7.6 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Γενικευμένα ολοκληρώματα ονομάζουμε αυτά που:

- Είτε η συνάρτηση κάτω από το ολοκλήρωμα δεν είναι φραγμένη ή
- το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι φραγμένο.

Εξετάζουμε τις δύο πιο σημαντικές περιπτώσεις.

1. Έστω $f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ με $b\in\mathbb{R}$ ή $b=\infty$ και η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,x]$ $\forall\, a<x<b$. Αν το $\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b)$ και

$$\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt.$$

Αν το όριο απειλίνει στο $\pm\infty$, λέμε ότι το $\int_a^b f(t)dt$ απειλίνει στο $\pm\infty$.

Εντελώς ανάλογα, αν $f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ με $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$ και η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[x,b]$ $\forall\, a<x<b$, τότε

$$\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt,$$

εφόσον το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Αν τό όριο απειλίνει στο $\pm\infty$, λέμε ότι το $\int_a^b f(t)dt$ απειλίνει στο $\pm\infty$.

Παραδείγματα: (α) Έστω $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$.
Θέλουμε να εξετάσουμε το $\int_1^\infty f(x)dx$.
Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann (ο.κ.R.) στο $[1,x]$, $1<x<\infty$, και

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x - \ln 1 = \ln x.$$

Δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to\infty}\ln x = \infty,$$

έπεται ότι

$$\int_1^\infty f(x)dx = \infty,$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα αποκλίνει στο ∞.

(β) Έστω $f:[1,\infty]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Θέλουμε να εξετάσουμε το $\int_1^\infty f(x)dx$.
Η f είναι ο.κ.R. στο $[1,x]$, $1<x<\infty$, και

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{x}+\frac{1}{1} = 1-\frac{1}{x}.$$

Δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1,$$

έπεται ότι

$$\int_1^\infty f(x)dx = 1.$$

(γ) Έστω $f:(1,2]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$. Θέλουμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του $\int_1^2 f(x)dx$.
Η f είναι ο.κ.R. στο $[x,2]$, $1<x<2$, και

$$\int_x^2 \frac{1}{(t-1)^2}dt = \dots = \frac{1}{x-1}-1$$

(χρειάζεται μια αντικατάσταση?). Δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to1^+}\int_x^2 \frac{1}{(t-1)^2}dt = \dots = \infty,$$

έπεται ότι

$$\int_1^2 f(x)dx = \infty.$$

2. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ με $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$ και $b\in\mathbb{R}$ ή $b=\infty$ και η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[x_1,x_2]$ $\forall\, a<x_1<x_2<b$. Παίρνουμε τυχαίο $c\in(a,b)$ και εξετάζουμε τα $\int_a^c f(x)dx$ και $\int_c^b f(x)dx$ σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε στο 1.. Αν και τα δύο αυτά ολοκληρώματα υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, λέμε ότι το $\int_a^b f(x)dx$ υπάρχει και

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Παρατηρήστε ότι δεν έχει σημασία ποιό είναι το c.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Θέλουμε να εξετάσουμε το $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Παίρνουμε $c=0$ και εξετάζουμε τα ολοκληρώματα $\int_x^0 f(t)dt$ και $\int_0^x f(t)dt$. Θέτουμε $u=t^2+1\Rightarrow du=2tdt\Rightarrow tdt=\frac{du}{2}$

$$\int_x^0 f(t)dt=\int_x^0\frac{t}{t^2+1}dt=\ldots=-\frac{1}{2}\ln(x^2+1),$$

συνεπώς,

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^0\frac{t}{t^2+1}dt=\ldots=-\infty.$$

Επίσης,

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\frac{t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\ln(x^2+1),$$

οπότε,

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{t}{t^2+1}dt=\ldots=\infty.$$

Επομένως, το $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ είναι $(-\infty)+\infty$, απροσδιόριστη μορφή, συνεπώς, το ολοκλήρωμα δεν υπάρχει.