1.6 Πραγματικοί αριθμοί

Το σύνολο των π αγματικών $\mathbb{R}$ ικανοποιεί την πράξη της πρόσθεσης, δηλαδή αν $a,b \in \mathbb{R}$, τότε $\exists c \in \mathbb{R}: a+b=c$. Η πρόσθεση ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

(R_1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (προσεταιριστικότητα).

(R_2) $a+b=b+a$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ (αντιμεταθετικότητα).

(R_3) $\exists$ το στοιχείο 0 του $\mathbb{R}$:

$$a+0=0+a=a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$ (ύπαρξη μηδενικού στοιχείου).

(R_4) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists$ το στοιχείο $-a$ του $\mathbb{R}$:

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$ (ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου).

Αν $a,b \in \mathbb{R}$, τότε η αφαίρεση των a,b ορίζεται ως

$$a-b=a+(-b).$$

Το $\mathbb{R}$ ικανοποιεί την πράξη του πολλαπλασιασμού, δηλαδή αν $a,b \in \mathbb{R}$, τότε $\exists c \in \mathbb{R}: a \cdot b = c$. Ο πολλαπλασιασμός ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

(R_5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (προσεταιριστικότητα).

(R_6) $a \cdot b = b \cdot a$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ (αντιμεταθετικότητα).

(R_7) $\exists$ το στοιχείο 1 του $\mathbb{R}$:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$ (ύπαρξη πολλαπλασιαστικής μονάδας).

(R_8) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists$ στοιχείο $a^{-1} \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$ (ύπαρξη αντιστρόφου).

Αν $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$, τότε η διαίρεση του a με το b ορίζεται ως
$$\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}.$$

Ο πολλαπλασιασμός συνδέεται με την πρόσθεση έτσι ώστε
(R_9) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ (επιμεριστικότητα).

Στο $\mathbb{R}$ υπάρχει μια σχέση διατάξεως $<$ ή $>$, η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:
(R_{10}) $\forall a,b\in\mathbb{R}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:
$a<b$ ή $a=b$ ή $a>b$ (αρχή τριχοτομίας).
(R_{11}) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, αν $a<b$ και $b<c$, τότε $a<c$ (μεταβατικότητα).
(R_{12}) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, αν $a<b$, τότε $a+c<b+c$.
(R_{13}) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, αν $a<b$ και $c>0$, τότε $a\cdot c<b\cdot c$.

<u>Παρατήρηση 1.3</u> (α) Το μηδενικό στοιχείο στην πρόσθεση είναι μοναδικό. Έστω ότι $\exists x\in\mathbb{R}: \forall a\in\mathbb{R}$ να ισχύει $a+x=a$. Τότε, από την υπόθεση, για $a=0$,
$$0+x=0.$$
Επίσης, από το (R_3), έπεται ότι
$$x+0=x.$$
Αλλά, λόγω του (R_2), έχουμε
$$x=x+0=0+x=0.$$
(β) Το αντίθετο στοιχείο στην πρόσθεση είναι μοναδικό. Πράγματι, έστω ότι για κάποιο $a\in\mathbb{R}$ $\exists b,c\in\mathbb{R}: a+b=a+c=0$. Τότε, έχουμε

$c \overset{(R_3)}{=\!=} c+0 \overset{\text{υπόθεση}}{=\!=} c+(a+b) \overset{(R_1)}{=\!=} (c+a)+b \overset{(R_2)}{=\!=} (a+c)+b \overset{\text{υπόθεση}}{=\!=} 0+b \overset{(R_3)}{=\!=} b.$

(γ) Εντελώς ανάλογα μπορούμε να αποδείξουμε την μοναδικότητα της πολλαπλασιαστικής μονάδας και του αντιστρόφου στοιχείου.

(δ) Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα $(R_1)-(R_8)$ μπορείτε να δείξετε διάφορες ιδιότητες στο $\mathbb{R}$, όπως την ιδιότητα της διαγραφής στην πρόσθεση ή τον πολλαπλασιασμό.

Μια άμεση συνέπεια της αρχής της πληρότητας στο $\mathbb{R}$ είναι η ακόλουθη

<u>Πρόταση 1.3</u> Υπάρχει μοναδικός θετικός $x \in \mathbb{R}: x^2=2$.

<u>Απόδειξη:</u> Στις σημειώσεις.

Μία άλλη συνέπεια της αρχής της πληρότητας είναι η ακόλουθη.

<u>Πρόταση 1.4</u> Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο, τότε το A έχει infimum.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω y ένα κάτω φράγμα του A. Τότε, $y \leq a \ \forall a \in A$, οπότε, $-a \leq -y \ \forall a \in A$. Άρα, το $-y$ είναι <u>άνω φράγμα</u> του συνόλου $-A=\{-a : a \in A\}$. Επομένως, από την αρχή της πληρότητας το $-A$ έχει supremum και έστω $\sup(-A)=s$.

Θα δείξουμε ότι το $t=-s$ είναι το infimum του A ($\inf A=-s$).

Πράγματι:

(i) Εφόσον $-a \leq s \ \forall a \in A$, έπεται ότι $t=-s \leq a \ \forall a \in A$, συνεπώς το t είναι κάτω φράγμα του A.

(ii) Αν t_1 είναι κάτω φράγμα του A, δηλαδή $t_1 \leq a \ \forall a \in A$, τότε $-a \leq -t_1 \ \forall a \in A$. Οπότε, το $-t_1$ είναι άνω φράγμα του $-A$, συνεπώς, $s\leq -t_1$, άρα, $t_1\leq -s=t$.

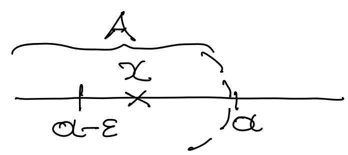
Το επόμενο αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως ορισμός για το supremum ή το infimum ενός συνόλου.

<u>Πρόταση 1.5</u> Έστω $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{R}$.

(α) Έστω α ένα άνω φράγμα του A. Τότε, $\alpha=\sup A$ α και μόνο αν $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in A: x>\alpha-\varepsilon$.

(β) Έστω α ένα κάτω φράγμα του A. Τότε, $\alpha=\inf A$ αν και μόνο αν $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in A: x<\alpha+\varepsilon$.

<u>Απόδειξη:</u> (α)



Έστω, κατ' αρχάς, ότι $\alpha=\sup A$ και κάποιο $\varepsilon>0$. Αν $\forall x\in A$ ισχύει ότι $x\leq\alpha-\varepsilon$, τότε το $\alpha-\varepsilon$ είναι άνω φράγμα του A. Οπότε, θα πρέπει

$$\sup A=\alpha\leq\alpha-\varepsilon,\ \text{δηλαδή } \varepsilon\leq 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Έτσι, για τυχαίο $\varepsilon>0$, μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον ένα $x\in A$, το οποίο βέβαια εξαρτάται από το ε, έτσι ώστε $x>\alpha-\varepsilon$.

<u>Αντίστροφα:</u> Κατ' αρχάς, εφόσον το α είναι άνω φράγμα του A, $\sup A\leq\alpha$. Έστω τώρα ότι $\sup A=b<\alpha$ (αν αποκλείσουμε ότι ισχύει αυτό, μένει ότι $\sup A=\alpha$, που είναι αυτό που θέλουμε να δείξουμε). Επιλέγουμε $\varepsilon=\alpha-b>0$ και δεδομένου ότι το b, ως $\sup A$, είναι άνω φράγμα του A έχουμε ότι, $\forall x\in A$,

$$x\leq b=\alpha-\varepsilon,$$

Δηλαδή για το $\varepsilon = \alpha - b > 0$ ισχύει ότι $x \leq \alpha - \varepsilon$, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεσή μας ότι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A : x > \alpha - \varepsilon$.

Συνεπώς, δεν ισχύει $\sup A < \alpha$, αλλά ότι $\sup A = \alpha$.

(β) Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη και αφήνεται ως άσκηση.