

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 3ο Τεστ – Ομάδα Α΄

30 Νοεμβρίου 2020

1. (4 μον.) (α) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

(β) Εξετάστε για ποιες τιμές του $a > 0$ συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 + 1} - k}{k^a}.$$

2. (4 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(α) Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(β) Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και $k^2 a_k \rightarrow 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(γ) Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και $a_k \rightarrow 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

3. (4 μον.) (α) Αποδείξτε ότι αν $a_k > 0$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

(β) Προσδιορίστε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους συγκλίνει η δυναμοσειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{3^k}.$$