα σε κάποιο περιβάλλον.

Προφανώς, η πλήρης μελέτη του προβλήματος απαιτεί γνώση του περιβάλλοντος και της αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτού και του qubit. Μπορούμε, όμως να προχωρήσουμε σκεπτόμενοι ότι μια φυσική διαδικασία η οποία απεικονίζει την αρχική κατάσταση  $\hat{\rho}(0) = |\chi\rangle\langle\chi|$  στην κατάσταση  $\hat{\rho}(t)$  θα πρέπει να εκφράζεται μέσω τελεστών Kraus:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{j=0}^3 \hat{M}_j(t) \hat{\rho}(0) \hat{M}_j^\dagger(t), \quad \sum_{j=0}^3 \hat{M}_j^\dagger(t) \hat{M}_j(t) = \hat{I} \quad (1)$$

Στην έκφραση αυτή λάβαμε υπόψη ότι ο χώρος Liouville του qubit έχει διάσταση 4. Στον χώρο αυτόν οι πίνακες Pauli μαζί με τον μοναδιαίο πίνακα αποτελούν βάση. Είναι λογικό να υποθέσει κανείς ότι η μονάδα  $\hat{M}_0(t) = \hat{I} \sqrt{p_0(t)}$  σχετίζεται με την πιθανότητα να παραμείνει, μετά από χρόνο  $t$ , το qubit ανέπαφο. Οι υπόλοιποι όροι παρουσιάζουν το

μίγμα καταστάσεων το οποίο έχει προκύψει λόγω της επαφής με το περιβάλλον και την συνακόλουθη decoherence. Έχοντας στο μυαλό ότι η αναπαράσταση (1) δεν είναι μοναδική, θα κάνουμε την πιο απλή δυνατή επιλογή:

$$\hat{M}_j(t) = \sqrt{p_j(t)} \hat{\sigma}^j \quad (2)$$

Η λειτουργία των τελεστών αυτών παρουσιάζει τα πιο απλά «λάθη» τα οποία μπορούν να προκληθούν από την παρουσία του περιβάλλοντος:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^x |\chi\rangle &= |\chi_1\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle \text{ (bit flip), } \hat{\sigma}^z |\chi\rangle = |\chi_3\rangle = a|0\rangle - b|1\rangle \text{ (phase flip),} \\ i\hat{\sigma}^y |\chi\rangle &= |\chi_2\rangle = b|0\rangle - a|1\rangle \text{ (both)} \end{aligned} \quad (3)$$

Η πάροδος του χρόνου θα οδηγήσει την αρχικά καθαρή κατάσταση σε ένα μίγμα «λανθασμένων». Μη έχοντας περισσότερες λεπτομέρειες, θα υποθέσουμε ότι τα λάθη (3) είναι εξίσου πιθανά:  $p_j = p/3$ ,  $j = x, y, z$ ;  $p_0 = 1 - p$  ( $p$  γράψαμε την πιθανότητα να συμβεί λάθος).

Επομένως η σχέση (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= (1-p)|\chi\rangle\langle\chi| + \frac{p}{3}(|\chi_1\rangle\langle\chi_1| + |\chi_2\rangle\langle\chi_2| + |\chi_3\rangle\langle\chi_3|) = \\ &= (1-p)\hat{\rho}(0) + \frac{p}{3}[\hat{\sigma}^x\hat{\rho}(0)\hat{\sigma}^x + \hat{\sigma}^y\hat{\rho}(0)\hat{\sigma}^y + \hat{\sigma}^z\hat{\rho}(0)\hat{\sigma}^z] = \\ &= (1-p)\begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} + \frac{p}{3}\begin{pmatrix} 1+|b|^2 & -ab^* \\ -a^*b & 1+|a|^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Εάν, επιπλέον υποθέσουμε ότι ισχύουν οι όροι για την προσέγγιση Born-Markov μπορούμε να κατασκευάσουμε την εξίσωση Lindblad για τη χρονική εξέλιξη της μήτρας πυκνότητας (4) υποθέτοντας ότι  $p \approx \Gamma \delta t$ . Αφετηρία μας θα είναι η σχέση

$$\hat{\rho}(t + \delta t) = \sum_{j=0}^3 \hat{M}_j(\delta t) \hat{\rho}(t) \hat{M}_j^\dagger(\delta t) \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας τους τελεστές Kraus

$$\hat{M}_0(\delta t) = \sqrt{1-p} \hat{I} \approx (1-\Gamma\delta t/2) \hat{I}, \quad \hat{M}_j(\delta t) \approx \sqrt{\Gamma\delta t/3} \hat{I} \quad (6)$$

βρίσκουμε:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \frac{\Gamma}{3} (\hat{\sigma}^x \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}^x + \hat{\sigma}^y \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}^y + \hat{\sigma}^z \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}^z) - \Gamma \hat{\rho}(t) \quad (7)$$

Εάν γράψουμε

$$\hat{\rho} \doteq \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{pmatrix} \quad (8)$$

η εξίσωση (7) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) \doteq \frac{\Gamma}{3} \begin{pmatrix} 2\rho_{00} + \rho_{11} & -\rho_{10} \\ -\rho_{01} & 2\rho_{11} + \rho_{00} \end{pmatrix} - \Gamma \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Οι προκύπτουσες διαφορικές εξισώσεις είναι εύκολο να λυθούν και οδηγούν στο αποτέλεσμα:

$$\hat{\rho}(t) \doteq \frac{1}{2} \hat{I} + e^{-\frac{4\Gamma}{3}t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2) & a^*b \\ ab^* & -\frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι καθώς περνάει ο χρόνος οι πληροφορίες που έφερε η αρχική μήτρα πυκνότητας απομειώνονται και στο όριο  $t \rightarrow \infty$  φαίνονται ως εάν να “χάνονται” πλήρως:

$$\hat{\rho}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \hat{I}_{2 \times 2} \quad (11)$$

Η απεικόνιση που μόλις περιγράψαμε αναφέρεται ως **depolarizing channel**.

Το ερώτημα το οποίο άμεσα πηγάζει από την προηγούμενη ανάλυση είναι το εξής: Το συνολικό σύστημα στο οποίο αναφέρεται αυτή η άσκηση (το οποίο έχει διάσταση  $\dim H_A \cdot \dim H_B = 2D_B$ ) θεωρείται απομονωμένο. Με την απεικόνιση  $\Phi_{A \rightarrow AB}$  η αρχική (καθαρή) κατάσταση απεικονίζεται, τελικά, στη μη καθαρή κατάσταση (11) ενός διδιάστατου υποχώρου του σύνθετου συστήματος. Μάλιστα, στην ίδια κατάσταση θα καταλήξει το αρχικό σύστημα όποια και εάν ήταν η αφετηρία του.

Το ερώτημα επομένως, είναι: Αφού το συνολικό σύστημα AB είναι απομονωμένο και η συνολική πιθανότητα διατηρείται, πού βρίσκεται η αρχική πληροφορία;

Υπάρχει ένα σημαντικό θεώρημα, το “no hiding theorem”, το οποίο μας βεβαιώνει ότι η αρχική πληροφορία έχει αποθηκευτεί στον υπόλοιπο χώρο διάστασης  $D_B$ . Θα το δούμε στην επόμενη άσκηση.

### III.13 No-hiding theorem [18].

Έστω σύστημα I (input) το οποίο ορίζεται σε κάποιον χώρο Hilbert  $H_I$  και βρίσκεται στην κατάσταση  $\hat{\rho}_I$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια φυσική διαδικασία η οποία την μεταφέρει σε έναν μεγαλύτερο χώρο. Εάν αυτός έχει κάποιον υπόχωρο  $H_O$  (output) η

κατάσταση του οποίου,  $\hat{\rho}_O$ , είναι ανεξάρτητη της αρχικής κατάστασης, η εν λόγω διαδικασία λέγεται **απόκρυψη (hiding)**.

Το **no-hiding** θεώρημα αποδεικνύει ότι η **πλήρης απόκρυψη είναι αδύνατη**: Η διαδικασία απόκρυψης μεταφέρει αναγκαστικά την αρχική κατάσταση στο υπόλοιπο τμήμα του (μεγαλύτερου) χώρου Hilbert.

### Απόδειξη.

Έστω ότι

Μια πιθανή υλοποίηση της διαδικασίας απόκρυψης εκκινεί με την επαφή του συστήματος I με ένα δεύτερο σύστημα I' το οποίο βρίσκεται στην κατάσταση  $\hat{\rho}_{I'}$ . Έτσι, η αρχική κατάσταση είναι:

$$\hat{\rho}_{II'}(0) = \hat{\rho}_I(0) \otimes \hat{\rho}_{I'}(0) \quad (1)$$

Τη στιγμή  $t = 0$  επιτρέπουμε τα δύο συστήματα να αλληλεπιδράσουν και αφήνουμε την κατάσταση (1), την οποία θεωρούμε **απομονωμένη**, να εξελιχθεί στο χρόνο μέσω ενός **μοναδιακού** τελεστή. Για την ώρα θα θεωρήσουμε ότι η κατάσταση (1) είναι καθαρή.

Μετά από χρόνο  $t$  το σύνθετο σύστημα θα καταλήξει σε μια κατάσταση

$$\hat{\rho}_{II'}(t) = |\psi_{II'}(t)\rangle\langle\psi_{II'}(t)| = \hat{U}_{II'}(t) \hat{\rho}_{II'}(0) \hat{U}_{II'}^\dagger(t) \quad (2)$$

στην οποία (λόγω της αλληλεπίδρασης) υπάρχει εναγκαλισμός.

Η περιγραφή του συστήματος I γίνεται τώρα μέσω της ανηγμένης μήτρας πυκνότητας

$$\hat{\rho}_I^R(t) = \text{Tr}_{I'}(\hat{\rho}_{II'}(t)) = \sum \hat{M}(t) \otimes \hat{\rho}_I(0) \otimes \hat{M}^\dagger(t) \quad (3)$$

Η διαδικασία αυτή θα είναι μια διαδικασία απόκρυψης εάν η αλληλεπίδραση είναι τέτοια ώστε:

$$\hat{\rho}_I^R(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \hat{\rho}_O \quad \forall \hat{\rho}_I(0) \quad (4)$$

Ένα απλό παράδειγμα μιας τέτοιας διαδικασίας είναι αυτό το οποίο παρουσιάσαμε στην τελευταία Άσκηση III.12. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το όριο  $t \rightarrow \infty$  δεν είναι, κατ'ανάγκη, απαραίτητο. Μπορεί να είναι κάποια δεδομένη στιγμή για την οποία η απόκρυψη πραγματοποιείται. Όπως και να έχει, μπορούμε πάντα να γράψουμε την προκύπτουσα κατάσταση στη βάση Schmidt (βλ. Άσκηση II.10):

$$|\psi_{II'}(\infty)\rangle \equiv |\psi_{OA}\rangle = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} |\alpha_{k,O}\rangle \otimes |u_{k,A}(\psi_I)\rangle \quad (5)$$

Οι θετικοί αριθμοί  $p_k$  είναι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές της (4) το πλήθος των οποίων είναι  $K$ . Τα ανύσματα  $|\alpha_{k,0}\rangle$  είναι ιδιοανύσματα της (4) και καλύπτουν έναν χώρο  $H_0$  διάστασης  $\dim H_0 \leq \dim H_I = D_I$ . Τα  $|u_{k,A}(\psi_I)\rangle$  είναι ιδιοανύσματα της  $\text{Tr}_I |\psi_{0A}\rangle\langle\psi_{0A}|$ , ανήκουν στον βοηθητικό χώρο  $A$  διάστασης  $\dim H_A \geq \dim H_I$  και αποτελούν στοιχεία μιας βάσης σ' αυτόν (χωρίς, κατ' ανάγκη, να τον καλύπτουν πλήρως). Ο συμβολισμός  $|u_{k,A}(\psi_I)\rangle$  υποδηλώνει ότι τα ανύσματα αυτά πρέπει να εξαρτώνται από την αρχική κατάσταση διότι οι πληροφορίες που την αφορούν δεν μπορούν να εξαλειφθούν πλήρως λόγω του no-deleting theorem (δες Άσκηση I.16).

Αν αλλάξει η εισαγωγική κατάσταση  $|\psi_I\rangle \rightarrow |\varphi_I\rangle$  θα αλλάξει και η βάση στον βοηθητικό χώρο:

$$|u_{k,A}(\psi_I)\rangle \rightarrow |u_{k,A}(\varphi_I)\rangle \quad (6)$$

Οποιοδήποτε στοιχείο του χώρου  $H_I$  μπορεί να γραφεί ως (βλ. Άσκηση I.2):

$$|\varphi_I\rangle = a|\psi_I\rangle + b|\psi_I^\perp\rangle \quad (7)$$

Επειδή η απεικόνιση  $|\psi_I\rangle \rightarrow |\psi_{0A}\rangle$  είναι γραμμική προκύπτει ότι:

$$|u_{k,A}(\varphi_I)\rangle = a|u_{k,A}(\psi_I)\rangle + b|u_{k,A}(\psi_I^\perp)\rangle \quad (8)$$

Θεωρώντας ότι όλες οι καταστάσεις είναι κανονικοποιημένες μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι

$$ab^* \langle u_{k,A}(\psi_I^\perp) | u_{k,A}(\psi_I) \rangle + a^* b \langle u_{k,A}(\psi_I) | u_{k,A}(\psi_I^\perp) \rangle = 0 \quad (9)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε ζεύγος  $(a, b)$  αφού ισχύει για κάθε στοιχείο του χώρου  $H_I$ .

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\langle u_{k,A}(\psi_I^\perp) | u_{k,A}(\psi_I) \rangle = \langle u_{k,A}(\psi_I) | u_{k,A}(\psi_I^\perp) \rangle = 0 \quad (10)$$

Το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι **επαλληλία ορθοκανονικών εισαγωγικών καταστάσεων απεικονίζεται σε επαλληλία ορθοκανονικών καταστάσεων** στον βοηθητικό χώρο  $H_A$ . Αν βασιστούμε στο συμπέρασμα αυτό, χρησιμοποιήσουμε κάποια βάση  $\{|e_{j,I}\rangle, j=1,2,\dots,D_I\}$  του χώρου  $H_I$  και γράψουμε  $|\psi_I\rangle = \sum_{j=1}^{D_I} c_j |e_{j,I}\rangle$  θα καταλήξουμε ότι:



$$|\psi_{OA}\rangle = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} |\alpha_{k,O}\rangle \otimes \sum_{j=1}^{D_1} c_j |u_{k,A}(e_{j,I})\rangle \quad (11)$$

Τα  $KD_1$  ορθοκανονικά ανύσματα  $\{|u_{k,A}(e_{j,I})\rangle; k=1, \dots, K; j=1, 2, \dots, D_1\}$  καλύπτουν πλήρως τον βοηθητικό χώρο A (εάν θεωρήσουμε ότι έχει διάσταση  $KD_1$ ). Όλες οι βάσεις στο χώρο αυτό συνδέονται με μοναδιακούς μετασχηματισμούς και, επομένως, η επιλογή της μιας ή της άλλης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα  $\hat{\rho}_O = \text{Tr}_A |\psi_{OA}\rangle \langle \psi_{OA}|$ . Έτσι, μπορούμε να διαλέξουμε τα στοιχεία της βάσης ως:

$$|u_{k,A}(e_{j,I})\rangle = |q_{k,A}\rangle \otimes |e_{j,A}\rangle \quad (12)$$

Αν η διάσταση του βοηθητικού χώρου είναι μεγαλύτερη από  $KD_1$  μπορούμε να συμπληρώσουμε τα στοιχεία (13) με μηδενικά:

$$|u_{k,A}(e_{j,I})\rangle = |q_{k,A}\rangle \otimes |e_{j,A}\rangle \oplus 0_A \quad (13)$$

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα:

$$|\psi_{OA}\rangle = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} |\alpha_{k,O}\rangle \otimes (|q_{k,A}\rangle \otimes |\psi_A\rangle \oplus 0_A) \quad (14)$$

Σ' αυτά που προηγήθηκαν, θεωρήσαμε ότι η αρχική κατάσταση του σύνθετου συστήματος είναι καθαρή:  $|\psi_{II'}\rangle = |\psi_I\rangle |\psi_{I'}\rangle$ .

Αν η αρχική κατάσταση του συστήματος I δεν είναι καθαρή πάντα μπορούμε να τη γράψουμε ως μια επαλληλία της μορφής

$$\hat{\rho}_I = \sum_j \lambda_j |\psi_{I,j}\rangle \langle \psi_{I,j}|, \quad \lambda_j > 0 \quad \forall j, \quad \sum_j \lambda_j = 1$$

Σε μια τέτοια περίπτωση μπορούμε να επαναλάβουμε όλη την προηγούμενη ανάλυση για κάθε όρο της επαλληλίας ξεχωριστά.

Τέλος, θα θεωρήσουμε ότι ο χώρος στον οποίο ορίζεται η κατάσταση  $I'$  είναι επαρκώς μεγάλος ώστε η  $\hat{\rho}_{I'}(0)$  να είναι καθαρή κατάσταση. Αυτό πάντα μπορεί να επιτευχθεί αφού οποιαδήποτε μη καθαρή κατάσταση μπορεί να προκύψει από μια μεγαλύτερη καθαρή κατάσταση στην οποία υπάρχει εναγκαλισμός μέσω του κατάλληλου μερικού ίχνους.

### Άσκηση III.14

Η άσκηση είναι μια αναδιατύπωση της Άσκησης (III.12) ώστε να ελεγχθεί το no-hiding θεώρημα.

Έστω το κβαντικό κανάλι:

$$\Phi_{A \rightarrow ABC} : |\chi_A\rangle \rightarrow \frac{1}{2}|\chi_A\rangle|0_B0_C\rangle + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_A^x|\chi_A\rangle|0_B1_C\rangle + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_A^y|\chi_A\rangle|1_B0_C\rangle + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_A^z|\chi_A\rangle|1_B1_C\rangle \quad (1)$$

Να βρείτε την κατάσταση του συστήματος A (μετά την εφαρμογή του καναλιού) και να ελέγξετε την ισχύ του no-hiding theorem.

#### Απάντηση.

Η διαφορά της απεικόνισης (1) από την αντίστοιχη της άσκησης (III.12) έγκειται στο ότι το βοηθητικό σύστημα είναι, τώρα, διμερές και στο ότι όλες οι πιθανότητες (λάθους ή μη λάθους) είναι ίσες μεταξύ τους.

Για λόγους ευκολίας θα γράψουμε την τελική κατάσταση (1) ως:

$$|\Phi_{ABC}\rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 \hat{\sigma}_A^k |\chi_A\rangle |\varphi_{k,BC}\rangle \quad (2)$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$\hat{\rho}_A^R = \text{Tr}_{BC} |\Phi_{ABC}\rangle \langle \Phi_{ABC}| = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \hat{\sigma}_A^k |\chi_A\rangle \langle \chi_A| \hat{\sigma}_A^k = \frac{1}{2} \hat{I}_{2 \times 2} \quad (3)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι η κατάσταση η οποία στο θεώρημα αναφέρεται ως “output”. Προφανώς είναι ανεξάρτητη της “input” κατάστασης  $|\chi_A\rangle$ . Το διμερές σύστημα (BC) είναι το βοηθητικό (ancilla) σύστημα. Για να ελέγξουμε την κατάσταση στην οποία βρίσκεται θα επεξεργαστούμε την (1). Καθένας από τους όρους της γράφεται:

$$\begin{aligned} |\chi_A\rangle|0_B0_C\rangle &= a|0_A0_B0_C\rangle + b|1_A0_B0_C\rangle, & \hat{\sigma}_A^x|\chi_A\rangle|0_B1_C\rangle &= a|1_A0_B1_C\rangle + b|0_A0_B1_C\rangle \\ i\hat{\sigma}_A^y|\chi_A\rangle|1_B0_C\rangle &= a|1_A1_B0_C\rangle - b|0_A1_B0_C\rangle, & \hat{\sigma}_A^z|\chi_A\rangle|0_B1_C\rangle &= a|0_A1_B1_C\rangle - b|1_A1_B1_C\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

Συνδυάζοντας τις (2) και (4) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} |\Phi_{ABC}\rangle &= \frac{1}{2}|0_A\rangle \{a(|0_B0_C\rangle + |1_B1_C\rangle) + b(|0_B1_C\rangle - i|1_B0_C\rangle)\} + \\ &+ \frac{1}{2}|1_A\rangle \{a(|0_B1_C\rangle + i|1_B0_C\rangle) + b(|0_B0_C\rangle - |1_B1_C\rangle)\} \end{aligned} \quad (5)$$

Στον σύνθετο χώρο (BC) ορίζουμε τη βάση  $\{|\tilde{0}_B\tilde{0}_C\rangle, |\tilde{0}_B\tilde{1}_C\rangle, |\tilde{1}_B\tilde{0}_C\rangle, |\tilde{1}_B\tilde{1}_C\rangle\}$  η οποία συνδέεται με την αρχική  $\{|0_B0_C\rangle, |0_B1_C\rangle, |1_B0_C\rangle, |1_B1_C\rangle\}$  μέσω του μοναδιακού μετασχηματισμού:

$$\hat{V}_{BC} \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Μέσω του μετασχηματισμού αυτού βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} |\tilde{0}_B\tilde{0}_C\rangle &= (|0_B0_C\rangle + |1_B1_C\rangle)/\sqrt{2}, & |\tilde{0}_B\tilde{1}_C\rangle &= (|0_B1_C\rangle - i|1_B0_C\rangle)/\sqrt{2} \\ |\tilde{1}_B\tilde{0}_C\rangle &= (|0_B1_C\rangle + i|1_B0_C\rangle)/\sqrt{2}, & |\tilde{1}_B\tilde{1}_C\rangle &= (|0_B0_C\rangle - |1_B1_C\rangle)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας την (7) στην (5) καταλήγουμε στην:

$$\begin{aligned} |\Phi_{ABC}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |0_A\rangle |\tilde{0}_B\rangle (a|\tilde{0}_C\rangle + b|\tilde{1}_C\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} |1_A\rangle |\tilde{1}_B\rangle (a|\tilde{0}_C\rangle + b|\tilde{1}_C\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle |\tilde{0}_B\rangle + |1_A\rangle |\tilde{1}_B\rangle) |\psi_C\rangle \end{aligned} \quad (8)$$

Το αποτέλεσμα αυτό πιστοποιεί το no-hiding theorem.

## IV. ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

Η έννοια της πληροφορίας αναφέρεται στις γνώσεις οι οποίες είναι αναγκαίες για την ανακατασκευή της άγνωστης κατάστασης ενός φυσικού συστήματος. Οι γνώσεις αυτές και οι πληροφορίες που μεταφέρουν, είναι αναπόδραστα συνδεδεμένες με μετρήσεις. Οι διακυμάνσεις των αποτελεσμάτων αυτών των μετρήσεων και η αβεβαιότητα που τα συνοδεύει, συνδέουν στενά την πληροφορία με την έννοια της πιθανότητας και με τη γνώση την οποία μεταφέρει η πραγματοποίηση καθενός από τα δυνατά ενδεχόμενα μιας μέτρησης.

Αντίθετα, ίσως, με τη διαίσθησή μας η πληροφορία δεν είναι μια αφηρημένη έννοια. Αναπόδραστα εντυπώνεται σε κάποιο φυσικό μέσο και κωδικοποιείται χρησιμοποιώντας τους βαθμούς ελευθερίας πραγματικών συστημάτων. Είτε αναφερόμαστε στην κλασική μονάδα πληροφορίας, το **bit** (0 ή 1), είτε στην κβαντική μονάδα πληροφορίας, το **qubit**  $a|0\rangle + b|1\rangle$ , αναφερόμαστε σε καταστάσεις πραγματικών φυσικών συστημάτων.

Επομένως, η πληροφορία, η αποθήκευση και η διαχείρισή της υπόκειται στους περιορισμούς και τις δυνατότητες των φυσικών συστημάτων και, με την έννοια αυτή, είναι φυσική ποσότητα.

Η θεωρία της κβαντικής πληροφορίας συνδέεται με το είδος και τις ιδιότητες των πληροφοριών οι οποίες μπορούν να αντληθούν από μια κβαντική κατάσταση η οποία αντιπροσωπεύεται από κάποια μήτρα πυκνότητας (καθαρής ή μη καθαρής). Αφορά στη διαχείριση των πληροφοριών αυτών δηλαδή, στην ποσοτικοποίηση, την αποθήκευση, την επεξεργασία και τη μετάδοσή τους. Στις σημειώσεις αυτές δεν πρόκειται να καλυφθεί το σύνολο ούτε καν ένα μεγάλο μέρος του θέματος. Θα περιοριστούμε σε κάποια βασικά σημεία τα οποία θα μπορούσαν να χρησιμεύσουν ως οδοδείκτες σε μια συστηματικότερη μελέτη.

Ο χαρακτηρισμός της πληροφορίας που μας ενδιαφέρει ως κβαντικής έχει να κάνει με τις πολύ σημαντικές διαφορές που έχει με την αντίστοιχη κλασική. Η πηγή αυτών των διαφορών είναι ο θεμελιακά διαφορετικός ρόλος της πιθανότητας στην κλασική και την κβαντική φυσική. Στην πρώτη, η πιθανότητα σχετίζεται με τη διαχείριση πολύπλοκων και πολυπαραμετρικών συστημάτων η πλήρης και ακριβής περιγραφή των οποίων είναι εξαιρετικά δύσκολη (ή και αδύνατη). Με την έννοια αυτή, αφορά στη διαχείριση της άγνοιας ή της αδυναμίας χειρισμού όλων των παραμέτρων που αναφέρονται σε κάποια φυσική διαδικασία.

Αντίθετα, στην κβαντική φυσική η πιθανότητα είναι θεμελιακή έννοια: Όλες οι μετρήσεις είναι πειράματα τύχης, όλα τα αποτελέσματα είναι τυχαία γεγονότα και όλες οι ιδιότητες ενός συστήματος υπάρχουν στο βαθμό που μπορούν να μετρηθούν.

Παρά, όμως, τις διαφορές υπάρχουν και σημαντικές ομοιότητες ανάμεσα στην κλασική και την κβαντική πληροφορία στο βαθμό που, και οι δύο, αναφέρονται σε τυχαία γεγονότα και στη διαχείριση των αβεβαιοτήτων που συνδέονται με τις πιθανότητες πραγματοποίησής τους.

Χρειάζεται, επομένως, μια μικρή παρένθεση για να θυμηθούμε κάποια βασικά στοιχεία της κλασικής θεωρίας της πληροφορίας η οποία θεμελιώθηκε από τον Claude Shannon.

## (1) Κλασική Θεωρία Shannon.

### (1α) Εντροπία Shannon

Η κλασική θεωρία πιθανοτήτων βασίζεται σε **τυχαίες (ή στοχαστικές) μεταβλητές**, σε μεταβλητές, δηλαδή, οι τιμές των οποίων είναι τα δυνατά αποτελέσματα κάποιου πειράματος τύχης. Στις σημειώσεις αυτές θα αναφερθούμε σε **διακριτές** τυχαίες μεταβλητές:

$$X = \{x_i, p_i \mid i = 1, \dots, N\} \quad (\text{IV.1})$$

Οι πραγματικοί αριθμοί  $x_i, i = 1, \dots, N$  λέγονται **ενδεχόμενα** και αντιπροσωπεύουν τα πιθανά αποτελέσματα του πειράματος τύχης. Συνδέονται με τις τιμές που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή η οποία, με την έννοια αυτή, είναι η συλλογή των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.

Η πραγματοποίηση καθενός από τα ενδεχόμενα της συλλογής  $X$  είναι ένα **τυχαίο γεγονός**. Τα γεγονότα αυτά θεωρούνται (στατιστικώς) **ανεξάρτητα** μεταξύ τους.

Οι μη αρνητικοί αριθμοί  $p_i, i = 1, \dots, N$  είναι οι πιθανότητες με τις οποίες καθένα από τα ενδεχόμενα πραγματοποιείται και θα πρέπει να αθροίζονται στη μονάδα:  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ .

Το σύνολό τους ορίζει μια **κατανομή πιθανότητας**.

Θα χαρακτηρίζουμε τη συλλογή (IV.1) ως κλασική με την έννοια ότι τα διαφορετικά ενδεχόμενα είναι **διακρισίμα** και έτσι, **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

Η κλασική θεωρία πιθανοτήτων είναι η βάση της θεωρίας του Shannon η οποία συγκροτεί τη λεγόμενη **κλασική θεωρία της πληροφορίας**. Αυτή αφορά στη διαχείριση (αποθήκευση και μετάδοση) πληροφοριών οι οποίες αναφέρονται σε ενδεχόμενα η πραγματοποίηση των οποίων είναι αβέβαια.

Το πρώτο βήμα προς τη θεωρία του Shannon είναι η ποσοτικοποίηση της πληροφορίας που μεταφέρει η πραγματοποίηση κάποιου από τα ενδεχόμενα (IV.1). Έτσι, εισάγουμε μια συνάρτηση  $h(p_i)$  η οποία σχετίζεται με την πιθανότητα πραγματοποίησης κάθε ενός από αυτά και ορίζει το **πληροφοριακό φορτίο** το οποίο μεταφέρει το αποτέλεσμα  $x_i$ . Οι απαιτήσεις που θέτουμε για τη συνάρτηση αυτή είναι οι εξής:

(α) Το πληροφοριακό φορτίο πρέπει να είναι θετικό ή μηδέν. Επομένως απαιτούμε:

$$h(p_i) \geq 0 \quad \forall p_i, \quad i = 1, \dots, N$$

(β) Εάν η τυχαία μεταβλητή μπορεί, με βεβαιότητα, να πάρει μόνο μία τιμή η αντίστοιχη πιθανότητα είναι  $p = 1$  και θεωρούμε ότι η πληροφορία που παίρνουμε από την πραγματοποίησή της είναι μηδενική. Έτσι θέλουμε να ισχύει ότι:

$$h(1) = 0$$

(γ) Όσο πιο απίθανο είναι να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο τόσο μεγαλύτερη πρέπει να είναι η πληροφορία η οποία μεταφέρεται. Επομένως, απαιτούμε όταν μικραίνει η πιθανότητα να αυξάνει το πληροφοριακό φορτίο:

$$p_i \downarrow \leftrightarrow h(p_i) \uparrow$$

(δ) Εφόσον τα τυχαία ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους θα πρέπει η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο  $x_i x_j$  (σε δύο επαναλήψεις του πειράματος) να είναι  $p_i p_j$ . Έτσι, για το αντίστοιχο πληροφοριακό φορτίο απαιτούμε να ισχύει ότι:

$$h(p_i p_j) = h(p_i) + h(p_j)$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω απαιτήσεις:

$$h(p_i) = -C_a \log_a p_i, \quad C_a > 0 \quad (\text{IV.2})$$

Στην άσκηση (IV.1) αποδεικνύουμε ότι αυτή είναι η **μόνη** συνάρτηση η οποία ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις (α)-(δ). Αυτό ισχύει ανεξάρτητα της (θετικής) πολλαπλασιαστικής σταθεράς ή, καλύτερα, της βάσης στην οποία υπολογίζεται ο λογάριθμος. Αν θυμηθούμε τη σχέση  $\log_a(p) = \log_b(p) \log_a(b)$  μπορούμε να δούμε πώς αλλάζει ο συντελεστής στην (IV.2) εάν αλλάξουμε τη βάση του λογαρίθμου. Ο Shannon (για λόγους που θα καταλάβουμε) διάλεξε τη βάση του 2 και όρισε  $C_2 = 1$ :

$$h(p_i) = -\log_2 p_i \quad (\text{IV.3})$$

Ο Shannon όρισε, επίσης, και το **μέσο πληροφοριακό φορτίο**:

$$\langle h(p_i) \rangle = \sum_{i=1}^N p_i h(p_i) = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \quad (\text{IV.4})$$

Η τελευταία έκφραση ορίζει μια ποσότητα η οποία είναι απολύτως σημαντική για την ποσοτικοποίηση, την κατανόηση και, εν τέλει, τη διαχείριση της πληροφορίας η οποία μπορεί να αντληθεί από μια τυχαία μεταβλητή και ονομάζεται **εντροπία Shannon**:

$$H(X) \equiv -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \quad (\text{IV.5})$$

Θεωρώντας δεδομένη τη σημασία της εντροπίας, είναι καλό να εξετάσουμε κάποιες από τις ιδιότητές της. Η πρώτη είναι (δες Άσκηση IV.2) ότι γίνεται μέγιστη όταν

$$p_i = p \quad \forall i = 1, \dots, N \rightarrow p_i = \frac{1}{N} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{IV.6})$$

Επομένως:

$$0 \leq H(X) \leq \log_2 N \quad (\text{IV.7})$$

Για να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα αυτό θα χρειασθεί να ξεκαθαρίσουμε την ορολογία: Αν η τυχαία μεταβλητή περιέχει μόνο ένα ενδεχόμενο θα λέμε ότι είναι **απολύτως τακτοποιημένη** και, επομένως, ότι είναι απολύτως βέβαιη έκβαση του πειράματος τύχης τα αποτελέσματα του οποίου περιγράφονται από την εν λόγω μεταβλητή.

Στο άλλο άκρο, εάν όλα τα ενδεχόμενα είναι εξίσου πιθανά, θα λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή είναι **απολύτως άτακτη** με την έννοια ότι είμαστε απολύτως αβέβαιοι για την έκβαση του πειράματος αφού όλα τα δυνατά αποτελέσματα έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης.

Με βάση την ορολογία αυτή, αλλά και το αποτέλεσμα (IV.7), θα λέμε ότι η εντροπία Shannon **είναι μέτρο της αταξίας** που επικρατεί στη συλλογή των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης: Όσο μεγαλώνει η αβεβαιότητά μας για κάποιο αποτέλεσμα τόσο μεγαλύτερη είναι η εντροπία. Όσο αυξάνει η αταξία που επικρατεί στη συλλογή των αποτελεσμάτων τόσο αυξάνει το μέσο πληροφοριακό φορτίο το οποίο μεταφέρει καθένα από αυτά.

Η εντροπία Shannon έχει το ίδιο εννοιολογικό περιεχόμενο με την εντροπία Gibbs της στατιστικής φυσικής:

$$S \equiv -k_B \sum_{i=1}^{\Omega} p_i \ln p_i \quad (\text{IV.8})$$

Η μόνη διαφορά ανάμεσά τους είναι ότι η πρώτη είναι αδιάστατη ενώ η δεύτερη είναι ανάλογη της σταθεράς Boltzmann και επομένως έχει διαστάσεις:

$$[S] = [k_B] = [\text{Ενέργεια}] / [\text{Θερμοκρασία}]$$

Συνήθως η εντροπία Gibbs ορίζεται μέσω του νεπέριου λογαρίθμου αλλά αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία αφού  $\ln(p) = \log_2(p) \ln 2$ . Στην εντροπία Gibbs,  $p_i$  είναι η πιθανότητα να βρεθεί το φυσικό σύστημα στη μικροκατάσταση  $i$ . Έτσι, η τυχαία μεταβλητή στην οποία αναφέρεται η εντροπία Gibbs είναι η συλλογή των δυνατών μικροκαταστάσεων ενός συστήματος (οι οποίες στον ορισμό (IV.8) θεωρούνται διακρίσιμες). Το άνω όριο στην (IV.8) είναι το πλήθος των μικροκαταστάσεων. Η

εντροπία Gibbs γίνεται μέγιστη στην κατάσταση θερμικής ισορροπίας όπου όλες οι μικροκαταστάσεις είναι εξίσου πιθανές:

$$S = -k_B \ln \Omega \quad (\text{IV.9})$$

Η τελευταία έκφραση είναι η γνωστή εντροπία Boltzmann.

### (1β) Ποσοτικοποίηση πληροφορίας-Συμπύεση δεδομένων.

Προκειμένου να αποκτήσουμε μια αίσθηση του τι σημαίνει ο τίτλος αυτού του εδαφίου είναι καλό να δούμε πρώτα ένα απλοϊκό παράδειγμα.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο πείραμα τύχης μπορούν να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  με αντίστοιχες πιθανότητες 50%, 12,5%, 25% και 12,5%. Με άλλα λόγια, ότι έχουμε την τυχαία μεταβλητή

$$X = \left\{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right\} \quad (\text{IV.10})$$

Έστω τώρα ότι εκτελούμε το πείραμα (9 φορές) και παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$\alpha \alpha \beta \gamma \delta \alpha \gamma \gamma \alpha \quad (\text{IV.11})$$

το οποίο θέλουμε να αποθηκεύσουμε ή να μεταδώσουμε.

Τα αποτελέσματα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  δεν είναι, όμως, άμεσα αποθηκεύσιμα. Θα πρέπει, πρώτα, να αντιστοιχηθούν, μέσω κάποιας κωδικοποίησης, σε αριθμούς τους οποίους να μπορεί να διαβάσει κάποια μηχανή. Αυτό μπορεί να γίνει (και συνήθως έτσι γίνεται) στο δυαδικό σύστημα σε **bits** (0,1).

Ας πούμε, λοιπόν, ότι διαλέγουμε την κωδικοποίηση:

$$\alpha \rightarrow 00, \beta \rightarrow 01, \gamma \rightarrow 10, \delta \rightarrow 11 \quad (\text{IV.12})$$

Στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα το οποίο πρέπει να αποθηκευτεί ή το μήνυμα το οποίο πρέπει να μεταδοθεί είναι ο 18-ψήφιος αριθμός

$$00 \ 00 \ 01 \ 10 \ 11 \ 00 \ 10 \ 10 \ 00 \quad (\text{IV.13})$$

Επειδή η κωδικοποίηση (IV.12) μοιάζει (και είναι) αυθαίρετη το ερώτημα που μπορεί να θέσει κάποιος είναι εάν υπάρχει μια άλλη, πιο «έξυπνη», κωδικοποίηση μέσω της οποίας να μεταδίδεται το ίδιο μήνυμα αλλά με λιγότερα ψηφία.



Για να σκεφθούμε το πρόβλημα μπορούμε να υπολογίσουμε το πληροφοριακό φορτίο που μεταφέρει το μήνυμα (IV.11). Για να το βρούμε θα υπολογίσουμε την εντροπία της τυχαίας μεταβλητής (IV.10):

$$H(X) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} \approx \frac{7}{4} \quad (\text{IV.14})$$

Όπως είπαμε, το νούμερο αυτό εκφράζει το μέσο πληροφοριακό φορτίο που μεταφέρει η πραγματοποίηση καθενός από τα ενδεχόμενα της τυχαίας μεταβλητής. Επομένως, το 9-ψήφιο μήνυμα (IV.11) μεταφέρει πληροφοριακό φορτίο  $\approx 9 \times 7/4 \approx 16$ .

Η κωδικοποίηση (IV.12) έχει αλλάξει την αρχική τυχαία μεταβλητή και μας έχει μεταφέρει σε μια τυχαία μεταβλητή η οποία έχει μόνο δύο ενδεχόμενα 0,1 :

$$X' = \{0,1 | p, 1-p\} \quad (\text{IV.15})$$

Για να βρούμε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα ενδεχόμενα μπορούμε να σκεφθούμε ως εξής: Εάν επαναλάβουμε  $N$  φορές ( $N \rightarrow \infty$ ) το πείραμα  $X$  θα

πάρουμε (περίπου)  $N/2$  φορές το  $\alpha$ ,  $N/8$  φορές το  $\beta$ ,  $N/4$  το  $\gamma$  και  $N/8$  φορές το  $\delta$ . Μέσω της κωδικοποίησης (IV.12) θα εμφανισθεί  $N/2$  φορές το 00,  $N/8$  φορές το 01,  $N/4$  το 10 και  $N/8$  φορές το 11. Άρα, το 0 θα εμφανισθεί

$$\frac{N}{2} \times 2 + \frac{N}{8} \times 1 + \frac{N}{4} \times 1 = \frac{11N}{8} \text{ φορές και το 1 θα εμφανισθεί } \frac{N}{8} \times 1 + \frac{N}{4} \times 1 + \frac{N}{8} \times 2 = \frac{5N}{8}$$

φορές. Έτσι, η συχνότητα εμφάνισης του 0 είναι  $\frac{11N/8}{11N/8 + 5N/8} = \frac{11}{16}$  και η συχνότητα

$$\text{εμφάνισης του 1 είναι } \frac{5N/8}{11N/8 + 5N/8} = \frac{5}{16}.$$

Επομένως η τυχαία μεταβλητή η οποία δημιουργήθηκε μέσω της κωδικοποίησης (IV.12) είναι

$$X' = \left\{ 0,1 \left| \frac{11}{16}, \frac{5}{16} \right. \right\} \quad (\text{IV.16})$$

Η εντροπία αυτής της τυχαίας μεταβλητής (το μέσο πληροφοριακό φορτίο κάθε ενός από τα δύο ενδεχόμενα) είναι:

$$H(X') = -\frac{11}{16} \log_2 \frac{11}{16} - \frac{5}{16} \log_2 \frac{5}{16} \approx 0.92 \quad (\text{IV.17})$$

Με το αποτέλεσμα αυτό ξέρουμε ότι για να μεταφερθεί το πληροφοριακό φορτίο 16 που περιέχει το αρχικό μήνυμα (IV.11) θα χρειαστούμε  $16/0.92 \approx 18$  ψηφία όπως ακριβώς διαπιστώσαμε από την μεταγραφή του αρχικού μηνύματος μέσω της κωδικοποίησης (IV.12).

Η συζήτηση αυτή μας οδηγεί σε ένα σημαντικό συμπέρασμα: Η καλύτερη δυνατή κωδικοποίηση δεν μπορεί να έχει λιγότερα από 16 ψηφία και θα παραχθεί από μια τυχαία μεταβλητή  $X''$  η οποία θα έχει τη μέγιστη δυνατή εντροπία  $H(X'')=1$ :

$$X'' = \left\{ 0,1 \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \quad (\text{IV.18})$$

Μια τέτοια κωδικοποίηση είναι όντως δυνατή:

$$\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 110, \gamma \rightarrow 10, \delta \rightarrow 111 \quad (\text{IV.19})$$

Με τον κανόνα αυτόν, το μήνυμα (IV.11) θα μεταφερθεί με τον 16-ψήφιο αριθμό:

$$0\ 0\ 110\ 10\ 111\ 0\ 10\ 10\ 0 \quad (\text{IV.20})$$

Μπορούμε να καταλάβουμε το αποτέλεσμα αυτό εάν δούμε την τυχαία μεταβλητή  $\{0,1 \mid q, 1-q\}$  που δημιουργήσαμε μέσω της κωδικοποίησης (IV.19). Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα  $q$  θα σκεφθούμε όπως και πριν: Σε  $N$  επαναλήψεις του πειράματος τύχης, το  $\alpha (\rightarrow 0)$  θα εμφανισθεί (περίπου)  $N/2$  φορές, το  $\beta (\rightarrow 110)$  θα εμφανισθεί  $N/8$  φορές, το  $\gamma (\rightarrow 10)$   $N/4$  φορές και το  $\delta (\rightarrow 111)$   $N/8$  φορές. Επομένως το 0 θα εμφανισθεί  $N/2 \times 1 + N/8 \times 1 + N/4 \times 1 = 7N/8$  φορές και το 1 θα εμφανισθεί επίσης  $N/8 \times 2 + N/4 \times 1 + N/8 \times 3 = 7N/8$  φορές. Αυτό σημαίνει ότι η συχνότητα εμφάνισης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα είναι ίση και άρα  $q = 1/2$ .

Επομένως, μέσω της κωδικοποίησης (IV.19) κατασκευάσαμε την τυχαία μεταβλητή  $X''$  η εντροπία της οποίας είναι  $H(X'')=1$  και έτσι για να μεταδώσουμε την πληροφορία (IV.11) χρειαζόμαστε τον  $16 \times H(X'')=16$ -ψήφιο αριθμό (IV.20). Ακόμα περισσότερο: Είναι αδύνατον να μεταδώσουμε την ίδια πληροφορία με λιγότερα ψηφία αφού η εντροπία της  $X''$  είναι η μέγιστη δυνατή.

Στο σημείο αυτό είναι καλό να συνοψίσουμε και να επιχειρήσουμε να γενικεύσουμε το παράδειγμα: Ξεκινήσαμε από μια τυχαία μεταβλητή  $X$ , ένα «αλφάβητο», και κατασκευάσαμε ένα μήνυμα, μια «λέξη», μήκους  $n$  το πληροφοριακό φορτίο του οποίου είναι  $nH(X)$ . Το μήνυμα αυτό μπορεί να κωδικοποιηθεί σε μια λέξη μήκους  $n'$  το μικρότερο δυνατό μήκος της οποίας αντιστοιχεί στην οικονομικότερη δυνατή κωδικοποίηση, σ' αυτήν, δηλαδή, η οποία αντιστοιχεί σε τυχαία μεταβλητή με τη μέγιστη δυνατή εντροπία (η οποία είναι 1 εάν η κωδικοποίηση χρησιμοποιεί 0 και 1):

$$n_{\min} = nH(X) / H_{\max} \quad (\text{IV.21})$$

Η σχέση αυτή δείχνει αυτό που απέδειξε ο Shannon με συστηματικό τρόπο: **Η εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής θέτει το όριο κάτω από το οποίο δεν μπορεί να συμπιεσθεί**

η πληροφορία που περιέχεται σ' αυτήν και, επομένως, ποσοτικοποιεί το ασυμπίεστο πληροφοριακό φορτίο της.

Στις σημειώσεις αυτές δεν πρόκειται να παρουσιάσουμε τη θεμελιακή συνεισφορά του Shannon στη θεωρία της πληροφορίας παρά μόνο σε πολύ αδρές γραμμές. Για μια πληρέστερη μελέτη θα πρέπει ο ενδιαφερόμενος να καταφύγει σε κάποιο από τα πολλά σχετικά συγγράμματα.

Θα ξεκινήσουμε με την τυχαία μεταβλητή (IV.1) :

$$X = \left\{ x_i, p_i \mid i = 1, \dots, N ; \sum_{i=1}^N p_i = 1 \right\}$$

Στο παράδειγμα που εξετάσαμε περιοριστήκαμε σε ένα συγκεκριμένο μήνυμα (βλ. Εξ. IV.11). Εδώ θα συζητήσουμε την ρεαλιστική περίπτωση μιας «λέξης» η οποία αποτελείται από  $n$  γράμματα και έχει μήκος  $n \gg N$  :

$$\underbrace{x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_n}_n \quad (IV.22)$$

Αν η μεταβλητή  $x_i$  μπορούσε να πάρει μόνο δύο τιμές (0 και 1) θα υπήρχαν  $2^n$  τέτοιες λέξεις. Στην γενική περίπτωση υπάρχουν  $N^n$  λέξεις οι οποίες θα μπορούσαν να μεταφέρουν τις πληροφορίες από τις  $n$  επαναλήψεις του πειράματος τύχης. Εντούτοις, αυτές οι λέξεις δεν είναι, όλες, διαφορετικές μεταξύ τους αφού όσες διαφέρουν σε μεταθέσεις όμοιων γραμμάτων, ταυτίζονται. Επομένως, εάν το ενδεχόμενο  $x_i$

εμφανίζεται  $n_i$  φορές, το πλήθος των διαφορετικών λέξεων μήκους  $n = \sum_{i=1}^N n_i$  είναι:

$$N_n = \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{N-2}}{n_{N-1}} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_N!} \quad (IV.23)$$

Από το σύνολο αυτών των λέξεων θα περιοριστούμε σε εκείνες στις οποίες οι συχνότητες  $n_i$  είναι αρκετά μεγάλοι αριθμοί ώστε να ισχύει η προσέγγιση Stirling:

$$\log_2 n_i! \approx n_i \log_2 n_i - n_i \quad (IV.24)$$

Στην περίπτωση αυτή:

$$\begin{aligned} \log_2 N_n &= \log_2 n! - \log_2 n_1! - \dots - \log_2 n_N! \approx n \log_2 n - n_1 \log_2 n_1 - \dots - n_N \log_2 n_N = \\ &= n \left( -\frac{n_1}{n} \log_2 \frac{n_1}{n} - \dots - \frac{n_N}{n} \log_2 \frac{n_N}{n} \right) \end{aligned} \quad (IV.25)$$

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών μας βεβαιώνει ότι, για επαρκώς μεγάλα  $n_i$  οι λόγοι

$n_i / N$  προσεγγίζουν τις αντίστοιχες πιθανότητες:  $\frac{n_i}{N} \rightarrow p_i$  και επομένως:

$$\log_2 N_n \approx nH(X) \rightarrow N_n \approx 2^{nH(X)} \quad (\text{IV.26})$$

Οι «λέξεις» (σωστότερα: οι ακολουθίες) (IV.22) για τις οποίες ισχύουν οι προηγούμενες προσεγγίσεις λέγονται **τυπικές ακολουθίες**. Στις ακολουθίες αυτές οι συχνότητες εμφάνισης των διαφόρων ενδεχόμενων συμφωνούν με την πιθανότητα πραγματοποίησής τους:  $n_i \approx np_i$ .

Αφού  $H(X) \leq H_{\max}(X) = \log_2 N$  είναι προφανές ότι

$$2^{nH(X)} \leq 2^{n \log_2 N} \rightarrow N_n \leq N^n \quad (\text{IV.27})$$

Αν η εντροπία της τυχαίας μεταβλητής είναι έστω και λίγο μικρότερη από την μεγαλύτερη δυνατή τιμή της, το πλήθος των τυπικών ακολουθιών μπορεί να είναι πολύ μικρότερο από το πλήθος των λέξεων μήκους  $n$  που μπορούμε να φτιάξουμε από την τυχαία μεταβλητή:

$$\frac{N_n}{N^n} \approx 2^{n(H(X) - \log_2 N)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{IV.28})$$

Η πιθανότητα εμφάνισης κάθε μιας από τις τυπικές ακολουθίες είναι:

$$\Pi_n = (p_1)^{n_1} (p_2)^{n_2} \dots (p_N)^{n_N} \quad (\text{IV.29})$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \log_2 \Pi_n &= n_1 \log_2 p_1 + \dots + n_N \log_2 p_N = n \left( \frac{n_1}{n} \log_2 p_1 + \dots + \frac{n_N}{n} \log_2 p_N \right) \approx \\ &\approx n(p_1 \log_2 p_1 + \dots + p_N \log_2 p_N) = -nH(X) \rightarrow \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

$$\Pi_n \approx 2^{-nH(X)}$$

Συνδυάζοντας τις (IV.26) και (IV.30) βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η πιθανότητα εμφάνισης μιας τυπικής ακολουθίας είναι

$$N_n \Pi_n \approx 1 \quad (\text{IV.31})$$

Πριν σχολιάσουμε το σημαντικό αυτό συμπέρασμα πρέπει να σημειώσουμε ότι όλα αυτά τα «σχεδόν» " $\approx$ " που χρησιμοποιήσαμε κρύβουν την αυστηρή μαθηματική ανάλυση του Shannon (για την οποία παραπέμπουμε στα αντίστοιχα εγχειρίδια) στην οποία το " $\approx$ " εξαρτάται από το  $n$  και γίνεται " $=$ " μόνο στο μαθηματικό όριο  $n \rightarrow \infty$ .

Ακόμα και έτσι, τα προηγούμενα αποτελέσματα παρουσιάζουν τη βασική δομή του συμπεράσματός του: Για επαρκώς μεγάλο  $n$  σχεδόν όλες οι ακολουθίες (IV.22) είναι τυπικές. Με άλλα λόγια: **Σχεδόν όλη η πληροφορία που περιέχεται στην τυχαία μεταβλητή  $X$ , βρίσκεται στις τυπικές ακολουθίες.**

Αν κατασκευάσουμε τώρα μια συλλογή των τυπικών ακολουθιών (μήκους  $n$ ) θα έχουμε κατασκευάσει μια τυχαία μεταβλητή η οποία θα περιέχει  $N_n$  ενδεχόμενα τα οποία θα είναι (σχεδόν) ισοπίθανα. Αυτό σημαίνει ότι η εντροπία αυτής της τυχαίας μεταβλητής θα είναι η μέγιστη δυνατή και, επομένως, ασυμπίεστη:

$$H(\text{τυπικές ακολουθίες}) \approx \log_2 N_n = nH(X) \quad (\text{IV.32})$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύει αυτό το οποίο είδαμε ήδη μέσω του απλού παραδείγματος από το οποίο ξεκινήσαμε: Η εντροπία ποσοτικοποιεί το πληροφοριακό φορτίο μιας τυχαίας μεταβλητής το οποίο δεν μπορεί να συμπιεσθεί περαιτέρω.

Η πρόταση του Shannon προκειμένου να κωδικοποιηθεί η εν λόγω πληροφορία είναι να περιοριστούμε στη συλλογή των τυπικών ακολουθιών και να αντιστοιχήσουμε σε κάθε μία από αυτές έναν ακέραιο αριθμό (block coding). Αν τον αριθμό αυτόν το γράψουμε στο δυαδικό σύστημα θα καταλήξουμε με μια τυχαία μεταβλητή  $X' = \{0, 1; q, 1-q\}$ .

Από τη μεταβλητή αυτή μπορούμε να κατασκευάσουμε  $2^{\tilde{n}}$  λέξεις μήκους  $\tilde{n}$ . Αυτό που θέλουμε είναι το πλήθος αυτών των λέξεων να είναι ίσο με το πλήθος των τυπικών ακολουθιών που περιέχονται στην μεταβλητή  $X$ :  $2^{\tilde{n}} = 2^{nH(X)} \rightarrow \tilde{n} = nH(X)$ . Επειδή, κάνοντας την κωδικοποίηση, δεν θέλουμε να χάσουμε πληροφορία θέλουμε οι  $2^{\tilde{n}}$  ακολουθίες να είναι οι τυπικές ακολουθίες που μπορεί να κατασκευάσει κανείς από τη μεταβλητή  $X'$ :  $2^{\tilde{n}} = 2^{\tilde{n}H(X')} \rightarrow H(X') = 1$ . Αυτό σημαίνει ότι η ιδανική κωδικοποίηση θα πρέπει να καταλήγει στη μεταβλητή  $X' = \{0, 1; 1/2, 1/2\}$ .

Μπορούμε, τώρα, να δούμε τις προηγούμενες προσεγγίσεις κάπως πιο συστηματικά:

Η παραγωγή των ακολουθιών από την μεταβλητή  $X$  γίνεται μέσω επαναλήψεων ενός πειράματος τύχης οι οποίες είναι μεν πολλές αλλά, προφανώς, είναι πεπερασμένες. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών που χρησιμοποιήσαμε για την παραγωγή των προηγούμενων αποτελεσμάτων, ταυτίζει τις συχνότητες εμφάνισης των διαφόρων ενδεχομένων με τις αντίστοιχες πιθανότητές μόνο στο μαθηματικό άπειρο:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^N p_i x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right| = 0 \quad (\text{IV.33})$$

Η ακριβής έκφραση του νόμου των μεγάλων αριθμών μας βεβαιώνει ότι:

Για κάθε  $\varepsilon > 0$  και  $\delta > 0$  υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός  $M$  τέτοιος ώστε όταν  $n \geq M$

$$\left| \sum_{i=1}^N p_i x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \delta \quad (\text{IV.34})$$

με πιθανότητα τουλάχιστον ίση με  $1 - \varepsilon$ .

Στα προηγούμενα ταυτίσαμε την ποσότητα  $-\sum_{i=1}^N \frac{n_i}{n} \log_2 \frac{n_i}{n}$  με την εντροπία

$H(X) = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i$ . Σύμφωνα με την (IV.34) αυτή η ταύτιση μπορεί να γίνει με

κάποιο περιθώριο σφάλματος:

$$H(X) - \delta \leq -\sum_{i=1}^N \frac{n_i}{n} \log_2 \frac{n_i}{n} \leq H(X) + \delta \quad (\text{IV.35})$$

Η σχέση αυτή ορίζει και τις ακολουθίες οι οποίες ονομάζονται **δ-τυπικές**.

Επομένως, σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών μας λέει ότι, για κάθε  $\varepsilon, \delta > 0$  και για επαρκώς μεγάλο  $n$  μια ακολουθία  $\underbrace{x_1 x_2 x_3 \dots}_{n}$  θα είναι δ-τυπική με πιθανότητα

τουλάχιστον ίση με  $1 - \varepsilon$ . Η πιθανότητα εμφάνισης μιας δ-τυπικής ακολουθίας, σύμφωνα με την (IV.30), θα βρίσκεται στα όρια

$$\Pi_{\min}(n, \delta) = 2^{-n(H(X)+\delta)} \leq \Pi_{n,\delta} \leq 2^{-n(H(X)-\delta)} = \Pi_{\max}(n, \delta) \quad (\text{IV.35})$$

Αφού η πιθανότητα να παρουσιαστεί κάποια από τις δ-τυπικές ακολουθίες είναι τουλάχιστον  $1 - \varepsilon$ , μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι

$$1 - \varepsilon \leq \sum_{n,\delta\text{-τυπ.}} \Pi_{n,\delta} \leq 1 \quad (\text{IV.36})$$

Το άθροισμα αναφέρεται σε όλες τις ακολουθίες μήκους  $n$  οι οποίες είναι δ-τυπικές.

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq \sum_{n,\delta\text{-τυπ.}} \Pi_{n,\delta} \leq \Pi_{n,\max} N_{\delta\text{-τυπ.}} \rightarrow N_{\delta\text{-τυπ.}} \geq (1 - \varepsilon) 2^{n(H(X)-\delta)} \\ 1 &\geq \sum_{n,\delta\text{-τυπ.}} \Pi_{n,\delta} \geq \Pi_{n,\min} N_{\delta\text{-τυπ.}} \rightarrow N_{\delta\text{-τυπ.}} \leq 2^{n(H(X)+\delta)} \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Επομένως, το πλήθος των δ-τυπικών ακολουθιών κυμαίνεται στα όρια:

$$(1-\varepsilon)2^{n(H(X)-\delta)} \leq N_{\delta\text{-τυπ.}}(n, \delta, \varepsilon) \leq 2^{n(H(X)-\delta)} \quad (\text{IV.38})$$

Στο μαθηματικό όριο  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  και  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Συνοψίζοντας:

Μια ακολουθία με επαρκώς μεγάλο πλήθος στοιχείων  $n$ , θα είναι τυπική με ένα περιθώριο σφάλματος  $O(\delta)$  το οποίο μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε αυξάνοντας το πλήθος των στοιχείων της (δ-τυπική). Από όλες τις δυνατές ακολουθίες  $n$  στοιχείων (οι οποίες συνολικά είναι  $N^n$ ) ένα ποσοστό  $N_{\delta\text{-τυπ.}} / N^n = \left( \sum_{n, \delta\text{-τυπ.}} 1 \right) / N^n$  από αυτές είναι δ-

τυπικές. Το ποσοστό αυτό είναι, εν γένει, πολύ μικρό:  $N_{\delta\text{-τυπ.}} / N^n \leq 2^{-n(\log_2 N - H(X) + \delta)}$ .

Εντούτοις, η πιθανότητα εμφάνισης κάποιας από αυτές τις ακολουθίες μπορεί να πλησιάσει όσο θέλουμε τη μονάδα:  $1 - \varepsilon \leq \sum_{n, \delta\text{-τυπ.}} \Pi_{n, \delta} \leq 1$ . Αυτό σημαίνει ότι σχεδόν όλη η

πληροφορία που μεταφέρει η τυχαία μεταβλητή μπορεί να ενσωματωθεί στις εν λόγω ακολουθίες. Η κωδικοποίηση Shannon αντιστοιχεί (block coding) κάθε μια τις δ-τυπικές ακολουθίες σε έναν αριθμό (γραμμένο, συνήθως, στο δυαδικό σύστημα). Πέρα από το προφανές πρακτικό αποτέλεσμα της παραπάνω διαδικασίας, είναι σημαντικό το συμπέρασμα στο οποίο αυτή μας οδηγεί: **Η εντροπία Shannon ποσοτικοποιεί (σε bits) την ασυμπίεστη πληροφορία** που μπορούμε να αντλήσουμε από μια (κλασική) τυχαία μεταβλητή.

Αυτά τα οποία συζητήσαμε είναι μόνο ένα μικρό μέρος της κλασικής θεωρίας του Shannon η οποία συνεχίζεται με τη μελέτη τυχαίων μεταβλητών οι οποίες συσχετίζονται μεταξύ τους καθώς και με τη διαχείριση των λαθών που είναι δυνατόν να προκύψουν κατά την αποθήκευση ή τη μετάδοση της πληροφορίας. Η πλήρης παρουσίαση της εν λόγω θεωρίας είναι εκτός των σκοπών των σημειώσεων αυτών. Είναι, όμως, πολύ χρήσιμη η συστηματική μελέτη της καθώς βρίσκεται στη βάση και της κβαντικής θεωρίας της πληροφορίας η οποία, για αυτό τον λόγο, αναφέρεται ως Κβαντική Θεωρία Shannon.

## 2. Κβαντική Θεωρία Shannon-Εντροπία von Neumann

### 2α. Εντροπία von Neuman και κλασική πληροφορία

Στην κλασική θεωρία της πληροφορίας, αφετηρία είναι η κλασική τυχαία μεταβλητή (IV.1). Στο πλαίσιο της Κβαντικής Μηχανικής η περιγραφή ενός συστήματος βασίζεται σε μια συλλογή καταστάσεων

$$Q = \left\{ |\varphi_i\rangle, i = 1, \dots, N \mid \Pr(|\varphi_i\rangle) = p_i; \sum_{i=1}^N p_i = 1 \right\} \quad (\text{IV.39})$$

Η συλλογή αυτή μπορεί να είναι καθαρή (εάν περιέχει μόνο μία κατάσταση) ή μη καθαρή (εάν περιέχει περισσότερες). Η μεγάλη διαφορά που εισάγει η κβαντική μηχανική, είναι ότι η περιγραφή της φύσης μέσω μιας συλλογής καταστάσεων δεν είναι απόρροια της αδυναμίας να προσδιοριστούν όλες οι παράμετροι που καθορίζουν το αποτέλεσμα ενός πειράματος αλλά δομικό στοιχείο της περιγραφής του.

Θα μπορούσε κάποιος να μπει στον πειρασμό να αντιμετωπίσει την (IV.39) ως μια τυχαία μεταβλητή τα ενδεχόμενα της οποίας είναι οι διάφορες κβαντικές καταστάσεις, μια κβαντική τυχαία μεταβλητή. Αυτό δεν είναι λάθος. Λάθος θα ήταν να την χειριστεί όπως χειρίστηκε μια κλασική τυχαία μεταβλητή. Ο λόγος είναι ότι υπάρχουν θεμελιακές διαφορές αναμεσά τους.

Τα διαφορετικά ενδεχόμενα μιας κλασικής τυχαίας μεταβλητής είναι, εξ ορισμού, διακρίσιμα. Οι κβαντικές καταστάσεις οι οποίες απαρτίζουν μια κβαντική συλλογή είναι, εν γένει, **μη διακρίσιμες** μεταξύ τους. Το γεγονός αυτό είναι καθαρά κβαντικό και οφείλεται στο ότι η διάκριση απαιτεί κάποιου τύπου μέτρηση ορθογώνια ή γενικευμένη (βλ. Εδάφιο II.5). Αν λάβουμε υπόψη ότι είναι αδύνατον, με μια μέτρηση, να διακρίνουμε ανάμεσα σε δύο άγνωστες καταστάσεις οι οποίες δεν είναι ορθογώνιες (βλ. Εδάφιο II.5α), ότι μετά τη μέτρηση δεν μπορούμε να ξέρουμε ποια ήταν η κατάσταση η οποία μετρήθηκε και ότι είναι αδύνατον να αντιγράψουμε μια άγνωστη κατάσταση καταλήγουμε στο αναπόφευκτο συμπέρασμα ότι τα ενδεχόμενα μιας κβαντικής τυχαίας μεταβλητής δεν είναι, εν γένει, διακρίσιμα μεταξύ τους.

Αν οι καταστάσεις μιας συλλογής είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, είναι και διακρίσιμες. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χειριστούμε την κβαντική τυχαία μεταβλητή με τα εργαλεία που χρησιμοποιήσαμε για την κλασική.

Ως παράδειγμα μπορούμε να εξετάσουμε την μη καθαρή συλλογή

$$Q = \{ |1/2_z\rangle, |-1/2_x\rangle; 1/2, 1/2 \} \quad (\text{IV.40})$$

Όπως έχουμε ήδη πει, όλες οι πληροφορίες οι οποίες μπορούν να αντληθούν από τη συλλογή αυτή βρίσκονται στη μήτρα πυκνότητας:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} |1/2_z\rangle\langle 1/2_z| + \frac{1}{2} |-1/2_x\rangle\langle -1/2_x| \doteq \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.41})$$



Όταν ένα «μήνυμα» (επαρκώς μεγάλου μήκους  $n$ ), απαρτιζόμενο από τα στοιχεία της συλλογής, σταλεί θα πρέπει να «διαβαστεί». Αυτό σημαίνει ότι ο «παραλήπτης» θα πρέπει να κάνει μετρήσεις. Ποιο μέγεθος, όμως, θα πρέπει να μετρήσει;

Ας υποθέσουμε ότι αποφασίζει να κάνει μετρήσεις της προβολής του σπιν στη διεύθυνση του άξονα  $z$ . Τα δυνατά αποτελέσματα είναι  $\pm\hbar/2$  με πιθανότητες

$$\Pr_z(1/2) = \langle 1/2_z | \hat{\rho} | 1/2_z \rangle = 3/4, \Pr_z(-1/2) = \langle -1/2_z | \hat{\rho} | -1/2_z \rangle = 1/4 \quad (\text{IV.42})$$

Αυτό σημαίνει ότι, μετά τη μέτρηση, ο «παραλήπτης» θα έχει στη διάθεσή του ένα μήνυμα το οποίο θα απαρτίζεται από δύο μόνο «γράμματα»  $|\pm 1/2_z\rangle$ . Η πιθανότητα εμφάνισης καθενός απ' αυτά είναι  $3/4$  και  $1/4$  αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, θα έχει στη διάθεσή του μια άλλη συλλογή:

$$Q_z = \{|1/2_z\rangle, |-1/2_z\rangle; 3/4, 1/4\} \quad (\text{IV.43})$$

Τα ενδεχόμενα της συλλογής αυτής είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα και επομένως διακρίσιμα μεταξύ τους. Έτσι, μπορούμε να τη χειριστούμε ως κλασική και να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία που αναφέρονται σε μια κλασική τυχαία μεταβλητή αφού αυτά έχουν, και εδώ, την ίδια ερμηνεία. Η εντροπία Shannon της συλλογής (IV.43) είναι

$$H(Q_z) = -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \log_2 \frac{3}{4} \approx 0.8 \quad (\text{IV.44})$$

Η εντροπία, όπως έχουμε πει, εκφράζει την αταξία που επικρατεί σε μια (κλασική) συλλογή και, επίσης, κάτι πολύ πρακτικό: Το μη συμπίεσιμο πληροφοριακό φορτίο το οποίο μεταφέρει η πραγματοποίηση καθενός από τα ενδεχόμενα αποτελέσματα. Αυτή η ερμηνεία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την (IV.44). Αντίθετα, αν χρησιμοποιούσαμε τις πιθανότητες που εμφανίζονται στην (IV.40) ο αριθμός που θα πρόκυπτε δεν θα ήταν δυνατό να ερμηνευθεί με τον ίδιο τρόπο.

Εν τούτοις, είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα (IV.44) συναρτάται με τη διεύθυνση στην οποία διαλέξαμε να μετρήσουμε το σπιν. Αν, για παράδειγμα, διαλέξουμε τη διεύθυνση του άξονα  $y$  και αφού:

$$\Pr_y(1/2) = \langle 1/2_y | \hat{\rho} | 1/2_y \rangle = 1/2, \Pr_y(-1/2) = \langle -1/2_y | \hat{\rho} | -1/2_y \rangle = 1/2 \quad (\text{IV.45})$$

θα καταλήξουμε σε μια διαφορετική συλλογή

$$Q_y = \{|1/2_y\rangle, |-1/2_y\rangle; 1/2, 1/2\} \quad (\text{IV.46})$$

Η εντροπία, στην περίπτωση αυτή, είναι η μέγιστη δυνατή:

$$H(Q_y) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{IV.47})$$

Η διαφορά ανάμεσα στις δύο συλλογές γίνεται προφανής αν μετρήσουμε τις τυπικές ακολουθίες (μήκους  $n$ ) οι οποίες μεταφέρουν το πληροφοριακό φορτίο της κάθε συλλογής. Στην περίπτωση (IV.44) χρειάζονται  $2^{nH(Q_z)}$  τέτοιες ακολουθίες ενώ στην περίπτωση (IV.46) απαιτούνται  $2^{nH(Q_y)}$ . Προφανώς  $2^{nH(Q_z)} \ll 2^{nH(Q_y)}$  πράγμα που σημαίνει ότι η κωδικοποίηση στην πρώτη περίπτωση είναι πολύ οικονομικότερη από τη δεύτερη και, με την έννοια αυτή, η μέτρηση στη διεύθυνση  $z$  είναι «καλύτερη» από τη μέτρηση στη διεύθυνση  $y$ .

Η τελευταία διαπίστωση μας βοηθάει να ορίσουμε την καλύτερη δυνατή μέτρηση ως τη μέτρηση του μεγέθους η οποία θα οδηγήσει σε κλασική συλλογή η εντροπία της οποίας είναι η ελάχιστη δυνατή.

Στην άσκηση (IV.3) θα βρούμε την καλύτερη δυνατή μέτρηση για την περίπτωση της κβαντικής συλλογής (IV.40) και θα διαπιστώσουμε ότι αυτή αφορά τον τελεστή πυκνότητας (IV.41). Στην άσκηση (IV.6) θα αντιμετωπίσουμε το θέμα γενικότερα και θα αποδείξουμε ότι από όλες τις δυνατές μετρήσεις που μπορούμε να κάνουμε σε μια δεδομένη κατάσταση αυτή η οποία θα οδηγήσει στην ελάχιστη εντροπία είναι η μέτρηση της μήτρας πυκνότητας.

Αν θεωρήσουμε ως δεδομένα αυτά τα αποτελέσματα, η συλλογή

$$Q_\rho = \left\{ |q_i\rangle, i = 1, \dots, N \mid q_i; \sum_{i=1}^N q_i = 1 \right\}, \hat{\rho}|q_i\rangle = q_i|q_i\rangle \quad (IV.48)$$

έχει την μικρότερη την μικρότερη δυνατή εντροπία. Αυτήν μπορούμε να τη γράψουμε:

$$H(Q_\rho) = -\sum_i q_i \log_2 q_i = -Tr(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}) \quad (IV.49)$$

Η ποσότητα αυτή ορίζει την **εντροπία von Neumann** μιας κβαντικής συλλογής:

$$E(\hat{\rho}) = -Tr(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}) \quad (IV.50)$$

Για να καταλάβουμε τον ιδιαίτερο ρόλο της μήτρας πυκνότητας πρέπει να σκεφθούμε ότι οι συλλογές (IV.43), (IV.46) δεν συνδέονται, κατ' ανάγκη, με τη συλλογή (IV.39): Θα μπορούσαν να είχαν προκύψει από οποιαδήποτε άλλη συλλογή η οποία χαρακτηρίζεται από την ίδια μήτρα πυκνότητας (στη συγκεκριμένη περίπτωση την (IV.41)). Έτσι, η μήτρα πυκνότητας είναι η μόνη πληροφορία που λαμβάνει κάποιος ο οποίος λαμβάνει «μηνύματα» από μια κβαντική συλλογή. Για να διαβάσει το «μήνυμα» θα πρέπει να μετρήσει κάποιο μέγεθος  $\hat{A}$ . Αυτά που αναφέραμε πριν, δηλώνουν ότι η μέτρηση της ίδιας της μήτρας πυκνότητας παράγει την περισσότερο τακτοποιημένη κλασική συλλογή:

$$E(\rho) = H(Q_\rho) \leq H(Q_A) \quad \forall A \quad (IV.51)$$

Η εντροπία von Neumann είναι μια ποσότητα με εξαιρετικά πλούσιο περιεχόμενο. Ένα μέρος του είδαμε στην προηγούμενη ανάλυση όπου διαπιστώσαμε ότι η εντροπία εκφράζει το μέγιστο **κλασικό** πληροφοριακό φορτίο το οποίο μπορεί να μεταφέρει η πραγματοποίηση ενός από τα ενδεχόμενα μιας **κβαντικής** συλλογής.

Ο όρος «κλασικό» αναφέρεται στο ότι η πληροφορία ανακτήθηκε μέσω μετρήσεων τα αποτελέσματα των οποίων είναι, εξ ορισμού, κλασικά και κωδικοποιούνται σε bits.

Όπως θα δούμε στα επόμενα εδάφια η εντροπία von Neumann εκφράζει και το μέγιστο **κβαντικό** πληροφοριακό φορτίο, κωδικοποιημένο σε qubits, το οποίο μεταφέρει η κβαντική συλλογή. Θα διαπιστώσουμε, επίσης, μια άλλη σημαντική λειτουργία της εντροπίας von Neumann: Αποτελεί μέτρο του entanglement σε μια διμερή καθαρή κατάσταση.

Η εντροπία von Neumann έχει στο πλαίσιο της Κβαντικής θεωρίας της πληροφορίας ρόλο αντίστοιχο με τον ρόλο της εντροπίας Shannon στο πλαίσιο της κλασικής θεωρίας της πληροφορίας.

## 2β. Ιδιότητες της εντροπίας von Neumann

- Η εντροπία μιας καθαρής κατάστασης είναι μηδέν:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow E(\hat{\rho}) = 0 \quad (\text{IV.52})$$

Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας είναι πολύ απλή: Η εντροπία αναφέρεται σε μια καθαρή συλλογή η περιέχει μόνο ένα ενδεχόμενο η πιθανότητα πραγματοποίησης είναι μονάδα.

- Η εντροπία είναι αναλλοίωτη σε μοναδιακούς μετασχηματισμούς:

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}' = \hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger \rightarrow E(\hat{\rho}) = E(\hat{\rho}') \quad (\text{IV.53})$$

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι ιδιοτιμές ενός τελεστή δεν αλλάζουν σε μοναδιακούς μετασχηματισμούς:

$$\hat{\rho}|q\rangle = q|q\rangle \rightarrow \hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger\hat{U}|q\rangle = q\hat{U}|q\rangle \rightarrow \hat{\rho}'|q'\rangle = q|q'\rangle, |q'\rangle = \hat{U}|q\rangle \quad (\text{IV.54})$$

Αυτές οι δύο απλές ιδιότητες έχουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον εάν τις εφαρμόσουμε για μια διμερή καθαρή κατάσταση  $\hat{\rho}_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$  στην οποία υπάρχει εναγκαλισμός. Η (IV.52) δηλώνει ότι η εντροπία αυτής της κατάστασης είναι μηδέν. Αν περιοριστούμε σε ένα από τα υποσυστήματα  $\hat{\rho}_A^R = Tr_B(\hat{\rho}_{AB})$ ,  $Tr(\hat{\rho}_A^R)^2 < 1$  η αντίστοιχη εντροπία δεν μηδενίζεται:

$$E(\hat{\rho}_A^R) > 0 \quad (\text{IV.55})$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αξιοσημείωτο γιατί δεν ισχύει για την εντροπία Shannon η οποία αναφέρεται σε μια κλασική συλλογή. Στη περίπτωση αυτή εάν η εντροπία ενός

σύνθετου συστήματος είναι μηδέν το ίδιο συμβαίνει και για την εντροπία των επιμέρους συστημάτων.

Το ενδιαφέρον της ιδιότητας (IV.53) μπορεί να γίνει κατανοητό εάν, προτρέχοντας, θεωρήσουμε ότι η εντροπία von Neumann είναι μέτρο της ποσότητας του entanglement σε μια διμερή καθαρή κατάσταση. Η σχέση (IV.53) δηλώνει ότι η ποσότητα αυτή δεν αλλάζει εάν κάνουμε μοναδιακούς μετασχηματισμούς σε ένα από τα υποσυστήματα.

- Η εντροπία είναι κοίλη συνάρτηση:

$$\forall p_1, \dots, p_N \geq 0, \sum_{i=1}^N p_i = 1 \rightarrow E\left(\sum_{i=1}^N p_i \hat{\rho}_i\right) \geq \sum_{i=1}^N p_i E(\hat{\rho}_i) \quad (\text{IV.56})$$

Η σημασία αυτής της ιδιότητας γίνεται φανερή εάν θυμηθούμε ότι μια μη καθαρή μήτρα πυκνότητας μπορεί να γραφεί με άπειρους διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα επιμέρους μητρών πυκνότητας όχι κατ' ανάγκη καθαρών (Εδάφιο 4α):

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N p_i \hat{\rho}_i \quad (\text{IV.57})$$

Μαθηματικά, η τελευταία έκφραση δηλώνει ότι το σύνολο των μητρών πυκνότητας είναι κυρτό (convex). Από την πλευρά της φυσικής, αυτό σημαίνει ότι μια δεδομένη μη καθαρή μήτρα πυκνότητας μπορεί να επιτευχθεί με άπειρα πολλές και διαφορετικές φυσικές διαδικασίες. Έτσι μια δεδομένη υλοποίηση (IV.58) δίνει περισσότερες πληροφορίες από αυτές που περιέχει η μήτρα πυκνότητας αυτή καθ' εαυτή. Με την έννοια αυτή, όταν είναι γνωστή μια συγκεκριμένη υλοποίηση (μια συγκεκριμένη κβαντική συλλογή) της μήτρας πυκνότητας, υπάρχουν περισσότερες πληροφορίες από όσες θα υπήρχαν εάν η υλοποίηση δεν ήταν γνωστή.

- Η μέγιστη δυνατή τιμή της εντροπίας μιας κατάστασης  $\hat{\rho}$  είναι  $\log_2 D$  ( $D$  η διάσταση του χώρου Hilbert επί του οποίου δρα ο τελεστής πυκνότητας) :

$$E(\hat{\rho}) \leq \log_2 D \quad (\text{IV.58})$$

Η απόδειξη αυτής της σχέσης είναι άμεση εάν χρησιμοποιήσουμε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοκαταστάσεις της μήτρας πυκνότητας  $\hat{\rho}|q_i\rangle = q_i|q_i\rangle$ ,  $i = 1, \dots, D$  και γράψουμε:

$$E(\hat{\rho}) = -\sum_{i=1}^D q_i \log_2 q_i \quad (\text{IV.59})$$

Λόγω της  $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$ ,  $\hat{\rho} \geq 0$  οι ιδιοτιμές  $q_i$  αυτές έχουν την ερμηνεία των πιθανοτήτων εμφάνισης των ενδεχομένων  $|q_i\rangle$  στη συλλογή

$$\mathcal{Q}_\rho = \{|q_i\rangle, q_i | i = 1, \dots, N\} \quad (\text{IV.60})$$

Όπως δείχνεται στην άσκηση IV.2 η εντροπία γίνεται μέγιστη όταν όλες οι ιδιοτιμές  $q_i$  είναι ίσες μεταξύ τους  $q_1 = \dots = q_D = 1/D$ . Αυτό σημαίνει ότι η μήτρα πυκνότητας με τη μέγιστη εντροπία είναι η:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{D} \hat{I}_{D \times D} \quad (\text{IV.61})$$

Εάν θεωρήσουμε ως δεδομένο ότι η εντροπία von Neumann είναι μέτρο του entanglement μιας καθαρής διμερούς κατάστασης, η προηγούμενη ανάλυση υποδεικνύει ότι σε μια μέγιστα εναγκαλισμένη κατάσταση η κατάσταση των επιμέρους συστημάτων δίνεται από την (IV.61).

- Η εντροπία ενός διμερούς συστήματος είναι μικρότερη ή, το πολύ, ίση με το άθροισμα των εντροπιών των επιμέρους συστημάτων:

$$E(\hat{\rho}_{AB}) \leq E(\hat{\rho}_A) + E(\hat{\rho}_B) \quad (\text{IV.62})$$

(Εδώ γράψαμε:  $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho}_{AB}$ ,  $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A \hat{\rho}_{AB}$ )

Η απόδειξη της ανισότητας παρουσιάζεται στην άσκηση (IV.9). Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι είναι γνωστή ως **υπο-αθροιστικότητα (sub-additivity)** της εντροπίας και ισχύει τόσο για την Shannon όσο και για την von-Neumann. Στο κλασικό επίπεδο αυτό συμβαίνει διότι το συνολικό σύστημα έχει περισσότερες πληροφορίες από το άθροισμα των επιμέρους συστημάτων, καθώς περιλαμβάνει και τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα υποσυστήματα. Στο κβαντικό επίπεδο ισχύει ακόμα και όταν δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις εάν το δύο επιμέρους συστήματα είναι εναγκαλισμένα. Από τον ορισμό της εντροπίας είναι προφανές ότι η ισότητα ισχύει όταν τα δύο συστήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους:  $\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$ . Τέλος, να σημειώσουμε ότι η ανισότητα (IV.62) έχει ενδιαφέρον όταν η σύνθετη κατάσταση δεν είναι καθαρή. Εάν είναι,  $E(\hat{\rho}_{AB}) = 0$  και η ανισότητα γίνεται τετριμμένη.

- Μια πολύ χρήσιμη ποσότητα είναι η **αμοιβαία πληροφορία (mutual information)** η οποία ορίζεται ως:

$$I(\hat{\rho}_{AB}) = E(\hat{\rho}_B) + E(\hat{\rho}_A) - E(\hat{\rho}_{AB}) \quad (\text{IV.63})$$

Η mutual information είναι ένα μέτρο των συσχετίσεων ανάμεσα στα συστήματα A και B. Εάν αυτά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους  $\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$ , είναι μηδενίζεται αλλιώς είναι θετική (λόγω της υπο-αθροιστικότητας). Να υπογραμμισθεί ότι η (IV.63) περιέχει κάθε είδος συσχετίσεων από καθαρά κβαντικές (όπως ο εναγκαλισμός) έως και καθαρά κλασικές όπως είναι αυτές που μπορούν οφείλονται σε θερμικές διακυμάνσεις. Μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα

$$E(\hat{\rho}_{A|B}) = E(\hat{\rho}_{AB}) - E(\hat{\rho}_B) \quad (\text{IV.64})$$

η οποία αναφέρεται σε ένα σύνθετο σύστημα AB και ποσοτικοποιεί την άγνοια που εξακολουθούμε να έχουμε για την κατάσταση του A όταν η κατάσταση του B είναι γνωστή. Ονομάζεται **υπό συνθήκη εντροπία** του A ως προς το B (**conditional entropy** of A given B)

- Η εντροπία von Neumann έχει την ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ιδιότητα της **ισχυρής υπο-αθροιστικότητας (strong sub-additivity)**:

$$E(\hat{\rho}_{AB}) \geq |E(\hat{\rho}_A) - E(\hat{\rho}_B)| \quad (IV.65)$$

**Η ισχυρή υπο-αθροιστικότητα** (η απόδειξη της οποίας παρουσιάζεται στην άσκηση IV.10) είναι **καθαρά κβαντική ιδιότητα**. Στην κλασική περίπτωση η εντροπία του συνόλου είναι πάντα μεγαλύτερη (ή, το πολύ, ίση) με την εντροπία καθενός από τα συστήματα που τα συνθέτουν:

$$H(X_{AB}) \geq H(X_A), H(X_B) \quad (IV.66)$$

Για να εκτιμήσουμε τη σημασία της (IV.65) μπορούμε να τη εφαρμόσουμε για τη περίπτωση στην οποία η συνολική κατάσταση είναι καθαρή και επομένως  $E(\hat{\rho}_{AB}) = 0$ .

Στην περίπτωση αυτή η ανισότητα (IV.65) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι  $E(\hat{\rho}_A) = E(\hat{\rho}_B)$ . Στην κλασική περίπτωση αυτό θα μας οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι  $E(\hat{\rho}_A) = E(\hat{\rho}_B) = 0$ . Για τα κβαντικά συστήματα όμως ξέρουμε ότι αυτό δεν ισχύει: Σε μια καθαρή διμερή κατάσταση στην οποία υπάρχει εναγκαλισμός τα επιμέρους συστήματα έχουν ίση μη μηδενική εντροπία. Με την ίδια λογική, η υπό συνθήκη εντροπία είναι πάντοτε θετική στην περίπτωση της εντροπίας Shannon ενώ στην περίπτωση της von Neumann μπορεί να είναι και αρνητική.

## 2γ. Εντροπία von Neumann και κβαντική πληροφορία. Συμπύεση-Κωδικοποίηση Schumacher .

Στην παράγραφο 2α είδαμε ότι η εντροπία von Neumann ποσοτικοποιεί το μέγιστο (:το μη περαιτέρω συμπίεσιμο) **κλασικό** πληροφοριακό φορτίο το οποίο μεταφέρει η πραγματοποίηση κάποιου από τα (μη διακρίσιμα) ενδεχόμενα μιας κβαντικής συλλογής (όπως η (IV.39)).

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα δείξουμε ότι η εντροπία von Neumann ποσοτικοποιεί, επίσης, το μη-συμπιέσιμο **κβαντικό** πληροφοριακό φορτίο το οποίο μεταφέρει η πραγματοποίηση κάποιου από τα ενδεχόμενα της κβαντικής συλλογής.

Όπως έχουμε σημειώσει πολλές φορές, οι πληροφορίες που μπορούν να αντληθούν από την πραγματοποίηση ενός από τα ενδεχόμενα αυτά βρίσκονται, αποκλειστικά και μόνο,

στη μήτρα πυκνότητας  $\hat{\rho}$  η οποία χαρακτηρίζει τη συλλογή. Αν σκεφθούμε τη συλλογή ως «αλφάβητο» και κάθε στοιχείο της ως «γράμμα», μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι πληροφορίες της συλλογής μεταφέρονται μέσω «λέξεων» μήκους  $n$  (δηλαδή, μέσω του αποτελέσματος  $n$  επαναλήψεων του πειράματος τύχης) όπως, για παράδειγμα, της λέξης

$$\underbrace{|\varphi_1\rangle|\varphi_4\rangle|\varphi_2\rangle\dots|\varphi_3\rangle|\varphi_1\rangle|\varphi_1\rangle}_n \quad (\text{IV.67})$$

Πρέπει να υπογραμμίσουμε εδώ το σημαντικό: Τη «λέξη» αυτή είναι αδύνατον να τη ξεχωρίσουμε από οποιαδήποτε άλλη, του ίδιου μήκους, η οποία προέρχεται από κάποια άλλη συλλογή η οποία χαρακτηρίζεται από την ίδια μήτρα πυκνότητας.

Με την έννοια αυτή, οι πληροφορίες που μπορούν να αντληθούν από τη λέξη (IV.67), αλλά και από οποιαδήποτε άλλη του ίδιου μήκους, βρίσκονται αποκλειστικά στον τελεστή πυκνότητας:

$$\hat{\rho}^{\otimes n} = \underbrace{\hat{\rho} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}}_n \quad (\text{IV.68})$$

Στην παράγραφο 2α «διαβάσαμε» τη λέξη γράμμα-γράμμα μετρώντας, σε καθένα από αυτά, τον τελεστή πυκνότητας  $\hat{\rho}$ . Με τον τρόπο αυτό η κβαντική συλλογή αντικαταστάθηκε από μία κλασική (συγκροτούμενη από τις ιδιοκαταστάσεις του  $\hat{\rho}$ ) και αποδείξαμε ότι αυτή είναι η καλύτερη δυνατή μέτρηση αυτή, δηλαδή, η οποία παράγει την κλασική συλλογή με τη μικρότερη δυνατή εντροπία.

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα προσπαθήσουμε να ποσοτικοποιήσουμε το πληροφοριακό φορτίο που μεταφέρει, ανά ενδεχόμενο, η κβαντική συλλογή χωρίς να τη μετατρέψουμε σε κλασική.

Με άλλα λόγια: Θα προσπαθήσουμε να «ζυγίσουμε» την πληροφορία που μεταφέρει η λέξη (IV.67) μέσω της κωδικοποίησής της σε qubits (όπως η κλασική πληροφορία κωδικοποιείται σε bits).

Η απλοϊκή απάντηση ( $n$  qubits) δεν είναι σωστή όπως δεν ήταν σωστή, στην κλασική περίπτωση, η σκέψη ότι για μια λέξη μήκους  $n$ , από μια τυχαία μεταβλητή  $\{0, 1; p, 1-p\}$ , απαιτούνται  $n$  bits. Έτσι, το βασικό ερώτημα είναι, και στις δύο περιπτώσεις, το ίδιο: Ποιος είναι ελάχιστος αριθμός qubits που χρειάζονται για να μεταφερθεί η πληροφορία με αξιόπιστο τρόπο;

Για αναλύσουμε την κατάσταση ας ξεκινήσουμε από το γεγονός ότι τα στοιχεία μιας κβαντικής συλλογής

$$Q = \left\{ |\varphi_i\rangle, i = 1, \dots, N \mid \Pr(|\varphi_i\rangle) = p_i; \sum_{i=1}^N p_i = 1 \right\} \quad (\text{IV.69})$$

ακόμα και εάν δεν είναι στοιχεία κάποιας βάσης, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως μπορούν να καλύψουν (μέσω των γραμμικών συνδυασμών τους) ένα χώρο Hilbert

$$H_Q = \text{span} \{ |\varphi_i\rangle; |\varphi_i\rangle \in Q \} ; \dim H_Q = N \quad (\text{IV.70})$$

ο οποίος είναι, εν γένει, υπόχωρος του χώρου Hilbert  $H$  στον οποίο ορίζονται οι καταστάσεις που απαρτίζουν τη κβαντική συλλογή και ο οποίος, ως υποθέσουμε, ότι έχει διάσταση  $D$ .

Ο τελεστής πυκνότητας (IV.68) ο οποίος περιέχει τις πληροφορίες που μεταφέρουν λέξεις μήκους  $n$ , όπως η (IV.67), δρα σε χώρο Hilbert  $H_Q^{\otimes n}$  διάστασης

$$\dim H_Q^{\otimes n} = N^n \leq D^n.$$

Λόγω του ρόλου του τελεστή πυκνότητας, είναι σημαντικό να εξετάσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων του:

$$\hat{\rho}^{\otimes n} |q_i\rangle = Q_i |q_i\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, N^n ; |q_i\rangle \in H_Q^{\otimes n} \quad (\text{IV.71})$$

Μια μέτρηση του  $\hat{\rho}^{\otimes n}$  θα οδηγούσε στη συλλογή

$$Q_{\hat{\rho}^{\otimes n}} = \{ |q_i\rangle, \Pr(|q_i\rangle) = q_i; i = 1, 2, \dots, N^n \} \quad (\text{IV.72})$$

Η πολυπλοκότητα του προβλήματος (IV.71), ειδικά όταν ο αριθμός  $n$  είναι πολύ μεγάλος, σχετίζεται με τη δυνατότητα πολλές από τις ιδιοτιμές (ίσως και όλες) να παρουσιάζουν πολλαπλό εκφυλισμό.

Για να διαπραγματευθούμε το θέμα του εκφυλισμού θα αλλάξουμε τον συμβολισμό και θα γράψουμε την Εξ. (IV.71) ως

$$\hat{\rho}^{\otimes n} |q_\alpha^{(j)}\rangle = Q_\alpha |q_\alpha^{(j)}\rangle ; j = 1, 2, \dots, D_\alpha, \alpha = 0, \dots, E \quad (\text{IV.73})$$

Στην έκφραση αυτή ο δείκτης  $\alpha$  ξεχωρίζει τις διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές οι οποίες υποθέσαμε ότι είναι συνολικά  $E + 1$ . Κάθε μια από αυτές θεωρήσαμε ότι παρουσιάζει εκφυλισμό τάξης  $D_\alpha$ . Ο δείκτης  $j$  αριθμεί τις διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοκαταστάσεις οι οποίες αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή. Προφανώς θα πρέπει

$$\sum_{\alpha=0}^E \sum_{j=1}^{D_\alpha} 1 = \sum_{\alpha=0}^E D_\alpha = N^n \quad (\text{IV.74})$$

Οι εξισώσεις (IV.71) και (IV.73) είναι ισοδύναμες αλλά η τελευταία μας επιτρέπει να αναλύσουμε το ζήτημα του εκφυλισμού.



Οι καταστάσεις  $|q_\alpha^{(j)}\rangle$  είναι στοιχεία του χώρου  $H_Q^{\otimes n}$ . Για δεδομένο  $\alpha$  ο δείκτης  $j$  ξεχωρίζει τις διαφορετικές καταστάσεις οι οποίες ανήκουν σε έναν υπόχωρο του, τον  $H_\alpha$ , ο οποίος έχει διάσταση  $D_\alpha$  και χαρακτηρίζεται από την ιδιοτιμή  $Q_\alpha$ :

$$H_\alpha = \text{span} \left\{ |q_j^{(\alpha)}\rangle : \hat{\rho}^{\otimes n} |q_\alpha^{(j)}\rangle = Q_\alpha |q_\alpha^{(j)}\rangle \right\}; \dim H_\alpha = D_\alpha \quad (\text{IV.75})$$

Οι σχέσεις πληρότητας και ορθοκανονικότητας των ιδιοανυσμάτων (IV.71)- (IV.73) έχουν τη μορφή:

$$\sum_{i=1}^{N_\alpha} |q_i\rangle\langle q_i| = \sum_{\alpha=0}^E \sum_{j=1}^{N_\alpha} |q_\alpha^{(j)}\rangle\langle q_\alpha^{(j)}| = \hat{I}_{N^n \times N^n}, \quad \langle q_\alpha^{(j)} | q_\beta^{(k)} \rangle = \delta_{j,k} \delta_{\alpha,\beta} \quad (\text{IV.76})$$

Για να καταλάβουμε τη διαφορά ανάμεσα στην περίπτωση που υπάρχουν εκφυλισμοί και στην περίπτωση που δεν υπάρχουν, ας πούμε ότι, σε μια λέξη μήκους  $n$ , κάνουμε μέτρηση του μεγέθους  $\hat{\rho}^{\otimes n}$ . Προφανώς θα βρούμε κάποια από τις ιδιοτιμές  $Q_\alpha$  με πιθανότητα:

$$\begin{aligned} \Pr(Q_\alpha) &= \text{Tr}(\hat{E}_\alpha \hat{\rho}^{\otimes n}) = \text{Tr} \left( \sum_{j=1}^{N_\alpha} |q_\alpha^{(j)}\rangle\langle q_\alpha^{(j)}| \hat{\rho}^{\otimes n} \right) = Q_\alpha \text{Tr}_\alpha \left( \sum_{j=1}^{N_\alpha} |q_\alpha^{(j)}\rangle\langle q_\alpha^{(j)}| \right) = \\ &= Q_\alpha \text{Tr}_\alpha(\hat{I}_{H_\alpha}) = Q_\alpha D_\alpha \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

Για το τελευταίο αποτέλεσμα χρειάζεται μια διευκρίνιση: Ο τελεστής

$\hat{E}_\alpha = \sum_{j=1}^{N_\alpha} |q_\alpha^{(j)}\rangle\langle q_\alpha^{(j)}|$  δρώντας σε μια τυχαία κατάσταση του χώρου  $H_Q^{\otimes n}$  την προβάλλει στον υπόχωρο  $H_\alpha$  λειτουργεί, δηλαδή, ως προβολικός. Όταν δρα σε καταστάσεις του χώρου  $H_\alpha$  τις αφήνει ανεπηρέαστες δρα, δηλαδή, ως ταυτοτικός.

Το αποτέλεσμα (IV.77) δηλώνει ότι **εάν δεν υπάρχουν εκφυλισμοί**, μετά τη μέτρηση θα προκύψει μια καθαρή κατάσταση και η μεγαλύτερη πιθανότητα είναι να προκύψει αυτή που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή.

**Στην περίπτωση που υπάρχουν εκφυλισμοί το πιο πιθανό αποτέλεσμα είναι αυτό στο οποίο το γινόμενο της ιδιοτιμής επί τον βαθμό εκφυλισμού της είναι το μεγαλύτερο. Στην περίπτωση αυτή μετά τη μέτρηση δεν θα προκύψει μια καθαρή κατάσταση, αλλά μια μήτρα πυκνότητας:**

$$\hat{\rho}_\alpha = \frac{1}{\text{Tr}(\hat{E}_\alpha \hat{\rho}^{\otimes n})} \hat{E}_\alpha \hat{\rho}^{\otimes n} \hat{E}_\alpha = \frac{1}{\Pr(Q_\alpha)} \hat{E}_\alpha \hat{\rho}^{\otimes n} \hat{E}_\alpha = \frac{1}{D_\alpha} \sum_{j=1}^{D_\alpha} |q_\alpha^{(j)}\rangle\langle q_\alpha^{(j)}| \quad (\text{IV.78})$$

Με άλλα λόγια: Μετά την μέτρηση το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι η κατάσταση που έχουμε στη διάθεσή μας ανήκει στον υπόχωρο (IV.75).

Για να μπορέσουμε να αναλύσουμε περισσότερο την κατάσταση ας ξεκινήσουμε από την απλοποιητική υπόθεση ότι η κβαντική συλλογή για την οποία συζητάμε αποτελείται **μόνο από δύο qubits**:

$$Q = \{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle; p, 1-p\}, \quad |\varphi_i\rangle = a_i|0\rangle + b_i|1\rangle, \quad i=1,2 \quad (\text{IV.79})$$

Στην περίπτωση αυτή ο τελεστής πυκνότητας  $\hat{\rho}$  αναπαρίσταται από έναν πίνακα  $2 \times 2$ , οι ιδιοτιμές του οποίου είναι  $q_1 = q$ ,  $q_2 = 1-q$  με αντίστοιχα ιδιοανύσματα τα qubits  $|q_1\rangle$  και  $|q_2\rangle$ . Μέτρηση του  $\hat{\rho}$  οδηγεί στη συλλογή

$$Q_\rho = \{ |q_i\rangle; \Pr(|q_i\rangle) = q_i \mid i=1,2 \}. \quad (\text{IV.80})$$

Ο τελεστής  $\hat{\rho}^{\otimes n}$  αναπαρίσταται από έναν πίνακα  $2^n \times 2^n$ . Οι  $2^n$  ιδιοκαταστάσεις του είναι ανύσματα τα οποία ορίζονται σε χώρο διάστασης  $2^n$  και είναι τανυστικά γινόμενα των  $|q_1\rangle$  και  $|q_2\rangle$ .

Παράδειγμα τέτοιου ιδιοανύσματος μπορεί να είναι το άνυσμα

$$|q_j^{(k)}\rangle \equiv \underbrace{|q_1\rangle \otimes |q_2\rangle \otimes |q_1\rangle \otimes \dots \otimes |q_2\rangle \otimes |q_2\rangle \otimes |q_1\rangle}_n \quad (\text{IV.81})$$

στο οποίο το  $|q_1\rangle$  (έστω ότι) εμφανίζεται  $k$  φορές και το  $|q_2\rangle$   $n-k$  φορές. Ο δείκτης  $j$  παίρνει τόσες τιμές όσος είναι ο βαθμός εκφυλισμού.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα φαίνεται μία από όλες τις ιδιοκαταστάσεις του  $\hat{\rho}^{\otimes n}$  που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή η οποία είναι η

$$Q_k = q_1^k q_2^{n-k} = q^k (1-q)^{n-k} \quad (\text{IV.82})$$

Η πηγή του εκφυλισμού είναι, τώρα, προφανής: Εάν στην (IV.81) μεταθέσουμε μεταξύ τους είτε τα  $|q_1\rangle$  είτε τα  $|q_2\rangle$ , το ιδιοάνυσμα θα αλλάξει αλλά όχι η αντίστοιχη ιδιοτιμή. Το σύνολο αυτών των μεταθέσεων είναι όλοι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε  $k$  από  $n$  αντικείμενα τα οποία θα ονομάσουμε  $|q_1\rangle$ :

$$N_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (\text{IV.83})$$

Κάθε ένας από αυτούς, αντιστοιχεί σε διαφορετικό ιδιοάνυσμα αλλά στην ίδια ιδιοτιμή. Επομένως, ο αριθμός (IV.83) είναι ο βαθμός εκφυλισμού της ιδιοτιμής  $q^k (1-q)^{n-k}$ . Έτσι η πιθανότητα εμφάνισης της ιδιοτιμής (IV.82) είναι:

$$\Pr(Q_k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} q^k (1-q)^{n-k} \quad (\text{IV.84})$$

Στο συγκεκριμένο απλό παράδειγμα μπορούμε εύκολα να συνδεθούμε με τον συμβολισμό (IV.73) : Όπως φαίνεται από την (IV.83) το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών συμπίπτει με το πλήθος των τιμών που μπορεί να πάρει το  $k$  :

$$E+1 = \sum_{k=0}^n 1 = n+1. \text{ Έτσι, η μεταβλητή } \alpha \text{ συμπίπτει με την } k \text{ και επομένως } D_k = N_k.$$

Μπορούμε αμέσως να ελέγξουμε ότι:

$$\sum_{\alpha=0}^E \sum_{j=1}^{D_\alpha} 1 = \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{N_k} 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \quad (\text{IV.85})$$

Αν υποθέσουμε ότι τόσο το μήκος της λέξης (IV.81) όσο και η μεταβλητή  $k$  είναι επαρκώς μεγάλοι αριθμοί, μπορούμε να βασισθούμε στο νόμο των μεγάλων αριθμών (δες και τη συζήτηση στο εδάφιο 1β του κεφαλαίου V) και να θεωρήσουμε (όπως και στην περίπτωση της ανάλυσης του Shannon) ότι η συχνότητα  $k/n = \alpha/n$  είναι πολύ κοντά στην πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου  $|q_1\rangle$  σε μια μέτρηση του  $\hat{\rho}$  :

$$q_1 \approx \alpha/n \rightarrow q_2 \approx 1 - \alpha/n \quad (\text{IV.86})$$

Στο όριο αυτό βρίσκουμε για την ιδιοτιμή (IV.82):

$$\begin{aligned} \log_2 Q_\alpha &= k \log_2 q_1 + (n-k) \log_2 q_2 = n \left( \frac{\alpha}{n} \log_2 q_1 + \frac{n-\alpha}{n} \log_2 q_2 \right) \approx \\ &\approx n (q_1 \log_2 q_1 + q_2 \log_2 q_2) \end{aligned} \quad (\text{IV.87})$$

Στην τελευταία παρένθεση εμφανίστηκε η εντροπία von Neumann της αρχικής κβαντικής συλλογής και επομένως:

$$Q_\alpha \approx 2^{-nE(Q)} \quad (\text{IV.88})$$

Ο βαθμός εκφυλισμού της ιδιοτιμής γράφεται :

$$\begin{aligned} \log_2 N_\alpha &= \log_2 n! - \log_2 \alpha! - \log_2 (n-\alpha)! \approx n \log_2 n - \alpha \log_2 \alpha - (n-\alpha) \log_2 (n-\alpha) = \\ &= n \left[ -\frac{\alpha}{n} \log_2 \frac{\alpha}{n} - \frac{n-\alpha}{n} \log_2 \frac{n-\alpha}{n} \right] \approx -n (q_1 \log_2 q_1 + q_2 \log_2 q_2) = nE(Q) \rightarrow \\ &\rightarrow N_\alpha \approx 2^{nE(Q)} \end{aligned} \quad (\text{IV.89})$$

Επομένως:

$$\Pr(Q_\alpha) = Q_\alpha N_\alpha \approx 1 \quad (\text{IV.90})$$

Στις τελευταίες σχέσεις το σύμβολο “ $\approx$ ” σημαίνει «σχεδόν» και η ακριβής μαθηματική του λειτουργία είναι ίδια με αυτήν που συζητήσαμε στην περίπτωση της κλασικής θεωρίας Shannon.

**Το αποτέλεσμα (IV.90) δηλώνει ότι εάν κάνουμε μια μέτρηση του μεγέθους  $\hat{\rho}^{\otimes n}$  θα προκύψει, σχεδόν με βεβαιότητα, η ιδιοτιμή  $Q_\alpha$ ,  $\alpha \approx qn$  και κάποια από τις καταστάσεις που ανήκουν στον υπόχωρο  $H_\alpha \subset H^{\otimes n}$  διάστασης  $N_\alpha = D_\alpha$ .**

Να το πούμε κι αλλιώς: Η καλύτερη δυνατή υπόθεση που μπορούμε να κάνουμε για τη λέξη (IV.67) είναι ότι αντιπροσωπεύεται από τη μήτρα πυκνότητας

$$\hat{\rho}_\alpha = \frac{1}{D_\alpha} \sum_{j=1}^{D_\alpha} |q_\alpha^{(j)}\rangle \langle q_\alpha^{(j)}| \quad (\text{IV.91})$$

Για να αποδείξουμε αυτή τη δήλωση μπορούμε υπολογίσουμε τη fidelity της υπόθεσης ότι η μήτρα πυκνότητας  $\hat{\rho}^{\otimes n}$  αντιπροσωπεύεται από την  $\hat{\rho}_\alpha$  (βλ. Εξ. (II.102)):

$$F = \text{Tr} \sqrt{\hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}^{\otimes n}} \quad (\text{IV.92})$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (IV.73) μπορούμε να γράψουμε

$$\hat{\rho}^{\otimes n} = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{j=1}^{D_\alpha} Q_\alpha |q_j^{(\alpha)}\rangle \langle q_j^{(\alpha)}| \quad (\text{IV.93})$$

Αν συνδυάσουμε τις (IV.91) και (IV.93) θα βρούμε:

$$\sqrt{\hat{\rho}^{\otimes n} \hat{\rho}_\alpha} = \sqrt{\frac{Q_\alpha}{D_\alpha} \sum_{j=1}^{D_\alpha} |q_j^{(\alpha)}\rangle \langle q_j^{(\alpha)}|} = \frac{Q_\alpha}{\sqrt{\text{Pr}(Q_\alpha)}} \sum_{j=1}^{D_\alpha} |q_j^{(\alpha)}\rangle \langle q_j^{(\alpha)}| \quad (\text{IV.94})$$

Επομένως η fidelity της υπόθεσης είναι σχεδόν μονάδα:

$$F = \sum_{\alpha=1}^n \frac{Q_\alpha}{\sqrt{\text{Pr}(Q_\alpha)}} \approx \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha = 1 \quad (\text{IV.95})$$

Το σκηνικό που δημιουργείται έχει πολλές αναλογίες με το αντίστοιχο της κλασικής θεωρίας του Shannon. Στην περίπτωση εκείνη, οι πληροφορίες οι οποίες μπορούσαν να αντληθούν μέσω λέξεων επαρκώς μεγάλου μήκους βρισκόταν, σχεδόν με βεβαιότητα, στις λεγόμενες **τυπικές ακολουθίες** δηλαδή σε λέξεις στις οποίες η συχνότητα εμφάνισης κάποιου γράμματος συμπίπτει με την πιθανότητα πραγματοποίησης του αντίστοιχου ενδεχόμενου της τυχαίας μεταβλητής. Στην περίπτωση της κβαντικής συλλογής οι πληροφορίες που μπορούν να αντληθούν μέσω λέξεων επαρκώς μεγάλου

μήκους  $n$ , αποθηκεύονται, σχεδόν με βεβαιότητα, σε υπόχωρους τους οποίους ονομάζουμε **τυπικούς υπόχωρους**.

Οι χώροι αυτοί καλύπτονται από ιδιοανύσματα της μήτρας πυκνότητας  $\hat{\rho}^{\otimes n}$  τα οποία είναι τανυστικά γινόμενα των ιδιοκαταστάσεων της μήτρας πυκνότητας  $\hat{\rho}$ , γινόμενα στα οποία κάθε ιδιοκατάσταση συμμετέχει με ποσοστό ίσο με την αντίστοιχη ιδιοτιμή της. Στην κλασική περίπτωση το πλήθος των τυπικών ακολουθιών είναι πολύ μικρότερο από το πλήθος των λέξεων μήκους  $n$  οι οποίες μπορούν να προκύψουν από τη τυχαία συλλογή. Αντίστοιχα, η διάσταση των τυπικών υποχώρων είναι, εν γένει, πολύ μικρότερη από τη διάσταση του συνολικού χώρου στον οποίο ανήκουν οι λέξεις μήκους  $n$  που προέρχονται από τη κβαντική συλλογή:

$$\dim H_{\alpha} \approx 2^{nE(Q)} \ll 2^n = \dim H^{\otimes n} \quad (\text{IV.96})$$

Στην περίπτωση του Shannon η κωδικοποίηση της πληροφορίας στηρίζεται στην αρίθμηση κάθε μιας από τις τυπικές ακολουθίες μέσω της αντιστοίχισής της με έναν αριθμό στο δυαδικό σύστημα μέσω μιας ακολουθίας, δηλαδή, από  $\{0,1\}$  μήκους  $nH(X)$ . Στην περίπτωση της κβαντικής συλλογής για την κωδικοποίηση μιας λέξης που εμπεριέχεται στον τυπικό υπόχωρο, επαρκούν  $nE(Q)$  qubits.

**Επομένως, όπως η εντροπία Shannon ποσοτικοποιεί το πληροφοριακό φορτίο ανά ενδεχόμενο μιας κλασικής τυχαίας μεταβλητής έτσι και η εντροπία von Neumann ποσοτικοποιεί το πληροφοριακό φορτίο ανά ενδεχόμενο μιας κβαντικής συλλογής.**

Στην προηγούμενη συζήτηση υπάρχουν πολλά σημεία τα οποία χρειάζονται διευκρίνηση.

- Το πρώτο είναι ότι ξεκινήσαμε από τη κβαντική συλλογή (IV.79) η οποία περιέχει μόνο δύο qubits. Εύκολα μπορούμε να γενικεύσουμε σε μια συλλογή αποτελούμενη από  $N$  qubits. Στην περίπτωση αυτή η ιδιοτιμή (IV.82) γίνεται:

$$Q_{\vec{k}} = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_N^{k_N}, \quad \sum_{i=1}^N k_i = n \quad (\text{IV.97})$$

Ο αντίστοιχος βαθμός εκφυλισμού είναι:

$$N_{\vec{k}} = \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{N-1}}{k_N} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_N!} \quad (\text{IV.98})$$

Εάν όλοι οι αριθμοί στις προηγούμενες σχέσεις είναι επαρκώς μεγάλοι μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Νόμο των μεγάλων αριθμών και να βρούμε ότι:

$$\log_2 Q_{\vec{k}} = \sum_{i=1}^N k_i \log_2 q_i = n \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{n} \log_2 q_i \approx n \sum_{i=1}^N q_i \log_2 q_i = -nE(Q) \quad (\text{IV.99})$$

Για τον εκφυλισμό θα βρούμε:

$$\begin{aligned}\log_2 N_{\vec{k}} &= \log_2 n! - \sum_{i=1}^N \log_2 k_i! \approx n \log_2 n - \sum_{i=1}^N k_i \log_2 k_i = \\ &= -n \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{n} \log \frac{k_i}{n} \approx -n \sum_{i=1}^N q_i \log q_i = nE(Q)\end{aligned}\quad (\text{IV.100})$$

Επομένως, στο όριο  $n \rightarrow \infty$ ,  $k_i / n \rightarrow q_i$  ισχύει αυτό που διαπιστώσαμε και στην απλή περίπτωση:

$$Q_{\vec{k}} \approx 2^{nE(Q)}, N_{\vec{k}} \approx 2^{-nE(Q)} \rightarrow \Pr Q_{\vec{k}} \approx 1 \quad (\text{IV.101})$$

Αυτό που δεν είναι τόσο απλό είναι ο υπολογισμός του συνολικού αριθμού διαφορετικών ιδιοτιμών

$$E = E(n, N) = \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \dots \sum_{k_N=0}^{n-k_1-\dots-k_{N-1}} 1 \quad (\text{IV.102})$$

Ο αριθμός αυτός καθορίζει το εύρος στο οποίο κινείται ο δείκτης  $\alpha$  στο άνυσμα  $|q_\alpha^{(j)}\rangle$

αλλά, στην ανάλυση η οποία προηγήθηκε, διαπιστώσαμε ότι αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία αφού όπως είδαμε, όταν  $n \gg 1$ , (σχεδόν) μόνον ένας αριθμός προκύπτει σε μια μέτρηση του μεγέθους  $\hat{\rho}^{\otimes n}$ : Αυτός που αντιστοιχεί στη διαρρύθμιση  $k_i / n \approx q_i$ .

Επομένως, τα συμπεράσματα που βγάλαμε για την απλή περίπτωση των δύο qubits επεκτείνονται άμεσα και στην περίπτωση πολλών.

- Η συστηματική διαπραγμάτευση του ζητήματος απαιτεί τον αυστηρό ορισμό αυτού που αναφέρουμε συνεχώς ως «σχεδόν». Όπως και στην περίπτωση της κλασικής θεωρίας Shannon έτσι και εδώ, ο νόμος των μεγάλων αριθμών μπορεί να εφαρμοστεί με κάποιο περιθώριο σφάλματος:

$$E(Q) - \delta \leq -\sum_{i=1}^N \frac{k_i}{n} \log \frac{k_i}{n} \leq E(Q) + \delta \quad (\text{IV.103})$$

Σε μια μέτρηση επί του μεγέθους  $\hat{\rho}^{\otimes n}$  θα προκύψει το αποτέλεσμα  $Q_\alpha$  το οποίο θα βρίσκεται στην περιοχή

$$2^{-n(E(Q)-\delta)} \leq Q_\alpha \leq 2^{-n(E(Q)+\delta)} \quad (\text{IV.104})$$

Η πιθανότητα να προκύψει μια τέτοια τιμή είναι :

$$\Pr(Q_\alpha) = \text{Tr}(\hat{E}_\alpha \hat{\rho}^{\otimes n}) \geq 1 - \varepsilon \quad (\text{IV.105})$$

Οι υπόχωροι που χαρακτηρίζονται από ιδιοτιμή στο εύρος (IV.104) λέγονται **δ-τυπικοί**.

Η ανάλυση που προηγήθηκε αναφέρεται στο όριο  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Για την πλήρη διαπραγμάτευση του ζητήματος παραπέμπουμε στη σχετική πλούσια βιβλιογραφία.

• Στην παρουσίαση που κάναμε υποθέσαμε ότι η κβαντική συλλογή απαρτίζεται από qubits. Εάν αυτό δεν συμβαίνει, η δομή της ανάλυσης που προηγήθηκε δεν αλλάζει. Αυτό που θα αλλάξει είναι ότι ο τυπικός υπόχωρος δεν θα αποτελείται από qubits αλλά από καταστάσεις που ορίζονται σε χώρο  $D$  διαστάσεων. Μπορούμε όμως, πάντα, να βρούμε μοναδιακό μετασχηματισμό, μια «κωδικοποίηση», η οποία θα απεικονίζει την κατάσταση  $\hat{\rho}_\alpha$  στην κατάσταση

$$\hat{\rho}'_\alpha = \hat{V} \hat{\rho}_\alpha \hat{V}^\dagger \quad (\text{IV.106})$$

η οποία απαρτίζεται από qubits και να επαναλάβουμε την ίδια ανάλυση.

Για να καταλάβουμε τη δυνατότητα του μετασχηματισμού (IV.106) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο αριθμός  $D$  είναι άρτιος (εάν δεν είναι μπορούμε να προσθέσουμε έναν μηδενικό όρο). Κάθε άνυσμα στο χώρο Hilbert διάστασης  $D = 2d$  (ακόμα και εάν υπάρχει εναγκαλισμός) μπορεί να απεικονισθεί, μέσω κατάλληλου μοναδιακού μετασχηματισμού, σε παραγοντοποιημένη κατάσταση  $d$  qubits.

## 2δ. Εντροπία von Neumann και η ποσοτικοποίηση του entanglement.

Όταν περιγράφουμε ένα σύστημα μέσω μιας μη καθαρής μήτρας πυκνότητας αυτό γίνεται διότι, για κάποιο λόγο, δεν έχουμε στη διάθεσή μας το σύνολο των πληροφοριών που το αφορούν. Αυτή η έλλειψη πληροφοριών μπορεί να οφείλεται σε πολλούς και διαφορετικούς λόγους αλλά πάντα (βλέπε παράγραφο II.4) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οφείλεται στον εναγκαλισμό (entanglement) του υπό περιγραφή συστήματος με ένα δεύτερο σύστημα. Η περιγραφή ενός υποσυστήματος, το οποίο είναι τμήμα ενός διμερούς εναγκαλισμένου συστήματος, στερείται των πληροφοριών οι οποίες είναι αποθηκευμένες στις συσχετίσεις του σύνθετου συστήματος και οι οποίες μπορούν να εμφανισθούν μόνο σε μετρήσεις μεγεθών που αφορούν και τα δύο μέρη. Έτσι, το υποσύστημα περιγράφεται από μια μη καθαρή μήτρα πυκνότητας, ή από μια μη καθαρή κβαντική συλλογή, στην οποία η συνοχή ανάμεσα στα συνιστώσα μέρη έχει χαθεί όπως και οι πληροφορίες που αυτή μεταφέρει.

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα δείξουμε ότι η εντροπία von Neumann μπορεί να ποσοτικοποιήσει την πληροφορία που λείπει όταν περιγράφουμε ένα σύστημα μέσω μιας μη καθαρής μήτρας πυκνότητας.

Για να αρχίσουμε, μπορούμε να αναφερθούμε στην singlet κατάσταση δύο ηλεκτρονίων ή, πιο γενικά, σε κάποια από τις λεγόμενες Bell states (δες Άσκηση II.20):

$$|\varphi_{AB}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle \pm |1_A 1_B\rangle), \quad |\psi_{AB}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 1_B\rangle \pm |1_A 0_B\rangle) \quad (\text{IV.107})$$

Εάν, σε κάθε μία από αυτές, υπολογίσουμε την ανηγμένη του ενός από τα υποσυστήματα θα βρούμε εύκολα:

$$\hat{\rho}_A^R = Tr_B \hat{\rho}_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Tr_A \hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_B^R \quad (\text{IV.108})$$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι εάν μετρήσουμε κάποιο μέγεθος του A (ή του B)

$$\hat{O}_A |n\rangle = a_n |n\rangle, \quad n = 1, 2 \quad (\text{IV.109})$$

η πιθανότητα να εμφανιστεί κάποια από τις ιδιοτιμές του είναι:

$$\text{Pr}(a_n) = Tr_A (\hat{\rho}_A^R |E_n\rangle \langle E_n|) = \frac{1}{2} Tr_A (|E_n\rangle \langle E_n|) = \frac{1}{2} \quad (\text{IV.110})$$

Με άλλα λόγια: Σε κάθε μία από τις καταστάσεις (IV.107) όλα τα ενδεχόμενα, όλων των δυνατών μετρήσεων, είναι εξίσου πιθανά. Επομένως, για κάθε ένα από τα υποσυστήματα A ή B μιας εναγκαλισμένης κατάστασης όπως είναι οι Bell states δεν έχουμε απολύτως καμία πληροφορία. Αυτό, προφανώς, οφείλεται στο ότι οι πληροφορίες αυτές έχουν αποθηκευτεί στις συσχετίσεις των εναγκαλισμένων καταστάσεων. Με αφετηρία αυτό το συμπέρασμα θα ορίσουμε τον μέγιστο βαθμό εναγκαλισμού αυτόν που συνδέεται με τη μέγιστη απώλεια πληροφορίας. Έτσι, θα λέμε μια διμερή κατάσταση η οποία ορίζεται σε χώρο Hilbert  $H_{AB}$  **μέγιστα εναγκαλισμένη (maximally entangled)** όταν κάθε ένα από τα υποσυστήματα περιγράφεται από μια μήτρα πυκνότητας της μορφής:

$$\hat{\rho}_A^R = \frac{1}{D_A} \hat{I}_{D_A \times D_A} \quad (\text{IV.111})$$

Η εντροπία von Neumann της κατάστασης αυτής είναι η μέγιστη δυνατή:

$$E = -Tr \hat{\rho}_A^R \log \hat{\rho}_A^R = \log_2 D_A \quad (\text{IV.112})$$

Έτσι, τα υποσυστήματα μιας διμερούς μέγιστα εναγκαλισμένης κατάστασης χαρακτηρίζονται από μέγιστη εντροπία von Neumann.

Είναι προφανές ότι όλες οι διμερείς καταστάσεις δεν είναι μέγιστα εναγκαλισμένες. Ποια, όμως, είναι περισσότερο και ποια λιγότερο εναγκαλισμένη; Όπως θα δείξουμε η εντροπία von Neumann μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως **μέτρο του εναγκαλισμού** μιας διμερούς κατάστασης και, επομένως, ως μέτρο της έλλειψης πληροφορίας στην περιγραφή καθενός από τα υποσυστήματα.

Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε στηρίζεται σε μια απλή λογική: Θα ξεκινήσουμε από έναν αριθμό  $m \gg 1$  καταστάσεων οι οποίες είναι μερικώς εναγκαλισμένες και θα προσπαθήσουμε, μέσω κάποιας φυσικής διαδικασίας, να καταλήξουμε σε  $n < m$  μέγιστα εναγκαλισμένες καταστάσεις.



Ο λόγος  $n/m$  ορίζει το «ποσό» εναγκαλισμού, που περιέχει η αρχική, μη μέγιστα εναγκαλισμένη, κατάσταση:

$$\frac{n}{m} \underset{n \rightarrow \infty}{=} E \quad (\text{IV.113})$$

Είναι προφανές ότι πολλά πρέπει να διευκρινιστούν προκειμένου να γίνει κατανοητό τι σημαίνει ο όρος «διαδικασία» που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Για αυτό είναι καλό να αρχίσουμε με ένα απλοϊκό παράδειγμα.

Θα θεωρήσουμε δύο παρατηρητές A και B, απομακρυσμένους μεταξύ τους, οι οποίοι μοιράζονται μια διμερή κατάσταση δύο σωματίων (ας πούμε ηλεκτρονίων)

$$|\chi_{AB}\rangle = \sqrt{p}|0_A 0_B\rangle + \sqrt{1-p}|1_A 1_B\rangle, \quad p \neq 1/2 \quad (\text{IV.114})$$

τα οποία είναι μερικώς εναγκαλισμένα (όχι μέγιστα). Η βάση στην οποία γράψαμε την τελευταία είναι η:

$$\sigma_{A,B}^z |0_{A,B}\rangle = |0_{A,B}\rangle, \quad \sigma_{A,B}^z |1_{A,B}\rangle = -|1_{A,B}\rangle \quad (\text{IV.115})$$

Παρότι η (IV.114) φαίνεται να είναι μια ειδική επιλογή, δεν είναι έτσι. Ο λόγος είναι ότι οποιαδήποτε διμερή κατάσταση, σε χώρο Hilbert 4 διαστάσεων, μπορούμε να τη γράψουμε με το συγκεκριμένο τρόπο αν χρησιμοποιήσουμε τη βάση Schmidt (βλ. Άσκηση II.10)

Ας πούμε τώρα ότι οι παρατηρητές έχουν στη διάθεσή τους δύο τέτοιες καταστάσεις:

$$\begin{aligned} |\chi_{AB}\rangle^{\otimes 2} &= |\chi_{AB}^{(1)}\rangle \otimes |\chi_{AB}^{(2)}\rangle = p|0_{A^{(1)}} 0_{A^{(2)}}\rangle |0_{B^{(1)}} 0_{B^{(2)}}\rangle + (1-p)|1_{A^{(1)}} 1_{A^{(2)}}\rangle |1_{B^{(1)}} 1_{B^{(2)}}\rangle + \\ &+ \sqrt{2p(1-p)} \left( |0_{A^{(1)}} 1_{A^{(2)}}\rangle |0_{B^{(1)}} 1_{B^{(2)}}\rangle + |1_{A^{(1)}} 0_{A^{(2)}}\rangle |1_{B^{(1)}} 0_{B^{(2)}}\rangle \right) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{IV.116})$$

Οι δείκτες στην προηγούμενη έκφραση διαχωρίζουν τις διαφορετικές καταστάσεις μεταξύ τους. Έτσι, ο δείκτης  $A^{(i)}, i=1,2$  αναφέρεται στο σωματίο που έχει στη διάθεσή του ο A, και ανήκει στην πρώτη ( $i=1$ ) ή τη δεύτερη ( $i=2$ ) διμερή κατάσταση.

Το ερώτημα είναι εάν, και με ποιο τρόπο, οι δύο παρατηρητές μπορούν να καταλήξουν να μοιράζονται μια διμερή κατάσταση μέγιστα εναγκαλισμένη.

Η διαδικασία, το «**πρωτόκολλο**», ξεκινάει με τον παρατηρητή ο οποίος έχει στη διάθεσή του τα σωματίδια A να μετρά το σύνθετο μέγεθος:

$$\hat{\sigma}_A^z = \hat{\sigma}_{A^{(1)}}^z + \hat{\sigma}_{A^{(2)}}^z \quad (\text{IV.117})$$

Όπως είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε, με πιθανότητα  $p^2$  θα βρει +2, με πιθανότητα  $(1-p)^2$  θα βρει -2 και με πιθανότητα  $2p(1-p)$  θα βρει 0.

Έστω ότι επιλέγει το τελευταίο αποτέλεσμα. Μετά από τη μέτρηση, η κατάσταση που μοιράζονται ο A και ο B είναι:

$$|\chi_{AB}^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0_{A^{(1)}}1_{A^{(2)}}\rangle |0_{B^{(1)}}1_{B^{(2)}}\rangle + |1_{A^{(1)}}0_{A^{(2)}}\rangle |1_{B^{(1)}}0_{B^{(2)}}\rangle \right) \quad (\text{IV.118})$$

Η κατάσταση αυτή μπορεί να γραφεί και στη βάση (IV.107) των Bell states. Αυτό γίνεται εύκολα εάν παρατηρήσουμε ότι:

$$|0_{A^{(i)}}0_{B^{(i)}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\varphi_{A^{(i)}B^{(i)}}^{(+)}\rangle + |\varphi_{A^{(i)}B^{(i)}}^{(-)}\rangle \right), \quad |1_{A^{(i)}}1_{B^{(i)}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\varphi_{A^{(i)}B^{(i)}}^{(+)}\rangle - |\varphi_{A^{(i)}B^{(i)}}^{(-)}\rangle \right); \quad i=1,2 \quad (\text{IV.119})$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων αυτών η κατάσταση (IV.118) γράφεται:

$$|\chi_{AB}^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\varphi_{A^{(1)}B^{(1)}}^{(+)}\rangle |\varphi_{A^{(2)}B^{(2)}}^{(+)}\rangle - |\varphi_{A^{(1)}B^{(1)}}^{(-)}\rangle |\varphi_{A^{(2)}B^{(2)}}^{(-)}\rangle \right) \quad (\text{IV.120})$$

Η διαδικασία συνεχίζεται με τον παρατηρητή A να στέλνει ένα από τα σωματίδια που έχει στην κατοχή του, το  $A^{(2)}$  για παράδειγμα, στον παρατηρητή B. Αυτός έχει, πλέον, στη διάθεσή του και τα δύο μέλη του δεύτερου ζεύγους αλλά δεν ξέρει την κατάστασή τους αφού είναι δυνατόν, με την ίδια πιθανότητα, να είναι κάποια από τις  $|\varphi_{A^{(2)}B^{(2)}}^{(\pm)}\rangle$ . Ο B μπορεί, όμως, να κάνει κάποια μέτρηση η οποία θα τον βοηθήσει να καταλάβει ποια είναι η κατάσταση του ζεύγους την οποία έχει στη διάθεσή του. Όπως είδαμε στην Άσκηση II.20 μπορεί να μετρήσει τα μεγέθη

$$\hat{\Sigma}_{A^{(2)}B^{(2)}}^x = \hat{\sigma}_{A^{(2)}}^x \hat{\sigma}_{B^{(2)}}^x, \quad \hat{\Sigma}_{A^{(2)}B^{(2)}}^z = \hat{\sigma}_{A^{(2)}}^z \hat{\sigma}_{B^{(2)}}^z \quad (\text{IV.121})$$

Εάν προκύψουν τα αποτελέσματα (+1,+1) η κατάσταση που έχει στη διάθεσή του είναι η  $|\varphi_{A^{(2)}B^{(2)}}^{(+)}\rangle$  ενώ, εάν προκύψουν τα αποτελέσματα (-1,+1) θα έχει την  $|\varphi_{A^{(2)}B^{(2)}}^{(-)}\rangle$ . Το πρωτόκολλο κλείνει με τον B να ειδοποιεί τον A για τα ευρήματα της μέτρησης.

Μετά από τη διαδικασία αυτή, **οι A και B γνωρίζουν ότι μοιράζονται μια συγκεκριμένη και πλήρως εναγκαλισμένη κατάσταση**, την  $|\varphi_{A^{(1)}B^{(1)}}^{(+)}\rangle$  ή την  $|\varphi_{A^{(1)}B^{(1)}}^{(-)}\rangle$ , ανάλογα με το μήνυμα του B προς τον A.

Είναι χρήσιμο να δούμε το τελευταίο αποτέλεσμα και από μια διαφορετική οπτική γωνία η οποία θα βοηθήσει στη γενίκευση των συμπερασμάτων μας:

Στην κατάσταση (IV.118) το υποσύστημα των σωματιδίων A περιγράφεται από την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας

$$\hat{\rho}_{A^{(1)}A^{(2)}}^R = \text{Tr}_{B^{(1)}B^{(2)}} \left| \chi_{AB}^{(0)} \right\rangle \left\langle \chi_{AB}^{(0)} \right| = \frac{1}{2} \left( \left| 0_{A^{(1)}} 1_{A^{(2)}} \right\rangle \left\langle 0_{A^{(1)}} 1_{A^{(2)}} \right| + \left| 1_{A^{(1)}} 0_{A^{(2)}} \right\rangle \left\langle 1_{A^{(1)}} 0_{A^{(2)}} \right| \right) \quad (\text{IV.122})$$

Ο τελεστής αυτός δρα σε χώρο Hilbert 4 διαστάσεων και έχει 4 ιδιοκαταστάσεις :

$\left| 0_{A^{(1)}} 1_{A^{(2)}} \right\rangle$  και  $\left| 1_{A^{(1)}} 0_{A^{(2)}} \right\rangle$  με ιδιοτιμή  $1/2$  και  $\left| 0_{A^{(1)}} 0_{A^{(2)}} \right\rangle, \left| 1_{A^{(1)}} 1_{A^{(2)}} \right\rangle$  με ιδιοτιμή  $0$ .

Στη βάση των ιδιοκαταστάσεων του ο τελεστής (IV.122) αναπαρίσταται από τον πίνακα:

$$\hat{\rho}_A^R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.123})$$

Με την έννοια αυτή η κατάσταση (IV.118) μπορεί να θεωρηθεί μέγιστα εναγκαλισμένη σε έναν υπόχωρο 2 διαστάσεων του χώρου στον οποίο ορίζεται.

Αυτή η παρατήρηση βρίσκεται πίσω από τη δυνατότητά μας, μέσω του πρωτοκόλλου που περιγράψαμε, να καταλήξουμε σε μια Bell state την οποία μοιράζονται οι A και B.

Μπορούμε να συνοψίσουμε την προηγούμενη διαδικασία λέγοντας ότι οι δύο παρατηρητές ξεκίνησαν από δύο μη μέγιστα εναγκαλισμένες καταστάσεις και μέσω **τοπικών χειρισμών** (ενεργειών, δηλαδή, που κάνει είτε ο A είτε ο B στο μέρος του συστήματος το οποίο έχει στη διάθεσή του) και μέσω **κλασικής επικοινωνίας** κατέληξαν να μοιράζονται μια πλήρως εναγκαλισμένη κατάσταση. Ένα τέτοιο πρωτόκολλο φέρεται υπό τον τίτλο **LOCC** (: Local Operations and Classical Communication). Το πρωτόκολλο, όμως, το οποίο παρουσιάσαμε δεν μπορεί να μας οδηγήσει σε μια εκτίμηση της ποσότητας του εναγκαλισμού της αρχικής κατάστασης. Ο λόγος είναι ότι μεσολάβησε μια μέτρηση η οποία έχει μη αμελητέα πιθανότητα να μην οδηγήσει στο αποτέλεσμα (IV. 118) το οποίο είναι απαραίτητο για το πρωτόκολλο. Μάλιστα, η πιθανότητα λάθους  $p^2 + (1-p)^2$  είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα επιτυχίας  $2p(1-p)$ . Αυτό σημαίνει ότι είναι δυνατόν να θυσιάσουμε έναν απροσδιόριστο μεγάλο αριθμό καταστάσεων ώστε να αποκτήσουμε καταστάσεις όπως η (IV.118).

Για να υπερβούμε τη δυσκολία, θα επαναλάβουμε το πρωτόκολλο ξεκινώντας από έναν πολύ μεγάλο αριθμό καταστάσεων όπως η (IV.114):

$$\left| \chi_{AB} \right\rangle^{\otimes m} = \left| \chi_{AB}^{(1)} \right\rangle \otimes \dots \otimes \left| \chi_{AB}^{(m)} \right\rangle \quad (\text{IV.122})$$

Εάν κάνουμε τις πράξεις θα καταλήξουμε στο αποτέλεσμα

$$\left| \chi_{AB} \right\rangle^{\otimes m} = \sum_{k=0}^m (\sqrt{p})^k (\sqrt{1-p})^{m-k} \left| \tilde{\chi}_{AB}^{(k)} \right\rangle \quad (\text{IV.123})$$

Η τελευταία σχέση είναι η γενίκευση του αποτελέσματος (IV.116) το οποίο αντιστοιχεί στην περίπτωση  $m = 2$ . Η κατάσταση  $|\tilde{\chi}_{AB}^{(k)}\rangle$  είναι μια επαλληλία όρων καθένας από τους οποίους αποτελείται από γινόμενα σωματιδίων A και B. Στα γινόμενα αυτά εμφανίζεται  $k$  φορές η κατάσταση  $|0_{A(B)}\rangle$  και  $m - k$  φορές η κατάσταση  $|1_{A(B)}\rangle$ :

$$|\tilde{\chi}_{AB}^{(k)}\rangle = |0_{A(1)}0_{A(2)}\dots 0_{A(k)}1_{A(k+1)}1_{A(k+2)}\dots 1_{A(m)}\rangle |0_{B(1)}0_{B(2)}\dots 0_{B(k)}1_{B(k+1)}1_{B(k+2)}\dots 1_{B(m)}\rangle + \text{μεταθέσεις} \quad (\text{IV.124})$$

Ο όρος «μεταθέσεις» στην τελευταία έκφραση μετράει όλους τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε από τα  $m$  στοιχεία  $k$  τα οποία θα ονομάσουμε "0" αφήνοντας για τα υπόλοιπα  $m - k$  την ονομασία "1". Προφανώς το πλήθος των όρων στην επαλληλία (IV.124) είναι:

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!} \quad (\text{IV.125})$$

Η κατάσταση (IV.124) δεν είναι κανονικοποιημένη. Μπορούμε να εισάγουμε την αντίστοιχη κανονικοποιημένη κατάσταση  $|\chi_{AB}^{(k)}\rangle$  γράφοντας:

$$|\tilde{\chi}_{AB}^{(k)}\rangle = \sqrt{\binom{m}{k}} |\chi_{AB}^{(k)}\rangle \quad (\text{IV.126})$$

Μετά από αυτά, η (IV.123) γράφεται:

$$|\chi_{AB}\rangle^{\otimes m} = \sum_{k=0}^m C_k |\chi_{AB}^{(k)}\rangle \quad (\text{IV.127})$$

όπου

$$C_k = (\sqrt{p})^k (\sqrt{1-p})^{m-k} \sqrt{\binom{m}{k}} \quad (\text{IV.128})$$

Όπως και στο πρωτόκολλο που αναλύσαμε έτσι και εδώ ο A μετράει, στην κατάσταση (IV.127), το μέγεθος

$$\hat{\sigma}_A^z = \sum_{j=1}^m \hat{\sigma}_{A(j)}^z \quad (\text{IV.129})$$

Προφανώς, με πιθανότητα  $|C_k|^2$  θα προκύψει το αποτέλεσμα

$$k(+1) + (m-k)(-1) = 2k - m \quad (\text{IV.130})$$

και, μετά τη μέτρηση, οι δύο παρατηρητές θα μοιράζονται την κατάσταση  $|\chi_{AB}^{(k)}\rangle$ .

Όπως και στο απλό πρώτο παράδειγμα, έτσι και εδώ, η κατάσταση αυτή είναι μέγιστα εναγκαλισμένη σε έναν υπόχωρο διάστασης  $2^{\binom{m}{k}}$ . Με άλλα λόγια, η ανηγμένη μήτρα πυκνότητας  $\hat{\rho}_{A^{(1)}\dots A^{(m)}}^R = \text{Tr}_{B^{(1)}\dots B^{(m)}} |\chi_{AB}^{(k)}\rangle\langle\chi_{AB}^{(k)}|$ , έχει  $\binom{m}{k}$  μη μηδενικές ιδιοτιμές οι οποίες είναι όλες ίσες μεταξύ τους. Αυτό, όπως και στο πρώτο παράδειγμα, δηλώνει ότι οι δύο παρατηρητές A και B μπορούν να έχουν στη διάθεσή τους, τουλάχιστον,  $\binom{m}{k}$  μέγιστα εναγκαλισμένες καταστάσεις.

Το πλεονέκτημα που έχει το συγκεκριμένο παράδειγμα έγκειται στη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τους νόμους των μεγάλων αριθμών όταν το πλήθος των αρχικών καταστάσεων είναι επαρκώς μεγάλο:  $m \gg 1$ . Αν χωρίσουμε τον συντελεστή  $C_k$  σε δύο παράγοντες, ο πρώτος μπορεί να γραφεί:

$$(\sqrt{p})^k (\sqrt{1-p})^{m-k} = 2^{-\frac{m}{2}f\left(\frac{k}{m}, p\right)}, \quad f\left(\frac{k}{m}, p\right) = -\frac{k}{m} \log_2 p - \left(1 - \frac{k}{m}\right) \log_2 (1-p) \quad (\text{IV.131})$$

Για τον δεύτερο παράγοντα βρίσκουμε:

$$\log_2 \sqrt{\binom{m}{k}} = \frac{1}{2} (\log_2 m! - \log_2 k! - \log_2 (m-k)!) \quad (\text{IV.132})$$

Εάν θεωρήσουμε ότι οι αριθμοί  $m$  και  $k$  είναι επαρκώς μεγάλοι αριθμοί μπορούμε να εφαρμόσουμε την προσέγγιση Stirling και να βρούμε:

$$\log_2 \sqrt{\binom{m}{k}} \approx -\frac{m}{2} \left( \frac{k}{m} \log_2 \frac{k}{m} + \frac{k-m}{m} \log_2 \frac{k-m}{m} \right) = \frac{m}{2} f\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{m}\right) \quad (\text{IV.133})$$

Έτσι, η κανονικοποίηση της κατάστασης  $|\chi_{AB}^{(k)}\rangle$  παίρνει τη μορφή:

$$C_k \approx 2^{\frac{m}{2} \left( f\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{m}\right) - f\left(\frac{k}{m}, p\right) \right)} \quad (\text{IV.134})$$

Στο όριο  $m \rightarrow \infty$ ,  $\frac{k}{m} \rightarrow p$  και επομένως:

$$C_k \underset{m \gg kp}{\approx} 1 \quad (\text{IV.135})$$

Με άλλα λόγια, όταν το πλήθος των καταστάσεων (IV.114) είναι επαρκώς μεγάλο, η μέτρηση του μεγέθους (IV.129) θα οδηγήσει, σχεδόν με βεβαιότητα, στο αποτέλεσμα

$$2k - m \underset{k=mp}{\approx} m(2p-1) \quad (\text{IV.136})$$

Η κατάσταση την οποία θα μοιράζονται, μετά από τη μέτρηση, είναι η  $|\chi_{AB}^{(k=mp)}\rangle$  η οποία είναι μέγιστα εναγκαλισμένη σε χώρο  $H_k$  διάστασης

$$\dim H_k = 2^{\binom{m}{k}} \approx 2^{mf(p,p)} \quad (\text{IV.137})$$

ο οποίος είναι υπόχωρος του χώρου  $H^{\otimes m}$  ( $\dim H^{\otimes m} = 2^m$ ) στον οποίο ορίζεται η κατάσταση  $|\chi_{AB}\rangle^{\otimes m}$ .

Στην έκφραση (IV.137) η συνάρτηση

$$f(p, p) = E = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p) \quad (\text{IV.138})$$

είναι η εντροπία von Neumann της κατάστασης  $\hat{\rho}_A^R$  (ή της  $\hat{\rho}_B^R$ ):

$$E = -Tr(\hat{\rho}_{A(B)}^R \log_2 \hat{\rho}_{A(B)}^R), \quad \hat{\rho}_{A(B)}^R = Tr_{B(A)} |\chi_{AB}\rangle \langle \chi_{AB}| \quad (\text{IV.139})$$

Στον  $H_k$  μπορούμε να εφαρμόσουμε τον μοναδιακό μετασχηματισμό (IV.119) και να μεταγράψουμε την  $|\chi_{AB}^{(k)}\rangle$  στη βάση των Bell states. Μετά την εφαρμογή του η κατάσταση (IV.124) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} |\tilde{\chi}_{AB}^{(k)}\rangle &= |0_{A(1)} 0_{A(2)} \dots 0_{A(k)} 1_{A(k+1)} 1_{A(k+2)} \dots 1_{A(m)}\rangle |0_{B(1)} 0_{B(2)} \dots 0_{B(k)} 1_{B(k+1)} 1_{B(k+2)} \dots 1_{B(m)}\rangle + \text{μεταθέσεις} = \\ &= \prod_{i=1}^k |0_{A(i)} 0_{B(i)}\rangle \prod_{j=k+1}^m |1_{A(j)} 1_{B(j)}\rangle + \text{μεταθέσεις} = \\ &= \frac{1}{2^{m/2}} \left\{ \prod_{i=1}^k (|\varphi_{A(i)B(i)}^{(+)}\rangle + |\varphi_{A(i)B(i)}^{(-)}\rangle) \prod_{j=k+1}^m (|\varphi_{A(j)B(j)}^{(+)}\rangle - |\varphi_{A(j)B(j)}^{(-)}\rangle) + \text{μεταθέσεις} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.140})$$

Επομένως στο όριο  $m \rightarrow \infty$ ,  $\frac{k}{m} \rightarrow p$ , η κατάσταση η οποία θα προκύψει μετά την μέτρηση και θα μοιράζονται οι δύο παρατηρητές είναι:

$$|\chi_{AB}^{(k)}\rangle = \frac{1}{2^{mE/2+m/2}} \left\{ \prod_{i=1}^k (|\varphi_{A(i)B(i)}^{(+)}\rangle + |\varphi_{A(i)B(i)}^{(-)}\rangle) \prod_{j=k+1}^m (|\varphi_{A(j)B(j)}^{(+)}\rangle - |\varphi_{A(j)B(j)}^{(-)}\rangle) + \text{μετ.} \right\} \quad (\text{IV.141})$$

Αν πραγματοποιήσουμε τα γινόμενα θα εμφανισθεί μια επαλληλία  $2^{mE+m}$  όρων πολλοί από τους οποίους είναι ίσοι μεταξύ τους (ή ίσοι και αντίθετοι). Οι όροι που θα εμφανισθούν τις περισσότερες φορές είναι οι  $\prod_{i=1}^m |\varphi_{A^{(i)}B^{(i)}}^{(+)}\rangle$  και  $\prod_{i=1}^m |\varphi_{A^{(i)}B^{(i)}}^{(-)}\rangle$  οι οποίοι θα εμφανισθούν, με την ίδια ακριβώς μορφή, σε κάθε μία από τις μεταθέσεις που δηλώνονται στην αγκύλη της (IV.141) και, έτσι, το πλήθος τους θα είναι  $\binom{m}{k} \approx 2^{mE}$ . Ο συντελεστής κανονικοποίησης με τον οποίο θα πολλαπλασιάζονται είναι

$$\frac{2^{mE}}{2^{mE/2+m/2}} = \frac{1}{2^{-mE/2+m/2}} \quad (\text{IV.142})$$

Το πρωτόκολλο προχωράει όπως και στην απλή περίπτωση  $m = 2$ . Ο παρατηρητής A στέλνει στον B ένα από τα σωμάτια που έχει στη διάθεσή του, έστω το  $A^{(1)}$ . Ο B θα έχει στη διάθεσή του και τα δύο μέλη του ζεύγους 1. Αυτό θα βρίσκεται, με ίση πιθανότητα είτε στην κατάσταση  $|\varphi_{A^{(1)}B^{(1)}}^{(+)}\rangle$  είτε στην  $|\varphi_{A^{(1)}B^{(1)}}^{(-)}\rangle$ . Ο B μπορεί, μετρώντας τα κατάλληλα μεγέθη, να διαπιστώσει ποια από τις δύο καταστάσεις έχει στη διάθεσή του και να πληροφορήσει σχετικά τον A.

Μετά την μέτρηση, η κατάσταση που μοιράζονται οι A και B έχει αλλάξει και έχει το μισό πλήθος όρων σε σχέση με την (IV.141) και επομένως ο συντελεστής κανονικοποίησης καθενός από τους όρους της επαλληλίας θα πολλαπλασιαστεί με  $2^{1/2}$ .

Αυτή η διαδικασία θα συνεχιστεί έως ότου ο συντελεστής, κάποιου από τους διαφορετικούς όρους, γίνει μονάδα. Στην περίπτωση αυτή οι δύο παρατηρητές θα μοιράζονται μια κατάσταση η οποία είναι ένα γινόμενο από Bell states.

Το πλήθος των όρων αυτού του γινομένου εξαρτάται από το πόσες μετρήσεις χρειάστηκαν για να επιτευχθεί (: η μέτρηση που κάνει ο B είναι ένα πείραμα τύχης). Ο μεγαλύτερος αριθμός μετρήσεων, έστω  $x$ , που θα χρειασθεί (το πιο «άτυχο» αποτέλεσμα) είναι αυτός που απαιτείται ώστε να γίνει μονάδα ο μεγαλύτερος από όλους τους συντελεστές, ο (IV.142):

$$\frac{2^{x/2}}{2^{-mE/2+m/2}} = 1 \rightarrow x = m - mE \quad (\text{IV.143})$$

Κάθε μία από τις μετρήσεις αφαιρεί ένα από τα ζεύγη που μοιράζονται οι A και B. Έτσι, μετά το τέλος της διαδικασίας, οι παρατηρητές θα απομείνουν με ένα γινόμενο τουλάχιστον

$$n = m - x = m - (m - mE) = mE \quad (\text{IV.144})$$

πλήρως εναγκαλισμένων καταστάσεων. Ο λόγος

$$\frac{n}{m} = E \leq 1 \quad (\text{IV.145})$$

ορίζει την ποσότητα εναγκαλισμού που περιέχει η αρχική κατάσταση (IV.114).

Δύο σχόλια χρειάζονται πριν κλείσουμε την παράγραφο:

- Στην ανάλυση που παρουσιάσαμε δεν μπήκαμε στις μαθηματικές λεπτομέρειες του σχεδόν " $\approx$ " όπως, εξάλλου, κάναμε και στις προηγούμενες παραγράφους. Παραπέμπουμε στις κατάλληλες πηγές για την λεπτομερειακή ανάλυση όχι μόνο γιατί αυτό απαιτεί η μαθηματική ακρίβεια αλλά επίσης, ίσως και κυρίως, γιατί τα όρια  $m \rightarrow \infty$ ,  $\frac{k}{m} \rightarrow p$  δεν ικανοποιούνται σε ρεαλιστικές συνθήκες. Αυτό σημαίνει ότι στα πειράματα τύχης (που είναι πάντα οι μετρήσεις στη κβαντική μηχανική) που απαιτούνται για να προχωρήσουν τα διάφορα πρωτόκολλα πρέπει να ελέγχονται τα περιθώρια λάθους τα οποία καθιστούν τη διαδικασία αποτελεσματική.

- Η προηγούμενη συζήτηση βασίστηκε σε καταστάσεις οι οποίες ορίζονται σε χώρους Hilbert δύο διαστάσεων. Μπορεί, όμως, εύκολα να επεκταθεί σε χώρους περισσότερων διαστάσεων.

Μια διμερή καθαρή κατάσταση μπορούμε, πάντα, να τη γράψουμε στη βάση Schmidt ως:

$$|\chi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^D \sqrt{p_i} |i_A\rangle |u_{i,B}\rangle \quad (\text{IV.146})$$

Θυμίζουμε ότι  $\{|i_A\rangle\}$  είναι τα ιδιοανύσματα της  $\hat{\rho}_A^R$  που αντιστοιχούν σε μη μηδενικές ιδιοτιμές,  $\{|u_{i,B}\rangle\}$  είναι τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα της  $\hat{\rho}_B^R$  και  $\{p_i\}$  είναι οι κοινές, μη μηδενικές, ιδιοτιμές τους. Στην κατάσταση  $|\chi_{AB}\rangle^{\otimes m}$  πάντα μπορούμε να μετρήσουμε ένα μέγεθος το οποίο να μετατίθεται με τον τελεστή πυκνότητας  $\hat{\rho}_{A^{(1)}\dots A^{(m)}}^R$ . Μια τέτοια μέτρηση οδηγεί την αρχική κατάσταση στην  $|\chi_{AB}^{(\vec{k})}\rangle$  όπου το άνυσμα  $\vec{k} = (k_1, \dots, k_D)$  χαρακτηρίζει το αποτέλεσμα της μέτρησης. Η κατάσταση αυτή είναι μέγιστα εναγκαλισμένη σε υπόχωρο διάστασης  $D^{\frac{m!}{k_1! \dots k_D!}}$ .

Για επαρκώς μεγάλο  $m$ , κατάσταση που θα προκύψει θα χαρακτηρίζεται από το άνυσμα  $\vec{k} \approx (mp_1, \dots, mp_D)$  και η διάσταση του υποχώρου θα είναι

$$D^{\frac{m!}{k_1! \dots k_D!}} \approx D^{mE}, \quad E = -\sum_{i=1}^D p_i \log_2 p_i = -\text{Tr} \hat{\rho}_A^R \log \hat{\rho}_A^R = -\text{Tr} \hat{\rho}_B^R \log \hat{\rho}_B^R \quad (\text{IV.147})$$



Όπως και στην διδιάστατη περίπτωση που αναλύσαμε, μπορούμε να βρούμε ένα LOCC πρωτόκολλο ώστε να καταλήξουμε σε  $mE$  καταστάσεις οι οποίες είναι πλήρως εναγκαλισμένες σε χώρο διάστασης  $D$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ IV

**IV.1** Να αποδειχθεί η σχέση (IV.2) του κυρίως κειμένου. Να αποδειχθεί, δηλαδή, ότι η μοναδική συνάρτηση η οποία ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του πληροφοριακού φορτίου το οποίο μεταφέρει η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου πιθανότητας  $p$  είναι

$$h(p) = -C_a \log_a p, C_a > 0$$

**Απάντηση.**

Η απαίτηση κλειδί είναι η (δ) η οποία σημαίνει ότι

$$h(p^n) = nh(p) \quad (1)$$

Σε πρώτη φάση θα μεταχειριστούμε την (1) ως εάν ο αριθμός  $n$  να ήταν μια συνεχής μεταβλητή:

$$h(p^x) = xh(p) \quad (2)$$

Εάν παραγωγίσουμε την τελευταία θα βρούμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} h(p^x) &= h(p) \rightarrow \frac{\partial p^x}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p^x} h(p^x) = h(p) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} e^{x \ln p} \frac{\partial}{\partial p^x} h(p^x) = h(p) \rightarrow \\ &\rightarrow (\ln p) p^x \frac{\partial}{\partial p^x} h(p^x) = h(p) \rightarrow p^x \frac{\partial}{\partial p^x} h(p^x) = h(p) / \ln p \end{aligned} \quad (3)$$

Η τελευταία σχέση υποδεικνύει ότι η έκφραση  $p^x \frac{\partial}{\partial p^x} h(p^x)$  είναι ανεξάρτητη του  $x$ .

Άρα ισχύει και για  $x = 1$ :

$$p \frac{\partial}{\partial p} h(p) = h(p) / \ln p \rightarrow \frac{\partial}{\partial p} \ln h(p) = \frac{\partial}{\partial p} \ln \ln p \rightarrow h(p) = \text{σταθ.} \ln p \quad (4)$$

Για τους προηγούμενους υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε τον νεπέριο λογάριθμο. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον λογάριθμο σε οποιαδήποτε βάση εάν βασισθούμε στη σχέση:

$$\ln p = (\log_a p) \ln a \quad (5)$$

Εάν συνδυάσουμε τις (4) και (5) μαζί με την απαίτηση  $h(p) \geq 0$  θα καταλήξουμε στην

$$h(p) = -C_a \log_a p, C_a > 0 \quad (6)$$

Οι λογαριασμοί που κάναμε προηγουμένως είναι νόμιμοι στο βαθμό που η συνάρτηση  $h(p^x)$  είναι αναλυτική στη γειτονιά του  $x = n$  έτσι ώστε να είναι παραγωγίσιμη και το όριο  $\lim_{x \rightarrow n} \frac{\partial}{\partial x} h(p^x)$  να υπάρχει και να είναι μοναδικό.

**IV.2** Να δειχθεί ότι η εντροπία Shannon μιας τυχαίας μεταβλητής, γίνεται μέγιστη όταν όλα τα ενδεχόμενα που την συγκροτούν είναι εξίσου πιθανά.

**Απάντηση.**

Για τη διευκόλυνση των πράξεων θα γράψουμε

$$H = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i \equiv -\frac{1}{\ln 2} H' \quad (1)$$

και θα μεγιστοποιήσουμε την  $H'$ .

Για να λάβουμε υπόψη τη δέσμευση

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (2)$$

θα γράψουμε

$$H' = -\sum_{i=1}^{N-1} p_i \ln p_i - p_N \ln p_N \quad (3)$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$\frac{\partial H'}{\partial p_k} = -\sum_{i=1}^{N-1} \delta_{ik} \ln p_i - \sum_{i=1}^{N-1} \delta_{ik} - \frac{\partial p_N}{\partial p_k} \ln p_N - \frac{\partial p_N}{\partial p_k} \quad (4)$$

Για τον πρώτο όρο του δεύτερου μέλους της τελευταίας βρίσκουμε:

$$\sum_{i=1}^N \delta_{ik} \ln p_i = \ln p_k \rightarrow \sum_{i=1}^{N-1} \delta_{ik} \ln p_i = \ln p_k - \delta_{kN} \ln p_N \quad (5)$$

Για τους επόμενους:

$$\sum_{i=1}^N \delta_{ik} = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{N-1} \delta_{ik} = 1 - \delta_{Nk} \quad (6)$$

$$\frac{\partial p_N}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k} \left( 1 - \sum_{i=1}^{N-1} p_i \right) = -\sum_{i=1}^{N-1} \delta_{ik} = -(1 - \delta_{Nk}) \quad (7)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4)-(7) βρίσκουμε:

$$\frac{\partial H'}{\partial p_k} = -\ln p_k + \ln p_N \quad (8)$$

Επομένως, ακρότατο έχουμε όταν  $p_k = p_N$ . Το ίδιο συμπέρασμα θα προκύψει όποια και να είναι η μεταβλητή ως προς την οποία βρίσκουμε την παράγωγο (4). Επομένως, λόγω της δέσμευσης (2), το ακρότατο εμφανίζεται όταν

$$p_1 = p_2 = \dots = p_N = 1/N \quad (9)$$

Επειδή η συνάρτηση  $H'$  είναι κοίλη το ακρότατό της είναι μέγιστο και επομένως η τιμή

$$-\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \Big|_{p_i=1/N \forall i} = \log_2 N \quad (10)$$

είναι η μέγιστη δυνατή τιμή της εντροπίας Shannon.

**IV.3** Έστω η συλλογή  $Q = \{|1/2_z\rangle, |-1/2_x\rangle; 1/2, 1/2\}$ . Να βρείτε τη διεύθυνση στην οποία εάν μετρήσετε την προβολή του σπιν θα καταλήξετε σε μια κλασική η οποία έχει την μικρότερη δυνατή εντροπία.

**Απάντηση.**

Έστω ότι διαλέγουμε να μετρήσουμε στην διεύθυνση

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad 0 < \theta \leq \pi, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi \quad (1)$$

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων θα είναι  $\pm \hbar/2$ . Μετά από αυτές η κατάσταση του σωματιδίου που μας ενδιαφέρει θα είναι κάποια από τις ιδιοκαταστάσεις του  $\hat{S} \cdot \vec{n} \equiv \hat{S}_n$ :

$$|1/2_n\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}, \quad |-1/2_n\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Η πιθανότητα εμφάνισης κάθε μιας από τις ιδιοτιμές του  $\hat{S}_n$  είναι:

$$\begin{aligned} \text{Pr}_n(1/2) &= \langle 1/2_n | \hat{\rho} | 1/2_n \rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} \cos \theta/2 & e^{-i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{-i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\cos \theta + \cos \varphi \sin \theta) \equiv q_+(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3)$$

και

$$\begin{aligned} \Pr_n(-1/2) &= \langle -1/2_n | \hat{\rho} | -1/2_n \rangle = \frac{1}{4} \left( -e^{i\varphi/2} \sin \theta / 2 \quad e^{-i\varphi/2} \cos \theta / 2 \right) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \theta / 2 \\ e^{i\varphi/2} \cos \theta / 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (\cos \theta + \cos \varphi \sin \theta) \equiv q_-(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (4)$$

Επομένως, μετά τη μέτρηση θα καταλήξουμε με τη συλλογή:

$$X = \{ |1/2_n\rangle, |-1/2_n\rangle | q_+(\theta, \varphi), q_-(\theta, \varphi) \} \quad (5)$$

Στη συλλογή αυτή τα ενδεχόμενα είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα και, επομένως, έχει νόημα η εντροπία Shannon:

$$H(\theta, \varphi) = -q_+(\theta, \varphi) \log_2 q_+(\theta, \varphi) - q_-(\theta, \varphi) \log_2 q_-(\theta, \varphi) \quad (6)$$

Για να βρούμε τα ακρότατα χρειαζόμαστε τις παραγώγους:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} H &= -\frac{\partial q_+}{\partial \theta} \log_2 \left( \frac{q_+}{q_-} \right) = \frac{1}{4} (\sin \theta - \cos \varphi \cos \theta) \log_2 \left( \frac{q_+}{q_-} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} H &= -\frac{\partial q_+}{\partial \varphi} \log_2 \left( \frac{q_+}{q_-} \right) = \frac{1}{4} \sin \theta \sin \varphi \log_2 \left( \frac{q_+}{q_-} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Μηδενισμό έχουμε όταν

$$\theta = 0, \varphi = \pi/2 \rightarrow q_+ = 3/4, q_- = 1/4 \quad (8)$$

Αυτή είναι η περίπτωση την οποία εξετάσαμε στο κυρίως κείμενο και αφορά μέτρηση στη διεύθυνση του άξονα  $x$ . Μηδενισμό έχουμε και όταν

$$q_+ = q_- = 1/2 \rightarrow \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta = 0 \quad (9)$$

Στην περίπτωση αυτή εντάσσεται και η μέτρηση στη διεύθυνση του άξονα  $y$  την οποία εξετάσαμε στο κυρίως κείμενο. Μηδενισμό έχουμε επίσης στο σημείο:

$$\varphi = 0, \theta = \pi/4 \rightarrow q_+ = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \cos^2(\pi/8), q_- = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sin^2(\pi/8) \quad (10)$$

Από τις περιπτώσεις αυτές μόνο η τελευταία αντιστοιχεί σε ελάχιστο αφού μόνο σ' αυτήν ισχύει ότι:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} < 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} < 0 \quad (11)$$

Επομένως η διεύθυνση

$$\vec{n} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (12)$$

στην οποία εάν μετρήσουμε την προβολή του σπιν θα καταλήξουμε σε μια κλασική συλλογή

$$X = \left\{ \left( \begin{array}{c} \cos \pi/8 \\ \sin \pi/8 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -\sin \pi/8 \\ \cos \pi/8 \end{array} \right) \mid \cos^2(\pi/8), \sin^2(\pi/8) \right\} \quad (13)$$

η εντροπία της οποίας

$$H(X) = -\cos^2(\pi/8) \log_2 \cos^2(\pi/8) - \sin^2(\pi/8) \log_2 \sin^2(\pi/8) \approx 0.6 \quad (14)$$

είναι η ελάχιστη δυνατή.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι οι ιδιοκαταστάσεις και οι ιδιοτιμές της μήτρας πυκνότητας η οποία αντιπροσωπεύει την αρχική κβαντική συλλογή

$$\hat{\rho} \doteq \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

είναι:

$$\begin{aligned} |q_+\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \pi/8 \\ \sin \pi/8 \end{pmatrix}, \quad q_+ = \cos^2(\pi/8) \\ |q_-\rangle &= \begin{pmatrix} -\sin \pi/8 \\ \cos \pi/8 \end{pmatrix}, \quad q_- = \sin^2(\pi/8) \end{aligned} \quad (16)$$

Επομένως, η συλλογή (12) έχει προκύψει από την μέτρηση του φυσικού μεγέθους το οποίο αντιπροσωπεύεται από τον τελεστή πυκνότητας της κβαντικής συλλογής. Το συμπέρασμα αυτό είναι γενικεύσιμο σε οποιοδήποτε σύστημα όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε στην άσκηση IV.6.

**IV.4** Έστω ότι έχετε στη διάθεσή σας έναν (πολύ μεγάλο) αριθμό σωματιδίων με σπιν 1/2. Μετράτε την προβολή του σπιν στη διεύθυνση  $z$  και βρίσκετε, για ένα ποσοστό  $q$  από αυτά, την τιμή  $+\hbar/2$ . Στα υπόλοιπα σωματλια μετράτε την προβολή του σπιν στον άξονα  $x$ , κρατάτε αυτά για τα οποία το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι  $+\hbar/2$  και απορρίπτετε τα υπόλοιπα.

(α) Να βρείτε τη συλλογή καταστάσεων που έχετε στη διάθεσή σας.

(β) Να βρείτε τη διεύθυνση στην οποία πρέπει να μετρήσετε το σπιν ώστε να καταλήξετε σε συλλογή με τη μικρότερη δυνατή εντροπία.

**Υπόδειξη.** Να συνδυάσετε τις ασκήσεις (II.7) και (IV.3)

**IV.5** Έστω η κβαντική συλλογή  $\mathcal{Q} = \{|1/2_z\rangle, |-1/2_x\rangle; 1/2, 1/2\}$

η οποία αντιπροσωπεύεται από κάποια μήτρα πυκνότητας  $\hat{\rho} \doteq \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Με τυχαίο

τρόπο επιλέγετε τρεις από τις καταστάσεις που την απαρτίζουν. Στη συνέχεια κάνετε μια υπόθεση για το ποια μπορεί να είναι αυτή. Ποια είναι η υπόθεση με την καλύτερη δυνατή πιστότητα (fidelity);

**Απάντηση.**

Έστω ότι κάνετε την υπόθεση ότι η κατάσταση που επιλέξατε είναι η  $|\psi\rangle$ . Η fidelity της υπόθεσης είναι

$$F = \langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle \quad (1)$$

Οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή πυκνότητας αποτελούν βάση στον χώρο Hilbert της κατάστασης  $|\psi\rangle$  και επομένως:

$$\hat{\rho} |q_i\rangle = q_i |q_i\rangle \rightarrow |\psi\rangle = \sum_i c_i |q_i\rangle \quad (2)$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία βρίσκουμε:

$$F = \sum_i |c_i|^2 q_i \quad (3)$$

Όλες οι ιδιοτιμές της μήτρας πυκνότητας είναι θετικοί αριθμοί. Ας πούμε ότι η μεγαλύτερη από αυτές (ή κάποια από τις μεγαλύτερες αν υπάρχει εκφυλισμός) είναι η  $q_{\max}$ . Επομένως:

$$F \leq q_{\max} \sum_i |c_i|^2 = q_{\max} \quad (4)$$

Έτσι, η καλύτερη δυνατή υπόθεση είναι ότι η κατάσταση που επιλέξαμε είναι η ιδιοκατάσταση του τελεστή πυκνότητας με τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η κλασική συλλογή η οποία παράγεται από τις ιδιοκαταστάσεις της μήτρας πυκνότητας είναι η περισσότερο τακτοποιημένη και το ποσοστό συμμετοχής κάθε ιδιοκατάστασης είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή.

**IV.6** Έστω ότι στην κατάσταση  $\hat{\rho}$  μετράμε το φυσικό μέγεθος  $\hat{A} = \sum_j \alpha_j |\alpha_j\rangle \langle \alpha_j|$ . Η

πιθανότητα εμφάνισης καθενός από τα δυνατά αποτελέσματα είναι  $p(\alpha_j) = \langle \alpha_j | \hat{\rho} | \alpha_j \rangle$ .

Δείξτε ότι η εντροπία Shannon της κλασικής συλλογής  $\mathcal{Q}_A = \{\alpha_j, p(\alpha_j)\}$  ικανοποιεί την ανισότητα  $H(\mathcal{Q}_A) \geq E(\hat{\rho})$ .

**Απάντηση.** Η εντροπία Shannon της συλλογής  $\mathcal{Q}_A$  είναι:

$$H(\mathcal{Q}_A) = -\sum_j p(a_j) \log_2 p(a_j) \quad (1)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε τις  $\hat{\rho}|q_\mu\rangle = q_\mu|q_\mu\rangle$  μπορούμε να γράψουμε

$$p(a_j) = \sum_\mu \langle a_j | \hat{\rho} | q_\mu \rangle \langle q_\mu | a_j \rangle = \sum_\mu q_\mu \left| \langle q_\mu | a_j \rangle \right|^2 \equiv \sum_\mu q_\mu A_{\mu j} \quad (2)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_\mu A_{\mu j} &= \sum_\mu \langle a_j | q_\mu \rangle \langle q_\mu | a_j \rangle = \langle a_j | a_j \rangle = 1 \\ \sum_j A_{\mu j} &= \sum_j \langle q_\mu | a_j \rangle \langle a_j | q_\mu \rangle = \langle q_\mu | q_\mu \rangle = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Επομένως:

$$H(\mathcal{Q}_A) = -\sum_j \left( \sum_\mu q_\mu A_{\mu j} \right) \log_2 \left( \sum_\mu q_\mu A_{\mu j} \right) \quad (4)$$

Η συνάρτηση  $f(z) = -z \log_2 z$  είναι κοίλη. Αυτό σημαίνει ότι

$$f(px + (1-p)y) \geq pf(x) + (1-p)f(y) \quad (5)$$

Επομένως:

$$H(\mathcal{Q}_A) = -\sum_j \left( \sum_\mu q_\mu A_{\mu j} \right) \log_2 \left( \sum_\mu q_\mu A_{\mu j} \right) \geq -\sum_j \left\{ \sum_\mu A_{\mu j} q_\mu \log_2 q_\mu \right\} = -\sum_\mu q_\mu \log_2 q_\mu = H(\mathcal{Q}_\rho) \quad (6)$$

Επομένως, αποδείξαμε τελείως γενικά το ζητούμενο:

$$H(\mathcal{Q}_A) \geq E(\hat{\rho}) \quad (7)$$

**IV. 7** Έστω συλλογή η οποία συγκροτείται από καταστάσεις οι οποίες δεν είναι, κατ' ανάγκη, ορθογώνιες μεταξύ τους:

$$\mathcal{Q} = \left\{ |\varphi_i\rangle, i=1, \dots, N \mid \Pr(|\varphi_i\rangle) = p_i; \sum_{i=1}^N p_i = 1 \right\}$$

Να δείξετε ότι

$$E(\hat{\rho}) \geq -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i$$



## Απάντηση

Η μήτρα πυκνότητας της συλλογής  $\mathcal{Q}$  είναι:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad (1)$$

Είναι προφανές ότι εάν οι καταστάσεις είναι ορθογώνιες μεταξύ τους θα ήταν ιδιοκαταστάσεις της μήτρας πυκνότητας και επομένως η σχέση που πρέπει να αποδείξουμε ισχύει με προφανή τρόπο για την ισότητα.

Για να την αποδείξουμε στη γενική περίπτωση θα στηριχθούμε στο γεγονός ότι την κατάσταση (1) μπορούμε να την πάρουμε, μέσω του κατάλληλου μερικού ίχνους, από μια διμερή καθαρή κατάσταση (δες Εξ. (II.69) στο εδάφιο όπου αναλύεται η purification):

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^N \sqrt{p_i} |\varphi_{i,A}\rangle |e_{i,B}\rangle \quad (2)$$

Η κατάσταση (2) είναι μια καθαρή διμερής κατάσταση η οποία ορίζεται σε χώρο Hilbert  $H_{AB}$ . Οι καταστάσεις οι οποίες εμφανίζονται στην (1) θεωρούμε ότι ανήκουν στο υποσύστημα A. Οι καταστάσεις  $|e_{i,B}\rangle$  είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο καταστάσεων (όχι κατ' ανάγκη πλήρες). Η κατάσταση του υποσυστήματος A δίνεται από την (1):

$$\hat{\rho}_A^R = Tr_B |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \sum_{i=1}^N p_i |\varphi_{i,A}\rangle\langle\varphi_{i,A}| \quad (3)$$

Αντίστοιχα, κατάσταση του υποσυστήματος B δίνεται από την

$$\hat{\rho}_B^R = Tr_A |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \sum_{i=1}^N p_i |e_{i,B}\rangle\langle e_{i,B}| \quad (4)$$

Παραπέμπουμε στην Άσκηση II.10 και στην ανάλυση Schmidt όπου αποδεικνύεται ότι οι μήτρες πυκνότητας (3) και (4) έχουν τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές. Αυτό σημαίνει ότι η εντροπία von Neumann των δύο υποσυστημάτων τα οποία απαρτίζουν μια διμερή καθαρή κατάσταση, ταυτίζονται:

$$E(\hat{\rho}_A^R) = E(\hat{\rho}_B^R) \quad (5)$$

Η συλλογή η οποία εκπροσωπείται από την (4)

$$X = \{|e_{i,B}\rangle, p_i \mid i = 1, \dots, N\} \quad (6)$$

είναι κλασική αφού τα ενδεχόμενα  $|e_{i,B}\rangle$  είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα. Η εντροπία Shannon της (6) είναι:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \quad (7)$$

Όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη άσκηση

$$E(\hat{\rho}_B^R) \leq H(X) \quad (8)$$

Συνδυάζοντας τις (5) και (8) προκύπτει αμέσως το ζητούμενο.

#### IV.8 Σχετική Εντροπία.

Η σχετική εντροπία δύο καταστάσεων ορίζεται ως:

$$D(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) \equiv Tr(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}) - Tr(\hat{\rho} \log_2 \hat{\sigma}) = Tr(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho} / \hat{\sigma})$$

Να αποδειχθεί ότι  $D(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) \geq 0$ .

#### Απάντηση.

Η σχετική εντροπία είναι ένα μέτρο της διαφοράς ανάμεσα σε δύο καταστάσεις χωρίς, όμως, να έχει τις μαθηματικές ιδιότητες του μέτρου αφού δεν είναι συμμετρική ως προς την εναλλαγή των  $\hat{\rho}$  και  $\hat{\sigma}$ . Μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρο της πληροφορίας η οποία χάνεται όταν ένα σύστημα το οποίο, ενώ βρίσκεται στην κατάσταση  $\hat{\rho}$ , περιγράφεται από την κατάσταση  $\hat{\sigma}$ .

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιοκαταστάσεις και τις ιδιοτιμές των δύο μητρών πυκνότητας

$$\hat{\rho} |q_i\rangle = q_i |q_i\rangle, \quad \hat{\sigma} |s_j\rangle = s_j |s_j\rangle \quad (1)$$

και θα γράψουμε

$$D(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) = \sum_i q_i \log_2 q_i - \sum_i q_i \langle q_i | \log_2 \hat{\sigma} | q_i \rangle \quad (2)$$

Για τον τελευταίο όρο βρίσκουμε:

$$\langle q_i | \log_2 \hat{\sigma} | q_i \rangle = \sum_j \langle q_i | s_j \rangle \langle s_j | \log_2 \hat{\sigma} | q_i \rangle = \sum_j (\log_2 s_j) |\langle s_j | q_i \rangle|^2 \equiv \sum_j (\log_2 s_j) A_{ji} \quad (3)$$

Στην τελευταία γράψαμε  $A_{ji} = |\langle s_j | q_i \rangle|^2$ . Προφανώς ισχύει ότι:

$$\sum_j A_{ji} = \sum_j \langle q_i | s_j \rangle \langle s_j | q_i \rangle = \langle q_i | q_i \rangle = 1, \quad \sum_i A_{ji} = \sum_i \langle s_j | q_i \rangle \langle q_i | s_j \rangle = \langle s_j | s_j \rangle = 1 \quad (4)$$

Συνδυάζοντας τις (2) και (3) βρίσκουμε:

$$D(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) = \sum_i q_i \left( \log_2 q_i - \sum_j A_{ji} \log_2 s_j \right) \quad (5)$$

Η συνάρτηση  $f(x) = \log x$  είναι κοίλη συνάρτηση και επομένως:

$$\sum_j A_{ji} \log_2 s_j \leq \log_2 \left( \sum_j A_{ji} s_j \right) \quad (6)$$

Επομένως:

$$D(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) \geq \sum_i q_i \left( \log_2 q_i - \log_2 \left( \sum_j A_{ji} s_j \right) \right) = \sum_i q_i \log_2 \frac{q_i}{v_i}, \quad v_i = \sum_j A_{ji} s_j \quad (7)$$

Υπάρχει μια γνωστή ανισότητα (η οποία μπορεί να επαληθευθεί άμεσα) η οποία βεβαιώνει ότι  $\ln x \leq x - 1 \quad \forall x > 0$ . Αν την εφαρμόσουμε για το αποτέλεσμα (7) θα βρούμε:

$$D(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) \geq -\frac{1}{\ln 2} \sum_i q_i \log_2 \frac{v_i}{q_i} \geq -\frac{1}{\ln 2} \sum_i q_i \left( \frac{v_i}{q_i} - 1 \right) = -\frac{1}{\ln 2} \sum_i (v_i - q_i) \quad (8)$$

Μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι:

$$\sum_i v_i = \sum_j \left( \sum_i A_{ji} \right) s_j = \sum_j s_j = \text{Tr} \hat{\sigma} = 1, \quad \sum_i q_i = \text{Tr} \hat{\rho} = 1 \quad (9)$$

Έτσι, καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$D(\hat{\rho} \parallel \hat{\sigma}) \geq 0 \quad (10)$$

**IV.9** Να αποδειχθεί η υπο-αθροιστικότητα της εντροπίας:

$$E(\hat{\rho}_{AB}) \leq E(\hat{\rho}_A) + E(\hat{\rho}_B)$$

**Απόδειξη.** Για την απόδειξη της ανισότητας θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης εφαρμόζοντας το για την περίπτωση  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{AB}$ ,  $\hat{\sigma} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$ :

$$\begin{aligned} D(\hat{\rho}_{AB} \parallel \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) &= \text{Tr}_{AB} (\hat{\rho}_{AB} \log_2 \hat{\rho}_{AB}) - \text{Tr}_{AB} (\hat{\rho}_{AB} \log_2 \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) = \\ &= -E(\hat{\rho}_{AB}) - \text{Tr}_{AB} (\hat{\rho}_{AB} \log_2 \hat{\rho}_A) - \text{Tr}_{AB} (\hat{\rho}_{AB} \log_2 \hat{\rho}_B) = \\ &= -E(\hat{\rho}_{AB}) - \text{Tr}_A (\hat{\rho}_A \log_2 \hat{\rho}_A) - \text{Tr}_B (\hat{\rho}_B \log_2 \hat{\rho}_B) = \\ &= -E(\hat{\rho}_{AB}) + E(\hat{\rho}_A) + E(\hat{\rho}_B) \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

**IV.10** Να αποδειχθεί η ισχυρή υπο-αθροιστικότητα της εντροπίας von Neumann:

$$E(\hat{\rho}_{AB}) \geq |E(\hat{\rho}_A) - E(\hat{\rho}_B)|$$

### Απόδειξη.

Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας τις ιδιοκαταστάσεις της σύνθετης μήτρας πυκνότητας:

$$\hat{\rho}_{AB} |i_{AB}\rangle = \lambda_i |i_{AB}\rangle \rightarrow \hat{\rho}_{AB} = \sum_{i=1}^{D_{AB}} \lambda_i |i_{AB}\rangle \langle i_{AB}|, \quad D_{AB} = \dim(H_{AB}) \quad (1)$$

Έστω η τριμερής κατάσταση:

$$|\psi_{AB\Gamma}\rangle = \sum_{i=1}^{D_{AB}} \sqrt{\lambda_i} |i_{AB}\rangle |e_{i,\Gamma}\rangle \quad (2)$$

Στην τελευταία  $\{|e_{i,\Gamma}\rangle; i=1, \dots, D_{AB}\}$  είναι ένα σύνολο ορθοκανονικών ανυσμάτων του χώρου  $H_\Gamma$ ,  $\dim H_\Gamma \geq D_{AB}$  όχι, κατ' ανάγκη πλήρες.

Είναι προφανές ότι

$$\hat{\rho}_{AB} = Tr_\Gamma |\psi_{AB\Gamma}\rangle \langle \psi_{AB\Gamma}| = Tr_\Gamma \hat{\rho}_{AB\Gamma} \quad (3)$$

Μπορούμε τώρα να σκεφθούμε ότι χωρίζουμε το τριμερές σύστημα  $AB\Gamma$  σε δύο μέρη,

$AB\Gamma = (AB)\Gamma$  και να διαβάσουμε την (2) ως διμερή κατάσταση. Έτσι, μπορούμε να εφαρμόσουμε τα συμπεράσματα από την ανάλυση Schmidt και να γράψουμε:

$$E(\hat{\rho}_{AB}) = E(\hat{\rho}_\Gamma) \quad (4)$$

Εάν κάνουμε τον διαχωρισμό  $AB\Gamma = A(B\Gamma)$  μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα :

$$E(\hat{\rho}_A) = E(\hat{\rho}_{B\Gamma}) \quad (5)$$

Λόγω της υπο-αθροιστικότητας ισχύει ότι:

$$E(\hat{\rho}_{B\Gamma}) \leq E(\hat{\rho}_B) + E(\hat{\rho}_\Gamma) \quad (6)$$

Συνδυάζοντας τις (4), (5) και (6) βρίσκουμε:

$$E(\hat{\rho}_A) \leq E(\hat{\rho}_B) + E(\hat{\rho}_{AB}) \rightarrow E(\hat{\rho}_{AB}) \geq E(\hat{\rho}_A) - E(\hat{\rho}_B) \quad (7)$$

Είναι προφανές ότι η τελευταία έχει κάποια σημασία μόνο εάν  $E(\hat{\rho}_A) \geq E(\hat{\rho}_B)$ . Εάν δεν είναι έτσι αντί του διαχωρισμού  $AB\Gamma = (AB)\Gamma$  θα κάνουμε τον διαχωρισμό  $AB\Gamma = (A\Gamma)B$  για να συμπεράνουμε ότι

$$E(\hat{\rho}_B) = E(\hat{\rho}_{A\Gamma}) \leq E(\hat{\rho}_A) + E(\hat{\rho}_\Gamma) = E(\hat{\rho}_A) + E(\hat{\rho}_{AB}) \quad (8)$$

Με τον τρόπο αυτόν θα καταλήξουμε στην

$$E(\hat{\rho}_{AB}) \geq E(\hat{\rho}_B) - E(\hat{\rho}_A) \quad (9)$$

Ο συνδυασμός των (7) και (9) μας οδηγεί στο ζητούμενο

$$E(\hat{\rho}_{AB}) \geq |E(\hat{\rho}_A) - E(\hat{\rho}_B)| \quad (10)$$

## **ΑΝΑΦΟΡΕΣ**

- 1.** A. Peres: “Quantum Theory. Concepts and Methods”  
Kluwer Academic Publishers.
- 2.** J.J. Sakurai and J. Napolitano: “Modern Quantum Mechanics” ,  
Cambridge Univ. Press.
- 3.** S. Gasiorowitz: “Quantum Physics”  
John Willey and Sons.
- 4.** D.J. Griffiths: “Introduction to Quantum Mechanics”  
Prentice Hall Publications.
- 5.** L.D. Landau and E.M. Lifshitz: “Quantum Mechanics”  
Pergamon Press.
- 6.** W. Wootters and W. Zurek: “A single quantum cannot be cloned”  
Nature 299 (5886) 1982
- 7.** K. Kraus: “States, effects and operations: Fundamental notions of quantum theory”  
Lectures in Mathematical Physics at Texas Univ., vol. 190, Springer-Verlag.
- 8.** A.K. Pati and S.L. Braunstein: “Impossibility of deleting an unknown quantum state”  
Nature 404 (802) 2000.
- 9.** J. Preskill: “Lecture notes on quantum information”  
California Institute of Technology.
- 10.** M.A. Nielsen: “Quantum Information Theory”  
arXiv: quant-ph/0011036v1, 2000
- 11.** M. A. Nielsen and I.L. Chuang: “Quantum Computation and Quantum Information”  
Cambridge University Press.
- 12.** J. Audretsch: “Entangled Systems”  
Willey-VCH Publications.
- 13.** M.M. Wilde: “Quantum Information Theory”  
Cambridge University Press.
- 14.** H-P. Breuer and F. Petruccione: “The theory of open quantum systems”  
Oxford University Press.

15. L.P. Hughston, R. Jozsa, W.K. Wothers, Phys. Letters A183 (1), 2000.
16. G. Lindblad: "On the generators of quantum dynamical semigroups"  
Comm. Phys. 48(2),119, 1976.
17. V. Gorini, A. Kossakowski, E.C.G Sudarshan "Completely positive dynamical semigroups of N-level systems" J. Math. Phys. 17(5), 821, 1976.
18. S.L. Braunstein, A.K. Pati, PRL 98 (8) 2007.

