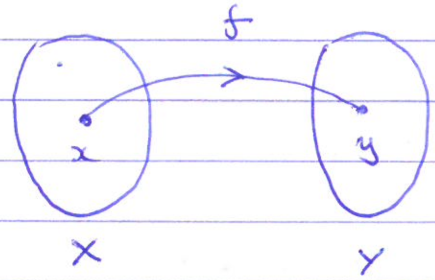
Συνέχεια καί όρια συναρτήσεων

1. Συναρτήσεις. (γενικά)

Ορισμός 1: Έστω X, Y δύο μή κενά σύνολα. Τότε συνάρτηση $f: X \to Y$ είναι "κανόνας" πού "απεικονίζει" (αντιστοιχεί) κάθε $x \in X$ σέ κάποιο (μοναδικό) $y \in Y$. Γράφουμε $y = f(x)$.



Λέμε ότι τό σύνολο X είναι τό πεδίο ορισμού της f καί τό σύνολο $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ τό σύνολο τιμών ή η εικόνα του X [Σημείωση: Τό $f(X)$ μπορεί νά είναι γνήσιο υποσύνολο του Y].

Μπορούμε εναλλακτικά νά ορίσουμε την f από τό ~~γ~~ γράφημά της:

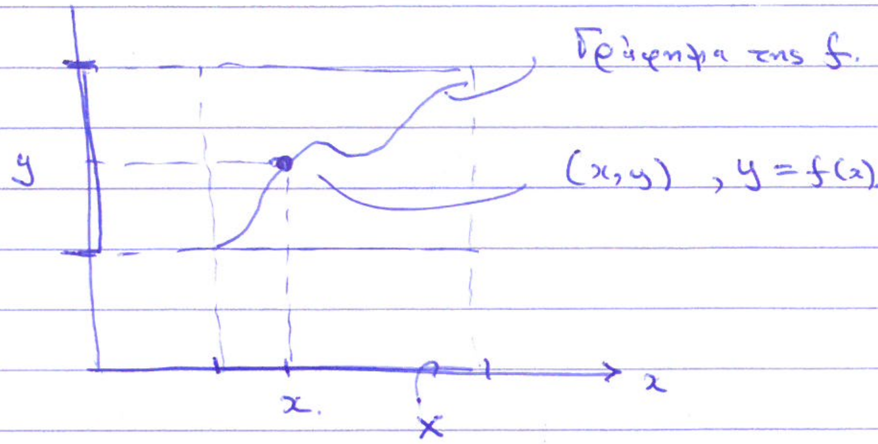
Ορισμός 2: Συνάρτηση ~~f είναι~~ $f: X \to Y$ είναι υποσύνολο του Καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$ ~~$(f \subseteq X \times Y)$~~ ~~μέ τις παρακάτω~~

$$f \subseteq X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$$

μέ τίς παρακάτω ιδιότητες:

(i) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in Y$ τ.ω. $(x,y) \in f$

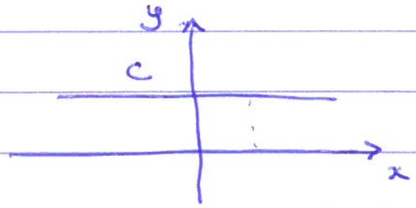
(ii) Αν $x \in X$, $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$ καί $(x,y_1) \in f$, $(x,y_2) \in f$ τότε $y_1 = y_2$.



Γράφημα της f: $\{(x, f(x)) : x \in X\}$.

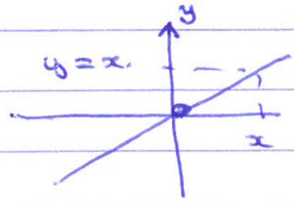
<u>Παράδειγμα</u>

(α) Έστω $f : X \to Y$ όπου $X = \mathbb{R}$ ~~και Y =~~ $Y = \mathbb{R}$
και $f(X) = \{c\}$, $c \in \mathbb{R}$.

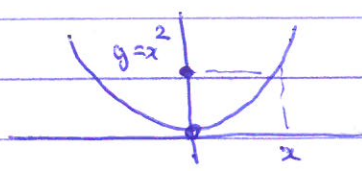


Η f είναι σταθερή συνάρτηση

(β). Έστω $f : X \to Y$, $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
Τότε $f(X) = \mathbb{R}$



(γ) Έστω $f : X \to Y$, $X = Y = \mathbb{R}$,
$f(x) = x^2$

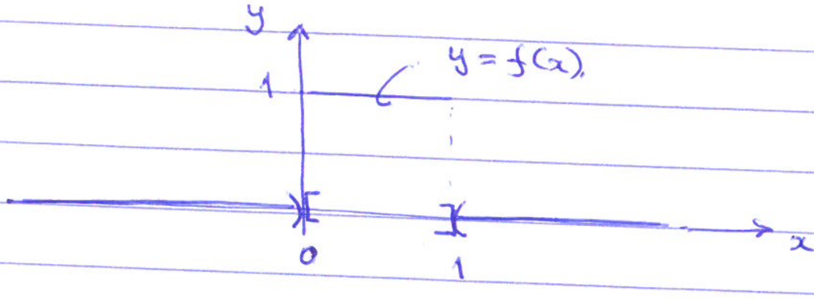


Τότε $f(X) = [0, \infty) \subseteq Y = \mathbb{R}$.

(δ) Έστω $f : X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ πού ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1. \\ 0, & x < 0,\ x > 1. \end{cases}$$

Τότε $X=\mathbb{R}$, ~~$Y=\{0,1\}$~~ $f(X)=\{0,1\}\subseteq\mathbb{R}$.

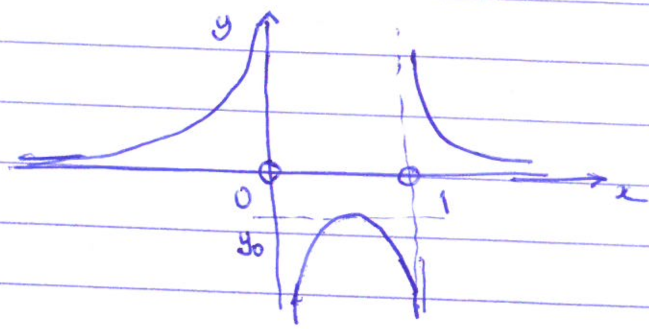


(ε) Έστω $X\subseteq\mathbb{R}$, $Y=\mathbb{R}$, $f:X\to Y$ όπου

$$f(x)=\frac{1}{x(x-1)}.$$

Τότε $X=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}^{*}=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$

$f(X)=(-\infty,y_0)\cup(0,\infty)$.

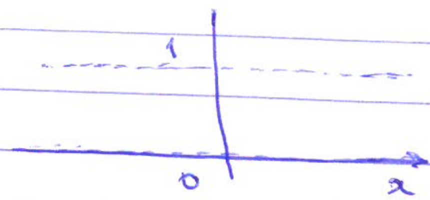


(*) Συμβολισμός:
$A\setminus B=\{x\in A,\ x\notin B\}$.

(στ) $X\subseteq\mathbb{R}$, $Y=\mathbb{R}$, $f:X\to Y$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x\in\mathbb{Q} \text{ (ρητός)}\\ 0 & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

Τότε $X=\mathbb{R}$, $f(X)=\{0,1\}$.



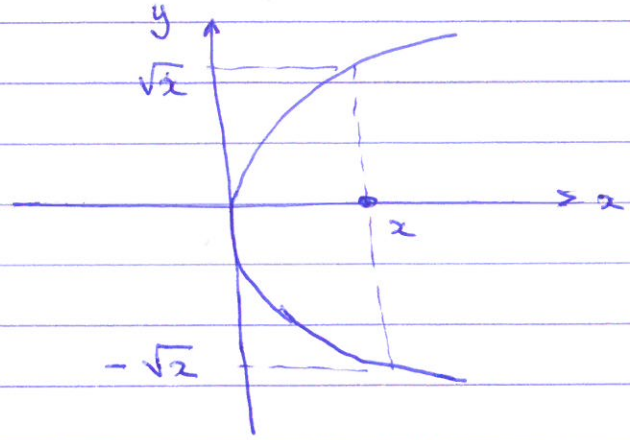
($\mathbb{Q}$ "πυκνό" στο $\mathbb{R}$)

(ζ) Η σχέση που ορίζεται από την εξίσωση $y^2=x$, δηλ.
$K=\{(y^2,y): y\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Δεν είναι συνάρτηση: $(1,1)\in K$ και $(1,-1)\in K$.

Έχουμε $x\geq 0$ και επομένως $y=\sqrt{x}$ και $y=-\sqrt{x}$.

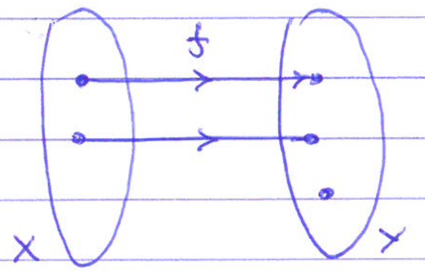
Τό γράφημα της "σχέσης" είναι



<u>Ορισμός</u>: Έστω $f: X \to Y$. Η f είναι "1-1" (ένα-προς-ένα) ~~αν~~ αν γιά κάθε $x_1, x_2 \in X$,
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. (δεν υπάρχουν δύο διαφορετικά "x" στο Π.Ο. που απεικονίζονται στο ίδιο "y").

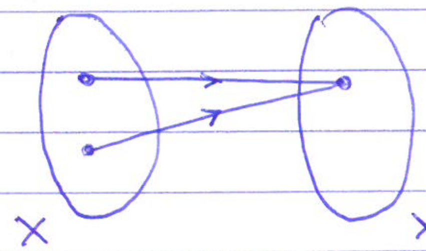
<u>Παράδειγμα.</u>

(i)



Η f είναι "1-1"

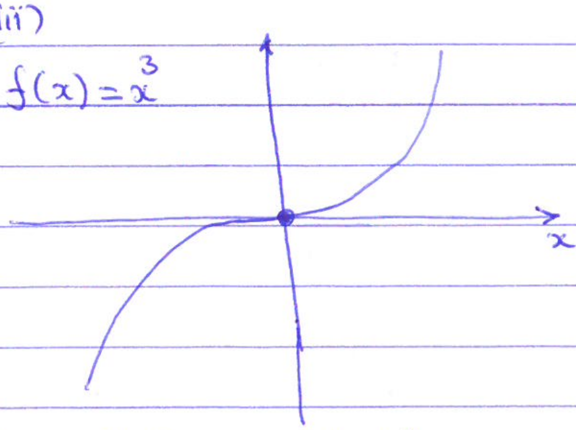
(ii)



Η f δεν είναι 1-1.

(iii)

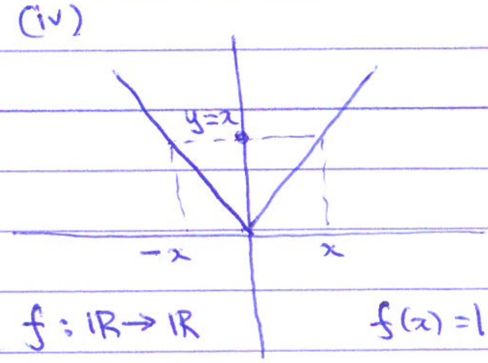
$f(x) = x^3$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$

Η f είναι "1-1"

(iv)



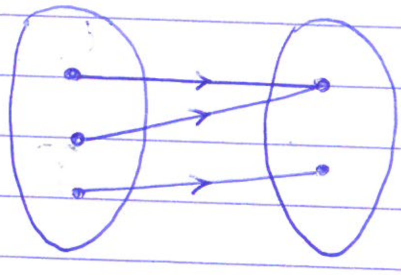
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = |x|$.

$f(x) = |x|$

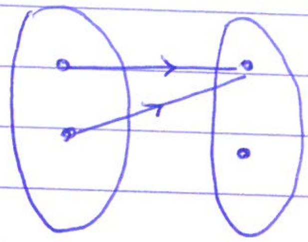
Η f <u>δεν</u> είναι "1-1"

Ορισμός: Έστω $f: X \to Y$. Η f ονομάζεται "επί" αν $f(X) = Y$ (για κάθε $y \in Y$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in X$ τ.ω. $f(x) = y$).

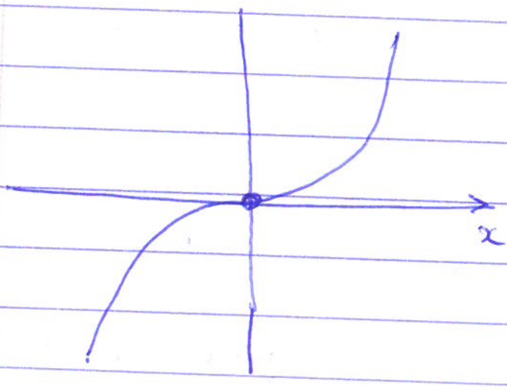
Παράδειγμα

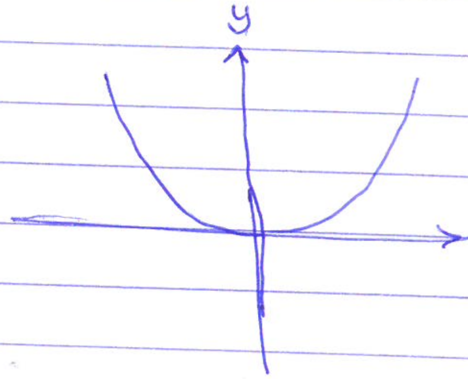


Η f είναι "επί"



Η f δεν είναι επί.





~~f(x)=x~~ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3$

είναι "επί"

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

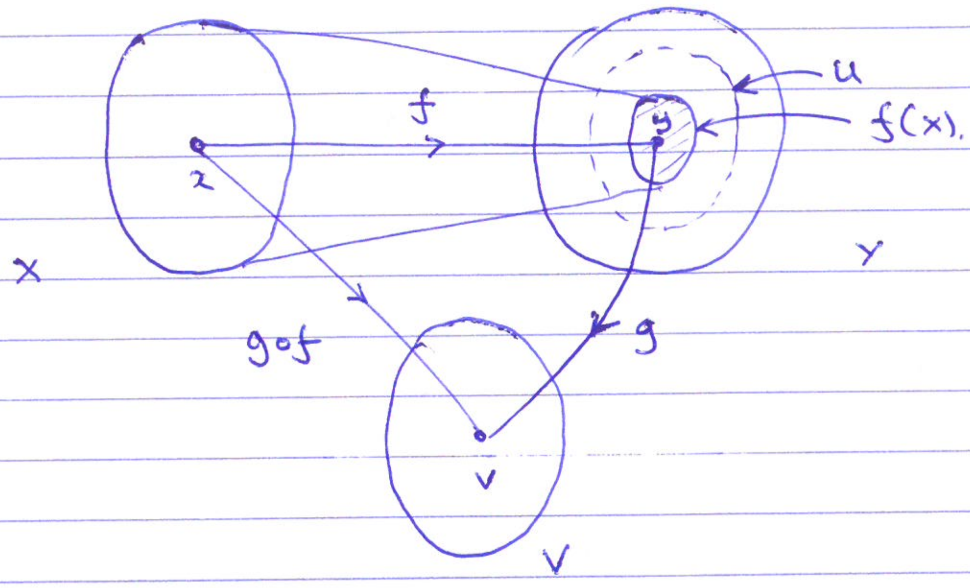
$f(x) = x^2$ δεν είναι επί

$f(\mathbb{R}) = [0, \infty) \neq \mathbb{R}$.

Θα μπορούσε η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ να γίνει "επί";

Ορισμός (Σύνθεση συναρτήσεων)

Έστω $f : X \to Y$ και $g : U \to V$ με $f(X) \subseteq U$.
Ορίζουμε την συνάρτηση $g \circ f : X \to V$ με τύπο
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



$$v = g(y) \;,\; y = f(x) \;,\; v = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

Ορισμός: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$

Ορίζουμε

(i) $f+g : A \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

(ii) $af : A \to \mathbb{R}$, $(af)(x) = a \cdot f(x)$ $(a \in \mathbb{R})$

(iii) $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

(iv) $f/g : A \to \mathbb{R}$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$
αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$.

(v) $f < g \overset{\text{ορσ}}{\iff} f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in A$

Επίσης:

<u>Ορισμός</u> Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

(i) $f \uparrow$ (αύξουσα) αν γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

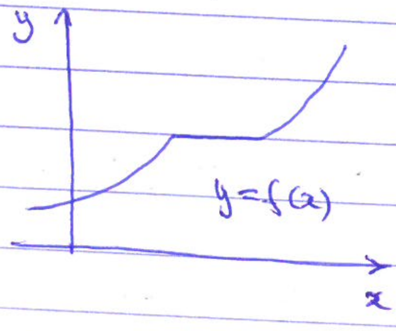
(ii) $f \Uparrow$ (γνησίως αύξουσα) αν γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(iii) $f \downarrow$ (φθίνουσα) αν γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

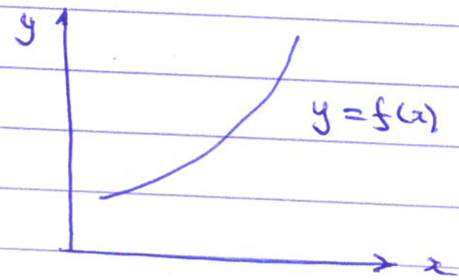
(iv) $f \Downarrow$ (γνησίως φθίνουσα) αν γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Αν ισχύει τό (i) η τό (iii) λέμε ότι η f είναι μονότονη.
Αν ισχύει το (ii) η το (iv) η f είναι γνησίως μονότονη.

<u>Παράδειγμα</u>:



f αύξουσα.



f γνησίως αύξουσα

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

(i) Η f είναι άνω φραγμένη $\overset{\text{ορσ}}{\iff} \exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \;\; \forall x \in A$

(ii) Η f κάτω φραγμένη $\overset{\text{ορσ}}{\iff} \exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m \;\; \forall x \in A$

(iii) Η f είναι φραγμένη αν είναι άνω καί κάτω φραγμένη

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι f φραγμένη $\iff \exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M$ γιά κάθε $x \in A$.

Ορισμός: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

Η f λέγεται "άρτια" αν $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ και $f(x) = f(-x)$.
Η f λέγεται "περιτή" αν $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.

Παράδειγμα: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ είναι άρτια
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$: είναι περιτή

Ασκηση: Δείξτε ότι αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και f περιτή τότε $f(0) = 0$.

Ορισμός (Αντίστροφη συνάρτηση).

Έστω $f: X \to Y$ "1-1". Η $\cancel{f}$ $f: X \to f(X)$ είναι "1-1" και "επί" και επομένως για κάθε $y \in f(X)$ υπάρχει μοναδικό $x \in X$ τ.ω. $y = f(x)$. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση:

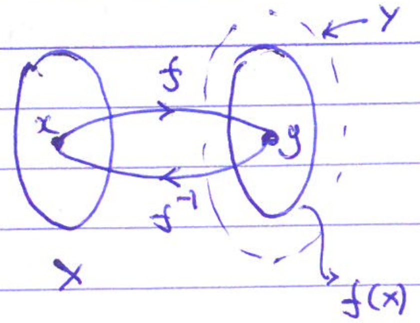
$$f^{-1}: f(X) \to X, \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Πρόταση: Έστω $f: X \to Y$ συνάρτηση "1-1". Η $f^{-1} \circ f: X \to X$ και $f \circ f^{-1}: f(X) \to f(X)$ είναι καλά ορισμένες και "ταυτοτικές" συναρτήσεις, δηλ

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X$$

και

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in f(X)$$



Παράδειγμα :

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-1$. Η f είναι "1-1" (καί "επί"). Έστω $y=2x^3-1$. Τότε

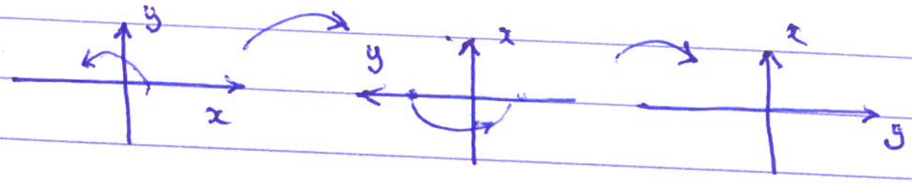
$$\frac{y+1}{2}=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}$$

Άρα $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}$, $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

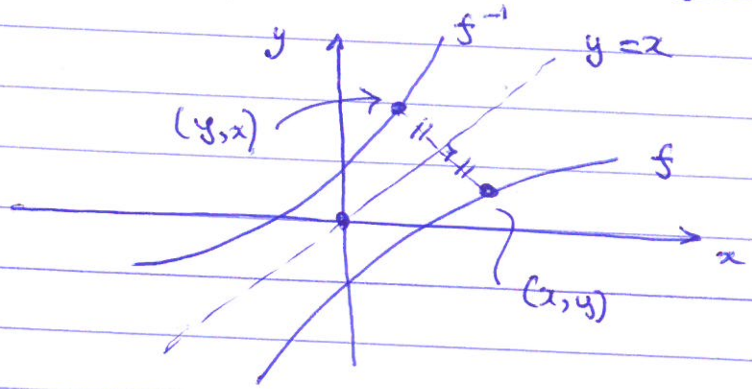
Παρατήρηση: (Γράφημα αντίστροφης συνάρτησης).

Τό γράφημα της f^{-1} κατασκευάζεται με δύο τρόπους

(1) ~~(1) Δεξιά~~ Αριστερή περιστροφή των αξόνων καί ανάκλαση ως προς τον κάθετο άξονα.



(2) Ανάκλαση ως πρός ~~τόν~~ την ευθεία $y=x$.



(Αν $f(x)=x$, τότε $f^{-1}(x)=x$)

2. Συνήθεις κατηγορίες συναρτήσεων

2.1 Ακολουθίες (a_n) είναι συναρτήσεις $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$f(n) = a_n$.

2.2 Πολυωνυμικές συναρτήσεις: $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}[x]$.
Της μορφής:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

οπου $a_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,..,n)$, $a_n \neq 0$. Ο βαθμός του πολυωνύμου ορίζεται ως $\partial p = n$. (αν $n=0$ και $a_0=0$ τότε ο βαθμός δεν ορίζεται). Το πολυώνυμο $p(x)$ έχει το πολύ n διακεκριμένες ρίζες.

2.3 Ρητές συναρτήσεις: $f: A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{οπου } p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$$

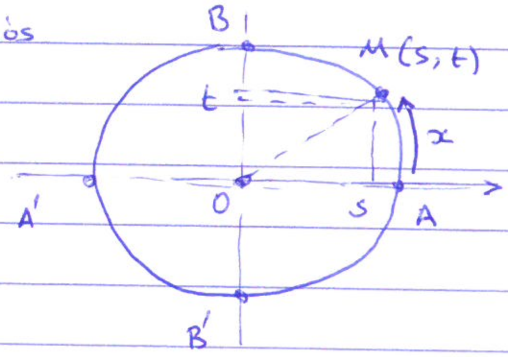
και $A = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

2.4. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Προκαταρκτικός ορισμός

Ορίζουμε αρχικά τον τριγωνομετρικό κύκλο (κέντρο η αρχή των αξόνων, ακτίνα ενα) όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τριγωνομετρικός κύκλος.



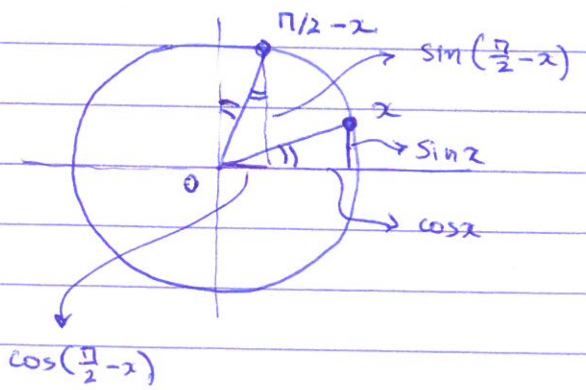
Τά σημεία έχουν συντεταγμένες $A(1,0)$, $A'(-1,0)$, $B(0,1)$, $B'(0,-1)$. Τό μήκος του μισού κύκλου (ABA') ~~έχει μήκος~~ είναι π. Κινούμαστε αριστερόστροφα στήν περιφέρεια του κύκλου μέ αρχή τό σημείο A. Σέ κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί σημείο του κύκλου (s,t), όπου x τό μήκος του τόξου γιά αριστερόστροφη κίνηση καί $-x$ γιά δεξιόστροφη. Έχουμε $x=0 \to A$, $x=\frac{\pi}{2} \to B$, $x=\pi \to A'$, κλπ. x_1, x_2 αντιστοιχούν στό ίδιο σημείο αν καί μόνο αν $x_1 - x_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Έστω $x \to M(t,s)$. Ορίζουμε $\cos x = s$, $\sin x = t$. Ορίζουμε επίσης $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ιδιότητες:

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα).

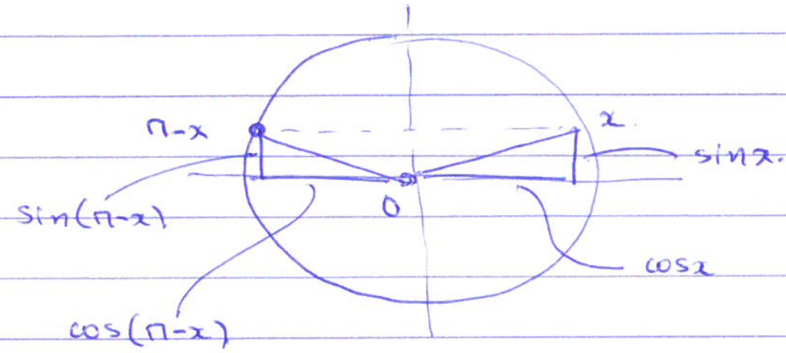
(2) $|\cos x| \leq 1$, $|\sin x| \leq 1$ (άμεσα)

(3) (i) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

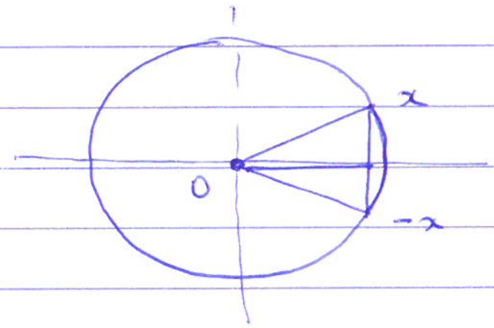


Προκύπτει άμεσα από τήν ~~ομοιότητα~~ ισότητα τριγώνων στό σχήμα.

(ii) $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$.

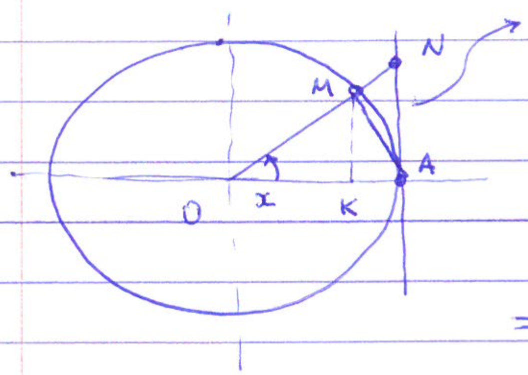


(iii) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$.



Επομένως: cos άρτια συνάρτηση και sin περιττή συνάρτηση. Επίσης cos και sin είναι 2π- περιοδική συνάρτηση.

(4) Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\sin x < x < \tan x$.



Από την ομοιότητα τριγώνων ΟΚΜ και ΟΑΝ έχουμε

$$\frac{(MK)}{(OK)} = \frac{(NA)}{(OA)} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(NA)}{1}$$

$\Rightarrow (NA) = \tan x$. Επίσης

Εμβ(ΟΑΜ) < Εμβ(κυκλ. τομέα ΟΑΜ) < Εμβ.(ΟΑΝ).

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} \times 1^2\right) < \frac{1}{2}\tan x \Rightarrow \sin x < x < \tan x.$$

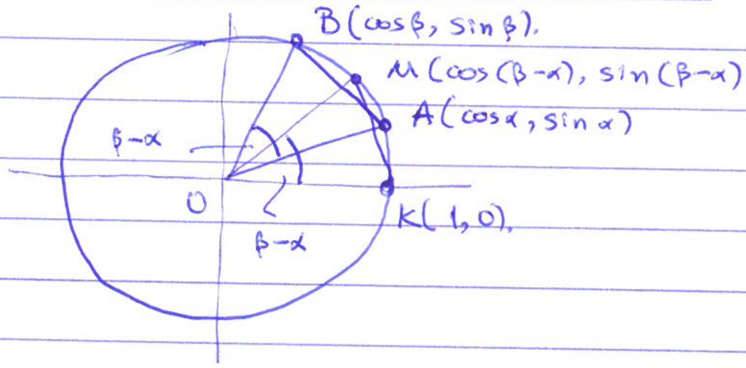
5 $|\sin x| \leq |x|$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από την 4 έχουμε $\sin x < x$ αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < \frac{\pi}{2}$ καί

$$\sin(-x) < -x \Rightarrow |\sin x| < |x|$$

καί άρα $|\sin x| \leq |x|$ γιά κάθε $|x| \leq \frac{\pi}{2}$. Όμως καί γιά $|x| > \frac{\pi}{2}$ έχουμε $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} < |x|$ καί επομένως $|\sin x| \leq |x|$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τριγωνομετρικές ~~Αυ~~ Ταυτότητες



Ορίζουμε M ώστε οι γωνίες $\hat{BOA} = \hat{MOK}$

Από τήν ισότητα τριγώνων OAB καί OKM έχουμε ότι $(AB)^2 = (MK)^2 \Rightarrow (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 =$
$= (\cos(\beta-\alpha) - 1)^2 + \sin^2(\beta-\alpha) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta$$
$$= \underline{\cos^2(\alpha-\beta)} - 2\cos(\beta-\alpha) + 1 + \underline{\sin^2(\beta-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \cancel{2} - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = \cancel{2} - 2\cos(\beta-\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

(*) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

Επίσης θέτοντας $\beta \to -\beta$ στην παραπάνω:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) \Rightarrow$

(*) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \beta\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \sin\beta \Rightarrow$

(*) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) \Rightarrow$

(*) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$.

(Β) Συνημίτονο και ημίτονο 2α

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$.

$\sin(2a) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

(Γ) Μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο

Αθροίσματα της μορφής $\sin x \pm \sin y$, $\cos x \pm \cos y$.

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha \end{array}\right\}$$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta.$

Έστω $x = \alpha+\beta$, $y = \alpha-\beta. \Rightarrow 2\alpha = x+y$, $2\beta = x-y$

$\Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$. Άρα:

(*) $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$

Παρόμοια θέτοντας $y \to -y$.

(*) $\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).$

Επίσης:

$$\cos x + \cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi-x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{\cancel{\frac{\pi}{2}}-x-\cancel{\frac{\pi}{2}}+y}{2}\right) =$$

(*) $$= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos x + \cos y$$

και τελικά ~~θέτοντας~~

$$\cos x - \cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\cancel{\frac{\pi}{2}}-x-\cancel{\frac{\pi}{2}}+y}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{2}-y}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x+y}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

$$= 2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Ένας άλλος τρόπος ορισμού τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι μέσω δυναμοσειρών:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Από το κριτήριο λόγου η σειρά συγκλίνει απολύτως: Θέτοντας

$$a_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} \longrightarrow 0$$ καθώς $n \to \infty$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$

Και άρα η συνάρτηση sin είναι καλά ορισμένη γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρόμοια:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Θέτοντας:

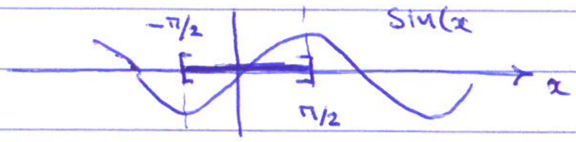
$$a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow 0$$ καθώς $n \to \infty$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$

Και επομένως η συνάρτηση cos είναι καλά ορισμένη γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

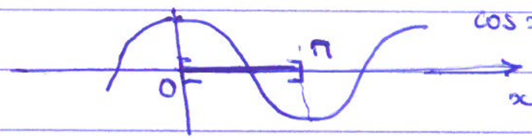
Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

(i) Τόξο ημιτόνου (arcsin). Η συνάρτηση sin δέν είναι 1-1 αν το πεδίο ορισμού της είναι όλο το $\mathbb{R}$



Περιορίζουμε το πεδίο ορισμού στό διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και τότε η $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ είναι 1-1 καί μπορούμε νά ορίσουμε αντίστροφο συνάρτηση: $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

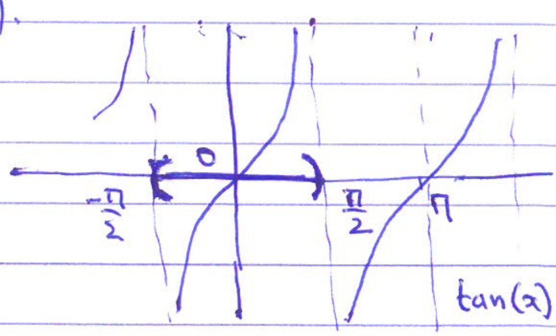
(ii) Τόξο συνημιτόνου (arccos). Παρόμοια, $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ δέν είναι 1-1, οπότε περιορίζουμε το πεδίο ορισμού της στό διάστημα $[0,\pi]$.



Η αντίστροφη συνάρτηση $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ είναι τώρα καλά ορισμένη

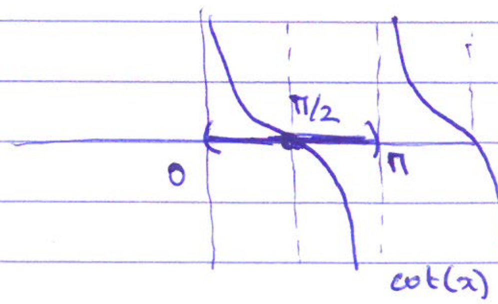
(iii) Τόξο εφαπτομένης (arctan). Η συνάρτηση tan είναι 1-1 στό διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ορίζουμε τήν αντίστροφη της σέ αυτό το διάστημα: $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



(iv) Τόξο συνεφαπτομένης (arccot).

Η συνάρτηση cot είναι 1-1 στό διάστημα $(0,\pi)$. Ορίζουμε την αντίστροφη: $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$.



2.5 Εκθετική συνάρτηση

Η εκθετική συνάρτηση μπορεί να οριστεί μέσω της σειράς

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από τό κριτήριο του λόγου:

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty \text{ γιά κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Καί επομένως η exp ορίζεται γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$

Η απόδειξη παραλείπεται.

(β) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από τόν ορισμό: $\exp(0) = 1$. Θέτοντας $x_1 = -x$, $x_2 = x$ στην (α) έχουμε $\exp(0) = 1 = \exp(-x) \cdot \exp(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exp(-x) = [\exp(x)]^{-1}$.

(γ) $\exp(x) > 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $\exp(x) > 0$ γιά $x > 0$ από τόν ορισμό της σειράς και για $x<0$ έχουμε $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)} > 0$, ενώ $\exp(0)=1$. Άρα $\exp(x)>0$ για ~~όλα τα~~ κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(δ) $\exp(x)\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε $x_2-x_1>0$ και $\exp(x_2-x_1)>1$. Επομένως από τα (α) και (β):

$$\exp(x_2-x_1) = \exp(x_2)\cdot\exp(-x_1) = \frac{\exp(x_2)}{\exp(x_1)} > 1$$

$\Rightarrow \exp(x_2) > \exp(x_1)$, και άρα η exp είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(ε) Η συνάρτηση exp είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$. Αν $x_1<x_2$ τότε από το (δ) $\exp(x_1)<\exp(x_2)$, ενώ αν $x_2<x_1$, $\exp(x_2)<\exp(x_1)$. Σε κάθε περίπτωση $\exp(x_1)\neq\exp(x_2)$ και η exp είναι "1-1".

(στ) Το πεδίο τιμών της συνάρτησης $\exp(x)$ είναι το σύνολο $(0,+\infty)$.

Απόδειξη: Παραλείπεται.

Μπορούμε να δείξουμε ότι $\exp(x)=e^x$ όπου

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Από τον ορισμό της exp έχουμε $\exp(1) = 1+1+\frac{1}{2!}+\dots = e$

οπότε από τό (α) παίρνουμε (επαγωγικά)

$$\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n \quad \text{γιά κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επίσης από τό (β):

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n} \quad \text{γιά κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς: $\exp(m) = e^m$ γιά κάθε $m \in \mathbb{Z}$

Επομένως γιά $q = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ εφαρμόζοντας τό (α):

$$[\exp(q)]^n = \left(\exp\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n = \underbrace{\exp\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \exp\left(\frac{m}{n}\right) \cdots \exp\left(\frac{m}{n}\right)}_{n \text{ φορές}}$$

$$= \exp\left(\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}\right) = \exp\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) =$$

$$= \exp(m) = e^m$$

οπότε: $\exp(q) = (e^m)^{1/n} = e^{m/n} = e^q$, $q \in \mathbb{Q}$

Η διαδικασία επεκτείνεται γιά νά δείξουμε ότι $\exp(x) = e^x$ καί γιά x άρρητο, ώστε $\exp(x) = e^x$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εφόσον $\exp(x) = e^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ είναι 1-1 καί επί μπορούμε νά ορίσουμε την αντίστροφή της (λογαριθμική συνάρτηση) $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε
$\ln y = x \iff y = e^x$ γιά $x \in \mathbb{R}$.

2.6 Γενική εκθετική συνάρτηση

Έχοντας ορίσει την λογαριθμική συνάρτηση, μπορούμε να ορίσουμε την γενική εκθετική συνάρτηση a^x, $a>0$, ως εξής: $a^x = e^{x \ln a}$. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

<u>Πρόταση</u>: (α) Έστω $a, b > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε·

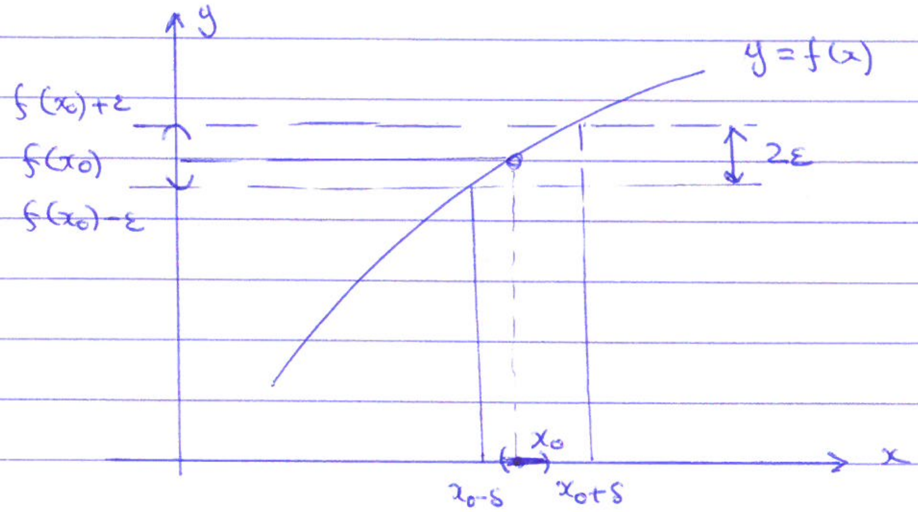
(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, (ii) $(a^x)^y = a^{xy}$, (iii) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,
(iv) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

(β) Έστω $a>0$. Η συνάρτηση $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα όταν $0<a<1$, σταθερή και ίση με 1 όταν $a=1$ και γνησίως αύξουσα όταν $a>1$.

Απόδειξη: Παραλείπεται.

Ορισμός Συνέχειας

Έστω $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$ καί $f : A \to \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στό σημείο $x_0 \in A$ αν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in A$ καί $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$



Παρατήρηση 1

Σέ λιγότερο τεχνική γλώσσα ο ορισμός λέει ότι αν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε νά βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε γιά κάθε x στό πεδίο ορισμού πού είναι δ-κοντά στό x_0 η $f(x)$ είναι ε-κοντά στό $f(x_0)$ η συνάρτηση είναι συνεχής στό x_0

Παρατήρηση 2

Η επιλογή ~~του~~ κατάλληλου δ γίνεται πιό δύσκολη όταν το ε γίνεται μικρότερο. Μπορούμε νά σκεφτόμαστε στον ορισμό "... αν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό ..."

Παρατήρηση 3

Πολλές φορές γράφουμε "$x \in A \cap N_\delta(x_0)$" όπου $N_\delta(x_0)$ η περιοχή (διάστημα) με κέντρο x_0 καί ακτίνα δ, δηλ. $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$.

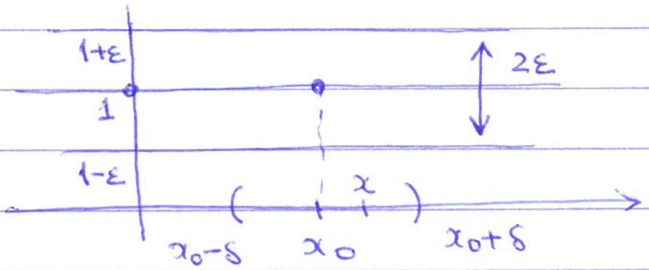
Παρατήρηση 4

Το δ στον ορισμό θα εξαρτάται (συνήθως) από το ε αλλά και από το x_0. Μπορούμε να γράψουμε "$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) \ldots$"

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R})$ είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in A$.

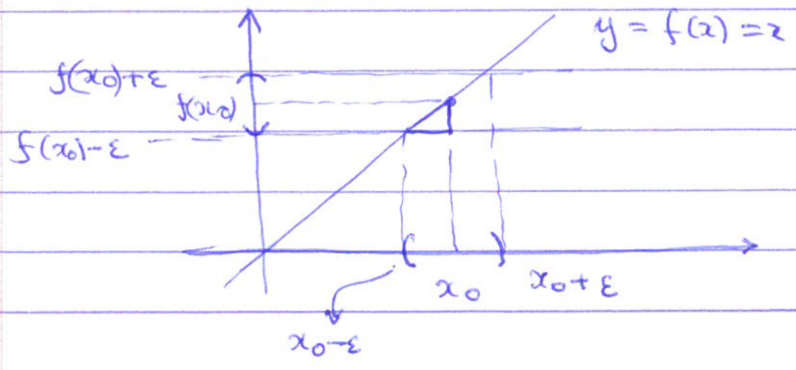
Παραδείγματα

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$



Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Παίρνω οποιοδήποτε $\delta > 0$. Τότε αν $x \in \mathbb{R}$ και $|x - x_0| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 (αυθαίρετο) και σε κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι συνεχής.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

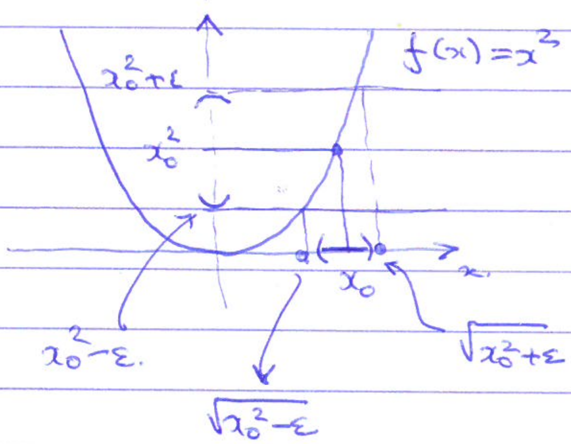


Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon > 0$

Έστω $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \delta$ ~~(= ε)~~ Τότε,

$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$. Άρα η $f(x) = x$ είναι συνεχής στο x_0 (και σε όλο το $\mathbb{R}$).

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω $\varepsilon > 0$.

Αναζητούμε $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ τ.ω. αν $x \in \mathbb{R}$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

(Ανάλυση: $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0|$

$$\le |x - x_0| \cdot (|x| + |x_0|)$$

Και αν $|x - x_0| < 1$ τότε $|x| = |x - x_0 + x_0|$

$$< |x - x_0| + |x_0|$$

$$< 1 + |x_0|$$

δηλαδή αν $|x - x_0| < 1$, τότε

$$|x^2 - x_0^2| \le |x - x_0| \cdot (1 + 2|x_0|).$$

Και αυτό είναι μικρότερο από ε αν $|x - x_0|(1 + 2|x_0|) < \varepsilon$

δηλ. αν $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}$).

Επιλέγουμε

$$\delta = \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right).$$

Τότε $\delta < 1$ καί $\delta < \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$. Άρα:

αν $|x-x_0| < \delta$, τότε

$$|f(x)-f(x_0)| = |x^2-x_0^2| = |x-x_0|\cdot|x+x_0|$$

$$\leq |x-x_0|\cdot(1+2|x_0|) \quad \left(\text{γιατί } |x-x_0|<1\right)$$

$$< \delta\,(1+2|x_0|)$$

$$< \frac{\varepsilon}{\cancel{2|x_0|+1}}\,(\cancel{1+2|x_0|}) = \varepsilon$$

Άρα η f είναι συνεχής στό x_0 (καί σέ κάθε $x \in \mathbb{R}$).

Άρνηση συνέχειας

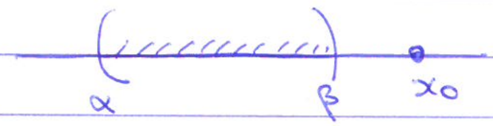
- Η f είναι συνεχής στό $x_0 \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ τ.ω $x \in A \cap N_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

- Η f δέν είναι συνεχής στό $x_0 \iff \exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0$ $x \in A \cap N_\delta(x_0) \not\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\iff \exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0,\ \exists x \in A \cap N_\delta(x_0)$ αλλά $|f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon$.

υπάρχει κάποιο

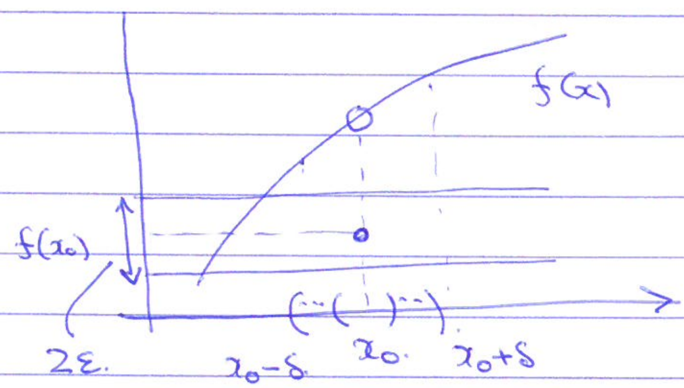
<u>Άσκηση</u>: Έστω $x_0 \in A$, x_0 μεμονωμένο σημείο του A.
Δηλ. $\exists\, \varepsilon_0 > 0$: $\{x_0\} \cap (A \setminus \{x_0\}) = \emptyset$, π.χ



$A = (\alpha, \beta) \cup \{x_0\}$

Είναι η f συνεχής στο x_0;

<u>Παράδειγμα</u> ασυνεχούς συνάρτησης (εποπτικό).



Αν το ε είναι "αρκούντως μικρό" όσο μικρό και να διαλέξουμε το δ για κάποιο $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ η $f(x) \notin (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$.

<u>Θεώρημα</u> (Αρχή μεταφοράς).

Έστω $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \to \mathbb{R}$. Έστω $x_0 \in A$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής στο x_0

(β) Για <u>κάθε</u> ακολουθία (x_n) στο A η οποία συγκλίνει στο x_0 ισχύει $(f(x_n)) \to f(x_0)$.

Απόδειξη

($\Rightarrow$): Εστω $\varepsilon > 0$. Λόγω συνέχειας υπάρχει $\delta > 0$:

(*) "αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$"

Εστω $(x_n) \in A$, $x_n \to x_0$. Τότε για το δ που επιλέξαμε παρα πάνω:

(**) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: |x_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq n_0.$

Από την (*) και (**) (εφόσον $x_n \in A$) έχουμε για κάθε $n \geq n_0$:

$$|x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0).$$

($\Leftarrow$): Εστω ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 (εις άτοπον απαγωγή). Τότε $\exists\, \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\forall \delta > 0$ υπάρχει $x \in A$, με $|x - x_0| < \delta$ αλλά $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Παίρνουμε $\delta = 1$: $\exists\, x_1 \in A$ με $|x_1 - x_0| < 1$ αλλά $|f(x_1) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

$\delta = \frac{1}{2}$: $\exists\, x_2 \in A$ με $|x_2 - x_0| < 1/2$ αλλά $|f(x_2) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

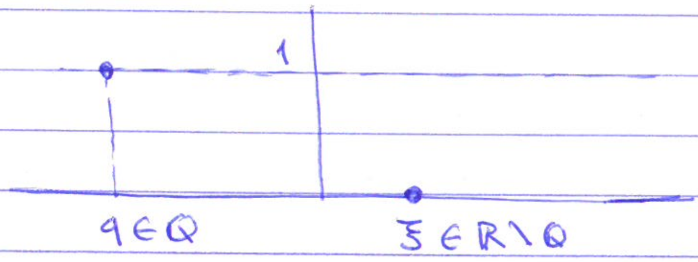
$\vdots$

(***) $\delta = \frac{1}{n}$: $\exists\, x_n \in A$ με $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. αλλα $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Η ακολουθία πού κατασκευάσαμε $(x_n) \in A$ καί συγκλίνει στό x_0 ($|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$). Άρα σύμφωνα μέ τό (β) πρέπει νά έχουμε ότι $(f(x_n)) \to f(x_0)$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\forall n \geq n_0$ νά έχουμε $|f(x_0) - f(x_n)| < \varepsilon$. Όμως από τό (**) έχουμε ότι $|f(x_0) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ (άτοπο). $\square$

Παράδειγμα (Συνάρτηση Dirichlet)

Ορίζουμε $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{γιά } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{γιά } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$



Σέ ποιά σημεία είναι η f συνεχής;

Απάντηση: Σέ κανένα! Κάθε διάστημα μέ κέντρο $q \in \mathbb{Q}$ ή $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ περιέχει καί ρητούς καί άρρητους. Άρα αυθαίρετα κοντά στο q υπάρχουν άρρητοι καί αυθαίρετα κοντά στό ξ υπάρχουν ρητοί.

Το ίδιο συμπέρασμα καί μέ τήν "αρχή της μεταφοράς". Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε (γιά αντίφαση) ότι η f συνεχής στό x_0.

- Υπάρχει ακολουθία ρητών $q_n \to x_0 \overset{AM}{\Rightarrow}$ ότι $f(q_n) \to f(x_0)$. Η $f(q_n)$ είναι η σταθερή ακολουθία $(1, 1, \ldots)$ οπότε $f(x_0) = 1$
- Υπάρχει ακολουθία άρρητων $\xi_n \to x_0 \overset{AM}{\Rightarrow}$ ότι $f(\xi_n) \to f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = 0$. (Άτοπο).

Ασκηση: Χρησιμοποιήστε την αρχή της μεταφοράς για να δείξετε ότι κάθε $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε ένα μεμονωμένο σημείο x_0 του ~~Α απο~~ πεδίου ορισμού της - δηλ του A. (Υπόδειξη: Ποιές ακολουθίες $x_n \in A$, συγκλίνουν στο x_0;)

Θεώρημα

Έστω $f, g: A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset)$ συνεχείς στο $x_0 \in A$. Τότε οι συναρτήσεις: αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (αν $g \neq 0$ στο A) είναι συνεχείς στο x_0.

Απόδειξη (για $f+g$).

Έχουμε: $(f+g)(x) \overset{\text{ορ}}{=} f(x) + g(x)$.

Έστω (x_n) στο A, τ.ω $x_n \to x_0$. Τότε $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$. Εφόσον f και g συνεχείς στο x_0 έχουμε $f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$ (Αρχή μεταφοράς). Επομένως από ιδιότητες ακολουθιών:

$$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = $$
$$= (f+g)(x_0)$$

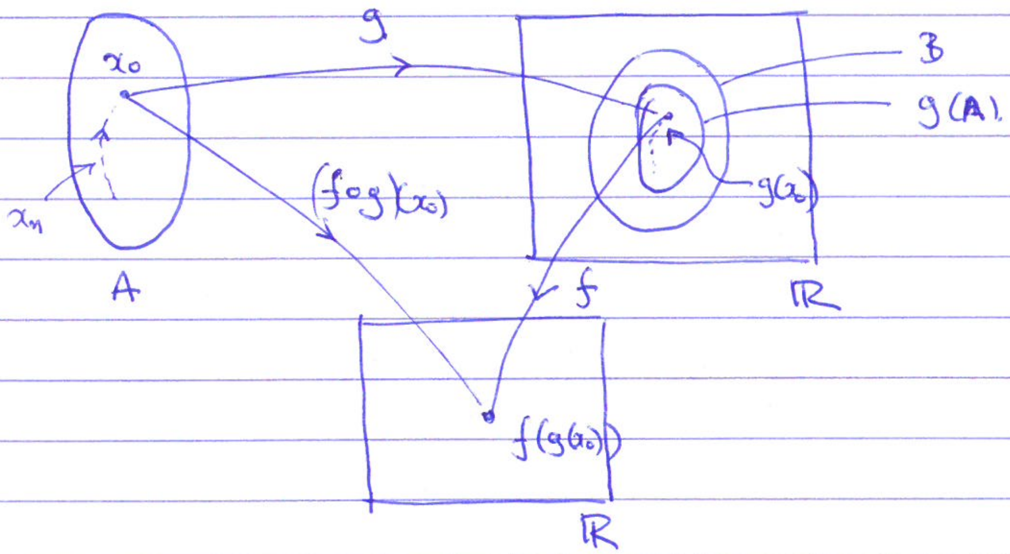
και από την αρχή της μεταφοράς $f+g$ συνεχής στο x_0 (εφόσον (x_n) αυθαίρετη). Παρόμοια για τις άλλες ιδιότητες.

Θεώρημα: Έστω $g: A \to \mathbb{R}$, $f: B \to \mathbb{R}$, $g(A) \subseteq B$. ($g(A) = \{g(x) : x \in A\}$). Τότε ορίζουμε την σύνθεση:

$$f \circ g : A \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Αν $x_0 \in A$, η g είναι συνεχής στο x_0 και η f είναι συνεχής στο $g(x_0)$, τότε η $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0

Απόδειξη:



Έστω $x_n \in A$, $x_n \to x_0$. Η g είναι συνεχής στο x_0, άρα (αρχή μεταφοράς) $g(x_n) \to g(x_0)$. Η f είναι συνεχής στο $g(x_0)$ και

$$y_n \in B, \quad y_n =: g(x_n) \to g(x_0)$$

Πάλι από την αρχή της μεταφοράς: $f(g(x_n)) \to f(g(x_0))$. Άρα $(f \circ g)(x_n) \to (f \circ g)(x_0)$. Άρα η $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0.

Βασικά Θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα 1: Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι φραγμένη.

Θεώρημα 2: Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή (δηλ. $\exists\, y_1, y_2 \in [\alpha, \beta]$
στο $[\alpha, \beta]$.

τέτοια ώστε: $\forall y \in [\alpha,\beta]$, $f(y_1) \leq f(y) \leq f(y_2)$).

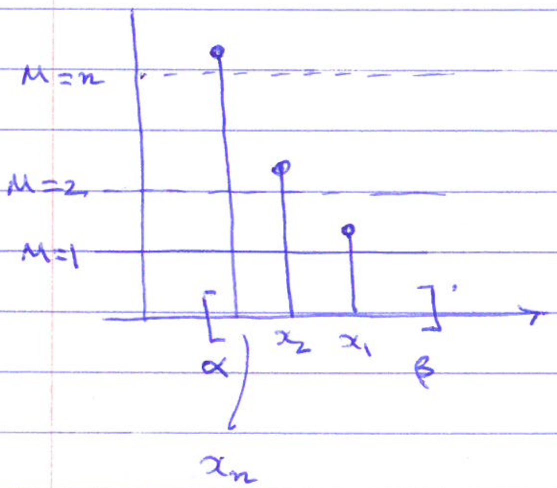
Θεώρημα 3: (Bolzano). Εστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ τ.ω $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω $f(\xi)=0$.

Παρατήρηση: Το Θεώρημα 2 είναι ισχυρότερο από τό Θεώρημα 1. Η απόδειξη θά γίνει μέ αυτή τή σειρά για ευκολία.

Απόδειξη (Θεώρημα 1):

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι άνω φραγμένη.

Έστω (γιά αντίφαση) ότι δέν είναι. Τότε



Γιά $M=1$ $\exists x_1\in[\alpha,\beta]: f(x_1)>1$

Για $M=2$ $\exists x_2\in[\alpha,\beta]: f(x_2)>2$

⋮

Γιά $M=n$ $\exists x_n\in[\alpha,\beta]: f(x_n)>n$

Γενικά, γιά κάθε $n\in\mathbb{N}$ βρίσκουμε $x_n\in[\alpha,\beta]$ τ.ω. $f(x_n)>n$

Έχουμε ότι $\alpha\leq x_n\leq\beta$ γιά κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα η (x_n) είναι φραγμένη. Από τό Θεώρημα Bolzano-Weistrass υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τ.ω. $x_{k_n}\to x_0\in\mathbb{R}$ καί $x_0\in[\alpha,\beta]$.

Άρα x_0 στό πεδίο ορισμού της f, άρα η f είναι συνεχής καί σε αυτό τό σημείο.

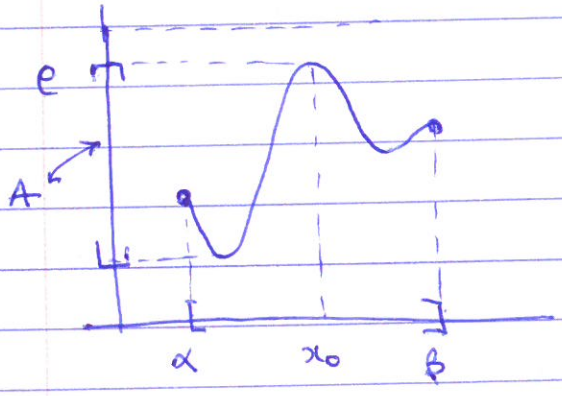
Από την αρχή της μεταφοράς:

$$x_{k_n} \to x_0 \Rightarrow f(x_{k_n}) \to f(x_0).$$

Όμως: $f(x_{k_n}) > k_n \geq n \Rightarrow f(x_{k_n}) \to +\infty.$ } Άτοπο

Άρα η f είναι άνω φραγμένη. (Παρόμοια αποδεικνύουμε ότι η f είναι επίσης κάτω φραγμένη - ή δουλεύουμε με την $-f$ και εφαρμόζουμε τό πρώτο μέρος).

Απόδειξη (Θεώρημα 2)
Θα δείξουμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή.



Ξέρουμε από τό Θεώρημα 1 ότι η f είναι φραγμένη.

Έστω $\overbrace{\text{η}}^{A}$ εικόνα του $[\alpha,\beta]$, δηλ. $A = \{ f(x) : x \in [\alpha,\beta] \}$.

Τό A είναι μή κενό (π.χ. $f(\alpha) \in A$) καί $\overbrace{\text{φραγμένο}}^{\text{άνω}}$: Υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τ.ω. $M \geq f(x)$ γιά κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, άρα M άνω φράγμα του A.

Από την αρχή της πληρότητας υπάρχει $\rho = \sup(A)$. Θα δείξουμε ότι ρ είναι maximum του A, δηλαδή $\exists x_0 \in [\alpha,\beta]$ τ.ω. $f(x_0) = \rho$. (Τότε, γιά κάθε $x \in [\alpha,\beta]$: $f(x) \leq \sup(A) = \rho = f(x_0)$).

Χαρακτηρισμός supremum με ακολουθία: Γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$

μπορούμε να βρούμε $x_n \in [\alpha, \beta]$ τ.ω.

$$\rho - \frac{1}{n} < f(x_n) \le \rho.$$

(Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{n}$ στο κριτήριο για supremum).

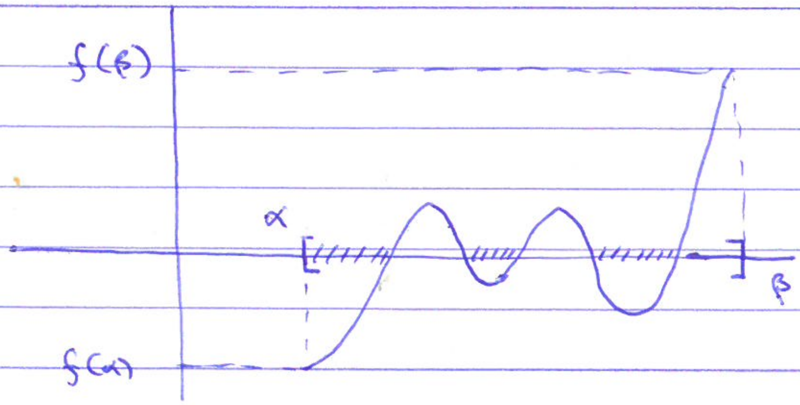
Εφόσον η (x_n) είναι φραγμένη ($x_n \in [\alpha, \beta]$) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $x_{k_n} \to x_0 \in \mathbb{R}$ (και έπεται ότι $x_0 \in [\alpha, \beta]$). Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, επομένως και στο x_0, και από την αρχή της μεταφοράς: $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$. Όμως

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \rho}}{\rho - \frac{1}{n}} < \rho - \frac{1}{k_n} < f(x_{k_n}) \le \rho. \qquad (k_n \ge n)$$

Από την αρχή της παρεμβολής $f(x_{k_n}) \to \rho$.
Άρα $\rho = f(x_0)$.

<u>Απόδειξη</u> (Θεώρημα 3).

Έστω $f(\alpha) < 0$ και $f(\beta) > 0$ (παρόμοια αν $f(\alpha) > 0$ και $f(\beta) > 0$). Υποθέτουμε ότι $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και θα δείξουμε ότι $\exists \xi \in (\alpha, \beta) : f(\xi) = 0$.



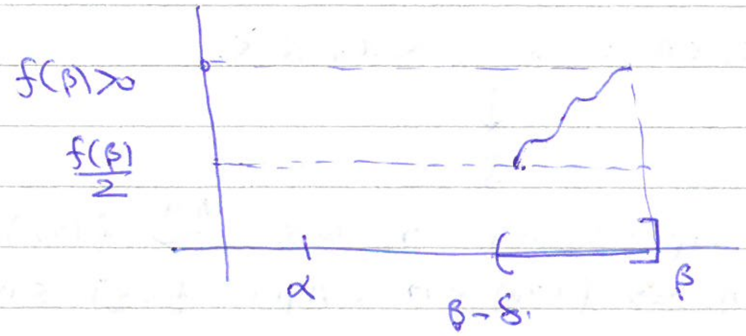
Θεωρούμε τό σύνολο :

$$A = \{ x \in [\alpha, \beta] : f(x) \leq 0 \}$$

Τό A είναι μή κενο ($\alpha \in A$) καί άνω φραγμένο (π.χ από τό β).
Άρα από τήν αρχή της πληρότητας υπάρχει

$$\xi = \sup A$$

<u>Ισχυρισμός</u> : $\xi < \beta$.



Εφαρμόζοντας συνέχεια μέ $\varepsilon = \frac{f(\beta)}{2}$, βρίσκουμε $\delta > 0$
τ.ω. $\beta - \delta < x \leq \beta$. Τότε

$$|f(x) - f(\beta)| < \frac{f(\beta)}{2} \Rightarrow$$

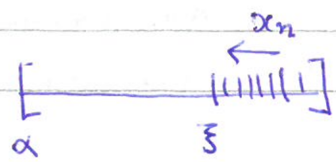
$$\Rightarrow -\frac{f(\beta)}{2} < f(x) - f(\beta) < \frac{f(\beta)}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{f(\beta)}{2} < f(x).$$

Άρα $A \subseteq [\alpha, \beta - \delta] \Rightarrow \xi = \sup A \leq \beta - \delta < \beta$.

<u>Ισχυρισμός</u> : $f(\xi) = 0$

• Δείχνουμε πρώτα ότι $f(\xi) \geq 0$.



Ορίζουμε ακολουθία: $x_n = \xi + \dfrac{\beta - \xi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε ότι $x_n \in [\alpha, \beta]$ και $x_n \to \xi$. Άρα $f(x_n) \to f(\xi)$ (αρχή μεταφοράς). Επίσης $x_n > \xi = \sup(A) \Rightarrow x_n \notin A$ $\Rightarrow f(x_n) > 0$. και επομένως $f(\xi) \geq 0$.

- Δείχνουμε ότι $f(\xi) \leq 0$.

Έχουμε ότι $\xi = \sup(A)$ και από τον χαρακτηρισμό supremum (με $\varepsilon = \frac{1}{n}$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in A : \underbrace{\xi - \tfrac{1}{n}}_{\downarrow\ \xi} < x_n \leq \xi.$$

Τότε (αρχή παρεμβολής), $x_n \to \xi. \xRightarrow{A.M} f(x_n) \to f(\xi)$

Όμως $x_n \in A \Rightarrow f(x_n) \leq 0$. Άρα $f(\xi) \leq 0$.

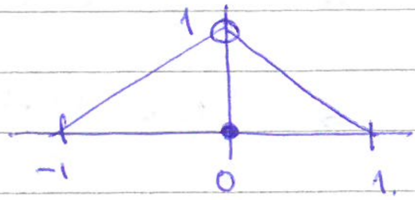
Επομένως $f(\xi) = 0$ ∎

<u>Σημείωση:</u> Οι υποθέσεις των $\Theta_1 - \Theta_3$ (πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα, f συνεχής) είναι απαραίτητα.

<u>Παράδειγμα</u>

① $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

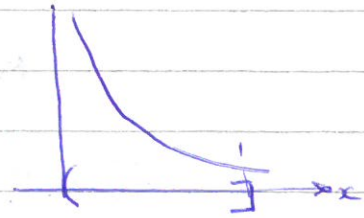


Η f δεν παίρνει μέγιστη τιμή στο $[-1, 1]$ λόγω ασυνέχειας στο $x = 0$. $\sup([-1,1]) = 1$ δεν είναι maximum

2) $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$

Η f είναι συνεχής αλλά δέν παίρνει ελάχιστη η μέγιστη τιμή στό πεδίο ορισμού της τό οποίο είναι ανοικτό διάστημα. $\sup(f(0,1))=1$, $\inf(f(0,1))=0$ δέν αντιστοιχεί σέ maximum η minimum.

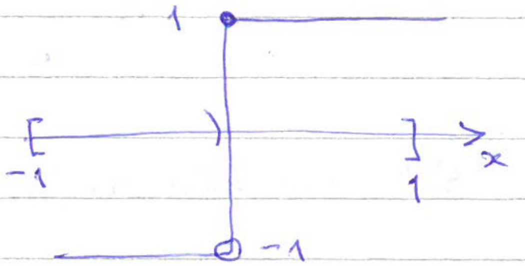
3) $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.



Συνεχής συνάρτηση σέ μή-κλειστό διάστημα. Η f δέν είναι φραγμένη.

4) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$

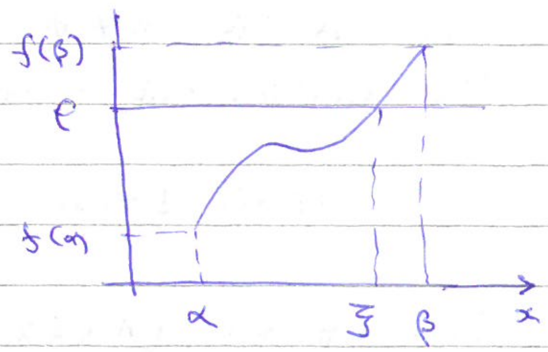
$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ -1, & x\in[-1,0)\end{cases}$$



$f(-1)=-1$, $f(1)=1$ αλλά η f δέν μηδενίζεται σέ κανένα σημείο του Π.Ο. της.

<u>Θεώρημα 4</u> (ενδιαμέσων τιμών)

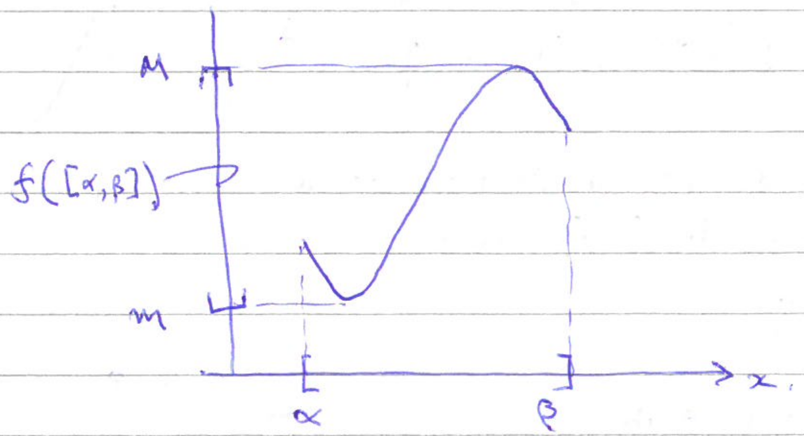
$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ όπου $f(\alpha)<\rho<f(\beta)$ (η $f(\alpha)>\rho>f(\beta)$) $\rho\in\mathbb{R}$. Τότε $\exists\,\xi\in(\alpha,\beta):f(\xi)=\rho$.



<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι $f(\alpha)<\rho<f(\beta)$
Ορίζουμε $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$
$g(x)=f(x)-\rho$. Τότε η g
είναι συνεχής και $g(\alpha)=f(\alpha)-\rho<0$
$g(\beta)=f(\beta)-\rho>0$. Από Θεώρημα
Bolzano $\exists\,\xi\in(\alpha,\beta):g(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)-\rho=0\Rightarrow f(\xi)=\rho$.

<u>Θεώρημα 5.:</u> Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, όχι σταθερή.
Αν $m=\min(f)$, $M=\max(f)$ (που υπάρχουν από το Θ2)
τότε
$$f([\alpha,\beta])=\{f(x): x\in[\alpha,\beta]\}=[m,M].$$

<u>Απόδειξη:</u>



"$\subseteq$" Γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$: $m=\min(f)\le f(x)\le\max(f)=M$

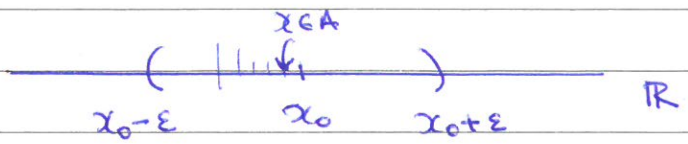
"$\supseteq$" Από το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχουν
$f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$, $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$.
Αν $m<\rho<M$ τότε από το Θ4 υπάρχει $x\in(x_1,x_2)$
τ.ω $f(x)=\rho$. $\square$

<u>Όριο συναρτήσεων.</u>

<u>Ορισμός</u> (σημείο συσσώρευσης συνόλου)
Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$ καί $x_0\in\mathbb{R}$ (<u>όχι</u> αναγκαστικά $x_0\in A$).
Το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A αν

$$\forall\varepsilon>0\ \exists x\in A,\ x\neq x_0 : x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon).$$

δηλ. $\forall\varepsilon>0$ $(A\setminus\{x_0\})\cap(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\neq\emptyset$.



<u>Παράδειγμα.</u>

(i) $A = [0,1] \cup \{2\}$: Σύνολο σ.σ $= [0,1]. \subseteq A$

(ii) $A = (0,1)$: Σύνολο σ.σ $= [0,1]. \not\subseteq A$

(iii) $A = \mathbb{N}$. : Σύνολο σ.σ. $= \emptyset \subseteq A$.

iv $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. : Σύνολο σ.σ. $= \{0\} \not\subseteq A$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και $x_0 \in A$. Το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A αν δεν είναι σ.σ. του A (δηλ. αν $\exists \varepsilon > 0 : A \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) = \{x_0\}$.

<u>Παράδειγμα.</u> Το σημείο 2 στο (i), κάθε σημείο του A στο (iii), κάθε σημείο του A.

<u>Πρόταση.</u> (Χαρακτηρισμός σ.σ. με ακολουθία). Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. και $x_0 \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Το x_0 είναι σ.σ. του A

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν <u>άπειρα</u> σημεία του A στο $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

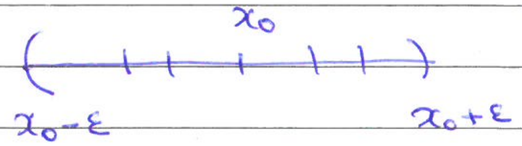
(γ) Υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$.

<u>Απόδειξη</u>

<u>(α) ⇒ (β).</u> Έστω $\varepsilon > 0$. Στο $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ υπάρχουν

σημεία του A (εκτός του A αν $x_0 \in A$) και ας υποθέσουμε ότι είναι πεπερασμένα το πλήθος, π.χ

$$x_1, x_2, \ldots, x_N.$$



Τότε υπάρχει δ>0 τ.ω

$x_1, x_2, \ldots x_N \notin (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $\left(\text{π.χ. } \delta = \min\limits_{i=1,2..n} \frac{|x_0-x_i|}{2}\right)$.

Αυτό είναι άτοπο γιατί τότε στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ δεν υπάρχουν σημεία του A (εκτός πιθανώς από το x_0).

<u>(β) ⇒ (γ)</u>. Παίρνουμε $\varepsilon=1$ και βρίσκουμε

$\varepsilon=1$: $\quad x_1 \in A, \; x_1 \neq x_0, \; |x_1 - x_0| < 1.$

$\varepsilon=\frac{1}{2}$: $\quad x_2 \in A, \; x_2 \neq x_0, \; |x_2 - x_0| < \frac{1}{2}.$

(στο $(x_0-\frac{1}{2}, x_0+\frac{1}{2})$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A, και άρα και κάποιο $\neq x_0$).

Γενικά για $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε:

$$x_n \in A, \; x_n \neq x_0, \; |x_n - x_0| < \frac{1}{n}.$$

Επομένως ορίσαμε ακολουθία (x_n) στο A, $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x_0$$

<u>(γ) ⇒ (α)</u> Έστω ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists N = N(\varepsilon)$: $|x_n - x_0| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq N$ με $x_n \neq x_0$. Άρα x_0 είναι σ.σ. του A.

Ορισμός του ορίου

Έστω $A \neq \phi$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \to \mathbb{R}$. Έστω x_0 σ.σ. του A. Λέμε ότι το όριο

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

υπάρχει και είναι ίσο με ℓ, αν

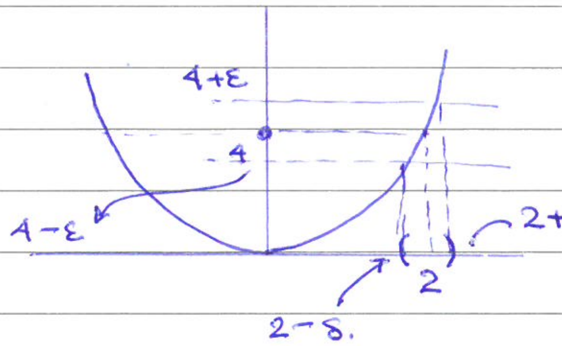
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{τ.ω.} \ (x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

(Σημείωση: τό κάτω φράγμα $0 < |x - x_0|$ σημαίνει ότι $x \neq x_0$).

Παραδείγματα.

(α) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

Τότε $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$



$$\left.\begin{array}{l} \exists \delta > 0 : x \in (2-\delta, 2+\delta) \\ x \neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

(β) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left.\begin{array}{ll} x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ = 0, & x = 2 \end{array}\right\}.$

Τότε: $\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \quad (\neq f(2) = 2).$

ακριβώς για τον ίδιο λόγο με το (α).

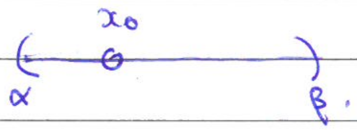
(γ) Ορισμός παραγώγου (επόμενη ενότητα).

$f \in (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

Θα ορίσουμε την παράγωγο της f στο x_0 ως το όριο (αν υπάρχει)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

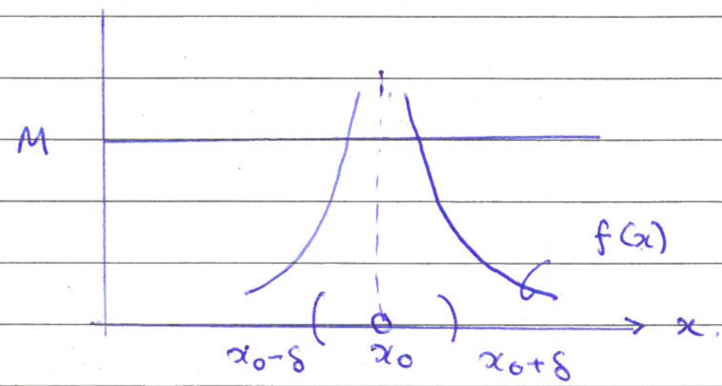
δηλαδή ως $\lim_{x \to x_0} g(x)$, $g : (\alpha,\beta) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.



Το πεδίο ορισμού της $g : (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ δεν περιέχει το x_0 αλλά x_0 σ.σ. του πεδίου ορισμού.

Παραλλαγή ορισμού του ορίου.

Ⓐ $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ τ.ω $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.



Παρόμοια, $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ τ.ω $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$.

Πλευρικά όρια.

Το x_0 είναι σ.σ. του A "από τα δεξιά" αν για κάθε $\varepsilon>0$ $\exists x\in A : x\in(x_0, x_0+\varepsilon)$. Αντίστοιχα, το x_0 είναι σ.σ του A "από αριστερά" αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists x\in A : x\in(x_0-\varepsilon, x_0)$.

Έστω x_0 σ.σ. του A από δεξιά. Τότε

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \text{ τ.ω. αν } x\in A \text{ και } x\in(x_0, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Έστω x_0 σ.σ. του A από αριστερά. Τότε

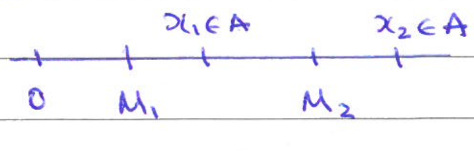
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \text{ τ.ω. αν } x\in A \text{ και } x\in(x_0-\delta, x_0) \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Πρόταση: Έστω $f: A\to\mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A και από δεξιά και από αριστερά, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell\in\mathbb{R} \iff \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \ \underline{\text{καί}}\ \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε όρια της μορφής: $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει $+\infty$ να είναι σ.σ. του πεδίου ορισμού της f, δηλ. θα πρέπει να υπάρχουν αυθαίρετα μεγάλα σημεία στο πεδίο ορισμού.

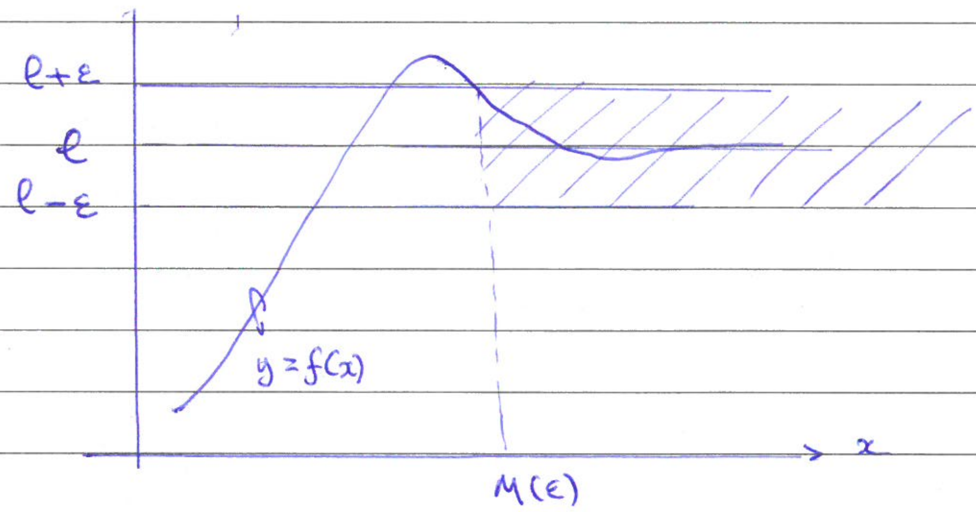
Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$. Λέμε ότι το $+\infty$ είναι σ.σ. του A αν για κάθε $M>0$ $\exists x\in A$, $x>M$.



Αν $+\infty$ είναι σ.σ. του A και $f : A \to \mathbb{R}$, τότε

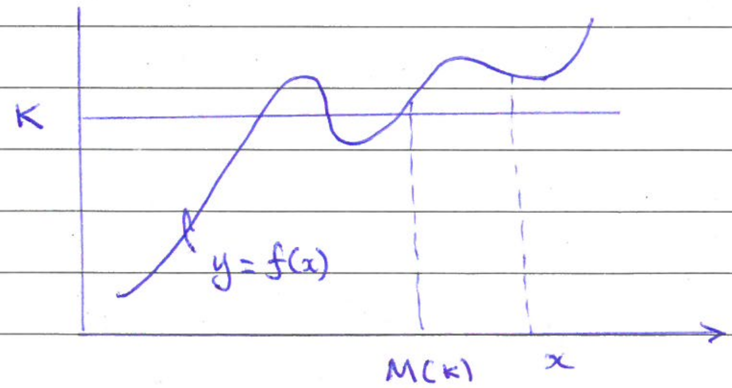
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

αν (και μόνο αν) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$ τ.ω. $(x \in A$ και $x > M)$
$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$



Αντίστοιχος ορισμός γιά: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Επίσης

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall K > 0 \ \exists M > 0$ τ.ω. $(x \in A$ καί
$x > M) \Rightarrow f(x) > K$



Αντίστοιχος ορισμός γιά: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Θεώρημα (Αρχή μεταφοράς για το όριο)

Έστω $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \to \mathbb{R}$. Αν x_0 είναι σ.σ. του A, τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

(β) Γιά κάθε ακολουθία (x_n) στό A, τ.ω. $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$ έχουμε $f(x_n) \to \ell$.

Όρια και πράξεις

Πρόταση: Έστω $f, g: A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset)$ και x_0 σ.σ. του A. Αν υπάρχουν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = m$$

Τότε: $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell + m$, $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell \cdot m$.

Απόδειξη: Έστω $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$. Τότε από την αρχή της μεταφοράς ((α) $\Rightarrow$ (β)),

$$f(x_n) \to \ell \quad \text{και} \quad g(x_n) \to m$$

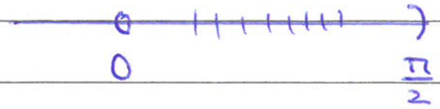
Από ιδιότητες ακολουθιών: $(f \cdot g)(x_n) = f(x_n) \cdot g(x_n) \to \ell \cdot m$
Από την αρχή της μεταφοράς ((β) $\Rightarrow$ (α)),

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell \cdot m$$

Αντίστοιχη απόδειξη γιά άθροισμα συναρτήσεων, κλπ. $\square$

Παραδείγματα.

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}$

Από βασικές τριγωνομετρικές ανισότητες έχουμε
γιά $0<x<\frac{\pi}{2}$: $\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
Άρα:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Έστω $x_n>0$, $x_n\to 0$. Για "μεγάλα" n, $0<x_n<\frac{\pi}{2}$.
και επομένως

$$\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$$

Η συνάρτηση cos είναι συνεχής $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\cos x_n = 1$
Από τό κριτήριο παρεμβολής:

$$\frac{\sin x_n}{x_n}\to 1$$

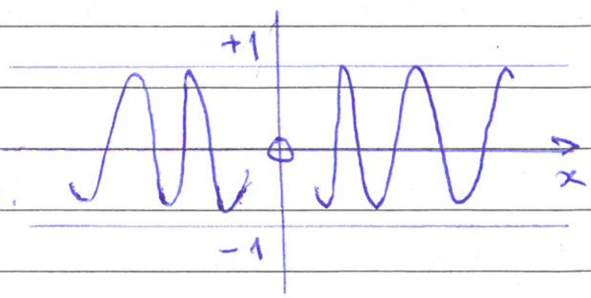
Από το κριτήριο μεταφοράς για όρια έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(Παρόμοια γιά το όριο από αριστερά).

② Τα όρια $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

και $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχουν.



Έστω οι ακολουθίες:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \qquad y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}.$$

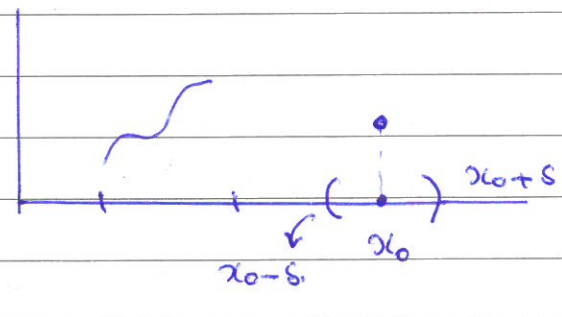
Τότε: $$\sin\frac{1}{x_n} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

Αν το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ υπήρχε τά δύο πλευρικά όρια θά υπήρχαν καί θά ήταν ίσα, άτοπο. Άρα το όριο δεν υπάρχει. Παρόμοια και γιά τό όριο $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$.

Όριο καί συνέχεια

Πρόταση 1: Εστω $f: A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset)$ καί x_0 μεμονομένο σημείο του A. Τότε η f συνεχής στό x_0



Απόδειξη: Εστω $\varepsilon>0$. Αφού τό x_0 μεμονομένο σημείο του A $\exists\,\delta>0$ τ.ω. $A\cap(x_0-\delta, x_0+\delta) = \{x_0\}$. Τότε $(x\in A$ καί $|x-x_0|<\delta)$ $\Rightarrow x = x_0$ καί συνεπώς $|f(x)-f(x_0)| = |f(x_0)-f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. $\square$

Πρόταση 2: Εστω $f: A\to\mathbb{R}$ καί $x_0\in A$ το οποίο είναι σ.σ. του A. Τότε η f είναι συνεχής στό x_0 αν και μόνο αν $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Απόδειξη

(⇒): Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0,

$$\exists \delta > 0 : (x \in A \text{ και } |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Επομένως $(x \in A$ καί $0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (x \in A$ καί $|x - x_0| < \delta)$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

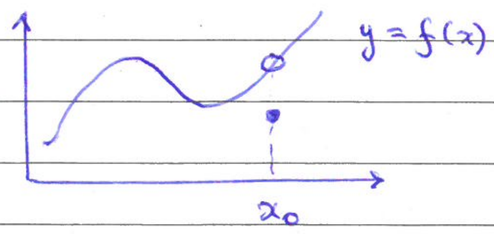
(⇐): Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού υπάρχει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. αν $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Επίσης αν $x = x_0$, τότε $|f(x) - f(x_0)| =$
$= |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

Άρα, γιά κάθε $x \in A$ τ.ω. $|x - x_0| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ και η f είναι συνεχής στο x_0. □.

Είδη ασυνέχειας συνάρτησης

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset)$ καί $x_0 \in A$. Έστω ότι η f είναι ασυνεχής στό x_0. Τότε το x_0 είναι σ.σ. του A (αν ήταν μεμονωμένο σημείο η f θα ήταν συνεχής στό x_0). Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις.

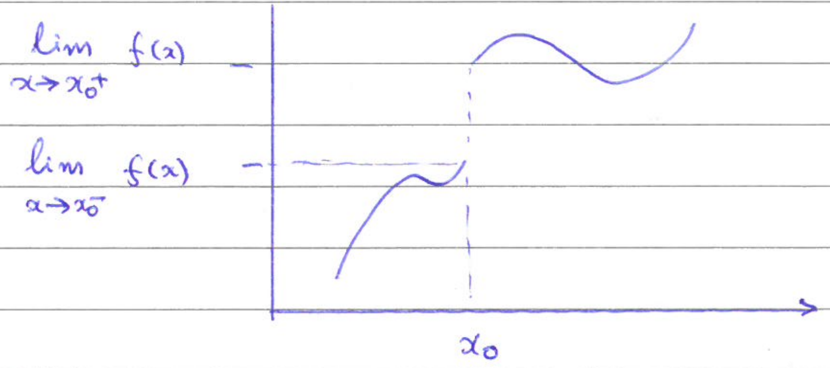
(α) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.



"Επουσιώδης ασυνέχεια"

(β) Το x_0 είναι σ.σ. του A από δεξιά και αριστερά και υπάρχουν τα πλευρικά όρια αλλά

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$



Η f παρουσιάζει άλμα στο x_0 (ίσο με την διαφορά των δύο πλευρικών ορίων)

(γ) Δεν υπάρχει το όριο : $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$ (και τουλάχιστον ένα από τα δύο πλευρικά όρια) : "Ουσιώδης ασυνέχεια" στο x_0. Παράδειγμα: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(x) = 0$, $x = 0$.

<u>Πρόταση</u> : Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset)$ μονότονη συνάρτηση (αύξουσα ή φθίνουσα). Αν η f είναι ασυνεχής στο $x_0 \in A$ που είναι σ.σ. και από δεξιά και από αριστερά, τότε η f παρουσιάζει άλμα στο x_0.

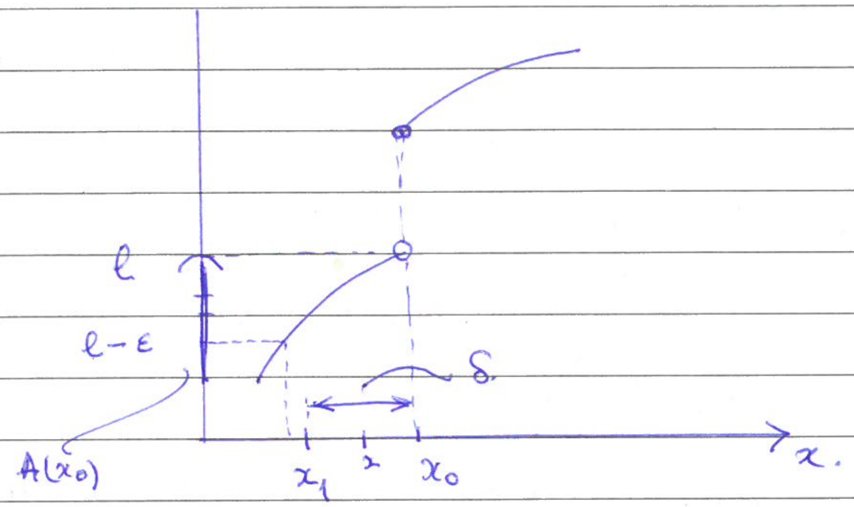
<u>Απόδειξη</u> : Έστω $f\uparrow$. Θα δείξουμε ότι τα όρια $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ υπάρχουν.

Ορίζουμε $A(x_0) = \{f(x) : x \in A, x < x_0\} \neq \emptyset$. Αν $x < x_0$ τότε $f(x) \leq f(x_0)$ και $A(x_0)$ άνω φραγμένο από το $f(x_0)$. Έστω $\ell = \sup A(x_0) \leq f(x_0)$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε $\ell - \varepsilon < \sup A(x_0)$. Άρα $\exists\, x_1 < x_0, x_1 \in A$: $\ell - \varepsilon < f(x_1) \leq \ell$ (χαρακτηρισμός supremum). Παίρνουμε $\delta = x_0 - x_1 > 0$. Αν $x_0 - \delta < x < x_0$, τότε

$$x_1 < x < x_0 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} \ell - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq \ell$$

δηλ. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ (ορισμός πλευρικού ορίου). ⇒



Παρόμοια: $\lim\limits_{x\to x_0^+} = m \neq \ell$ (διαφορετικά η f θα ήταν συνεχής στο x_0)

Επομένως η f παρουσιάζει άλμα στο x_0. □

<u>Θεώρημα</u> (συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης)
Έστω διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και $f: I \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση (αύξουσα ή φθίνουσα) και συνεχής στο I. Τότε η $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα, αντίστοιχα) και συνεχής στο $f(I)$.

<u>Απόδειξη</u>: Σημειώσεις!

<u>Συνέχεια κλασσικών συναρτήσεων</u>

(α) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$: Απόδειξη συνέχειας επαγωγικά (Ισχύει για $n=1$ από προηγούμενη απόδειξη, έστω ότι ισχύει για $n \in \mathbb{N}$. Τότε $x^{n+1} = x^n \cdot x$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων).

(β) Πολυωνυμική συνάρτηση $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(p[x] \in \mathbb{R}[x])$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ $(a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$. Συνεχής (ιδιότητες συνέχειας).

(γ) Ρητή συνάρτηση : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $p, q \in \mathbb{R}[x]$. Από (β) καί ιδιότητες συνέχειας.

(δ) Συναρτήσεις: $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ (Τό έχουμε ήδη αποδείξει). Από τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x - x_0}{2} \right|$$

$$= 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x - x_0}{2} \right|$$

$$\leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon$ καί τότε $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, άρα $\sin(\cdot)$ συνεχής στό x_0 (καί εφόσον x_0 αυθαίρετο συνεχής στό $\mathbb{R}$). Παρόμοια γιά $\cos x$ μέ χρήση ταυτότητας:

$$\cos x - \cos x_0 = 2 \sin \frac{x_0 - x}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}.$$

Συνέχεια συναρτήσεων: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ καί $\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ από ιδιότητες συνέχειας

(ε) Εκθετική συνάρτηση : $\exp(x) = e^x : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Πρέπει νά δείξουμε ότι

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |e^x - e^{x_0}| < \varepsilon$$

Ισοδύναμα, θέτοντας $h = x - x_0$:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : |h|<\delta \Rightarrow |e^{x_0+h}-e^{x_0}|<\varepsilon.$$

Έχουμε:

$$|e^{x_0+h}-e^{x_0}| = e^{x_0}|e^h-1| = e^{x_0}\left(\cancel{1}+h+\frac{h^2}{2!}+\dots-\cancel{1}\right)$$

$$= e^{x_0}\left|h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\dots+\frac{h^n}{n!}+\dots\right|$$

$$\leq e^{x_0}|h|\left(1+\frac{|h|}{2!}+\frac{|h|^2}{3!}+\dots+\frac{|h|^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{|h|^n}{(n+1)!}+\dots\right).$$

Ισχύει ότι: $n! \geq 2^{n-1}$ γιά $n\in\mathbb{N}$. Απόδειξη επαγωγικά: $1!=1=2^0=1$, Έστω ότι $n!\geq 2^{n-1}$. Τότε $(n+1)! = n!(n+1) \geq 2^{n-1}(n+1) = 2^n\cdot\frac{n+1}{2} \geq 2^n$. Επομένως.

$$|e^{x_0+h}-e^{x_0}| \leq e^{x_0}|h|\left(1+\frac{|h|}{2}+\frac{|h|^2}{2^2}+\dots+\frac{|h|^n}{2^n}+\dots\right)$$

$$= \frac{e^{x_0}|h|}{1-\frac{|h|}{2}} = \frac{2e^{x_0}|h|}{2-|h|}.$$

αν $|h|<2$. Αν $\frac{2e^{x_0}|h|}{2-|h|}<\varepsilon \Rightarrow 2e^{x_0}|h| < 2\varepsilon-\cancel{2}\varepsilon|h|$

$$\Rightarrow (2e^{x_0}+\cancel{2}\varepsilon)|h| < 2\varepsilon \Rightarrow |h| < \frac{2\varepsilon}{2e^{x_0}+\varepsilon}$$

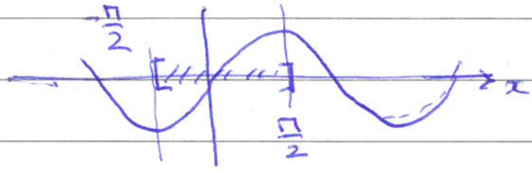
Έστω $\varepsilon>0$. ~~και~~ Επιλέγουμε

$$\delta = \min\left(\frac{2\varepsilon}{2e^{x_0}+\varepsilon}, 2\right) = \frac{2\varepsilon}{2e^{x_0}+\varepsilon}.$$

Τότε $|h|<\delta \Rightarrow |e^{x_0+h}-e^{x_0}|<\varepsilon$ καί η e^x είναι συνεχής στό x_0 (καί εφόσον x_0 αυθαίρετο είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$).

(3) Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

• Η συνάρτηση sin δεν είναι 1-1 αν το πεδίο ορισμού της είναι όλο το $\mathbb{R}$. Περιορίζουμε το π.ο. στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Τότε η $\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ είναι "1-1" και επί και ορίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση:



$\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,

η οποία είναι συνεχής (ως αντίστροφη συνεχούς συνάρτησης).

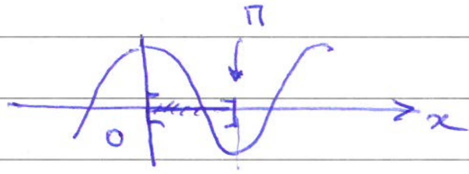
Παρόμοια αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$

τότε:

$\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$

συνεχής στο $[-1,1]$

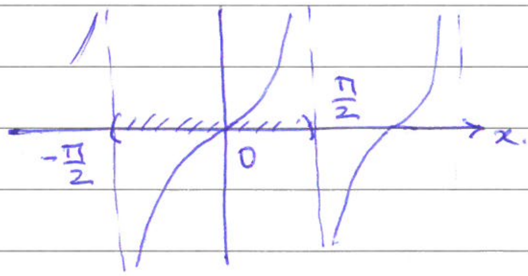


$\tan:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$,

τότε

$\arctan:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

συνεχής στο $\mathbb{R}$.

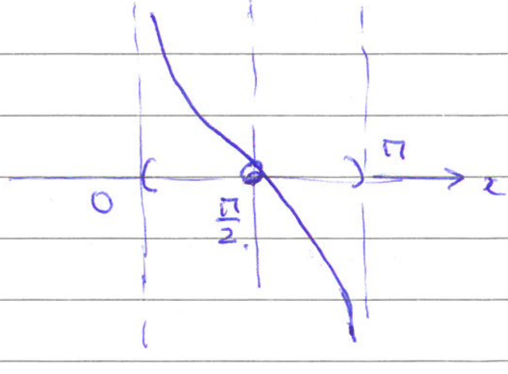


$\cot:(0,\pi)\to\mathbb{R}$

τότε

$\text{arccot}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$.

συνεχής στο $\mathbb{R}$.



• Η συνάρτηση $\exp:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Η αντίστροφη συνάρτηση $\ln:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ έχει τις ίδιες ιδιότητες.