Ανάλυση I και Εφαρμογές – 19/9/2017

1. (1.5μ) (α) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $s = \sup A$. Αποδείξτε ότι: αν ο s δεν ανήκει στο A τότε για κάθε $\epsilon > 0$ το διάστημα $(s-\epsilon, s)$ περιέχει άπειρα στοιχεία του συνόλου A.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$ ισχύει $[\sqrt{n^2+2n}] = n$. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι το supremum και το infimum του συνόλου $A = \{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] : n = 1, 2, \ldots\}$ είναι ίσα με 1 και 0 αντίστοιχα. Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας (με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x).

2. (2μ) (α) Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = n - \sqrt{n^2 - n}, \quad \beta_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \quad \gamma_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

(β) Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$x_1 = 2 \qquad \text{και} \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \ \text{ για } \ n = 1, 2, \ldots.$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και ότι $x_n \to +\infty$.

3. (2μ) (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν οι παρακάτω σειρές και προσδιορίστε το άθροισμά τους αν συγκλίνουν (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

(β) (i) Έστω $(a_k)_{k\geqslant 1}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει κι αυτή.

(ii) Να δοθεί παράδειγμα ακολουθίας $(a_k)_{k\geqslant 1}$ πραγματικών αριθμών τέτοιας ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ να συγκλίνει αλλά η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ να αποκλίνει.

4. (2μ) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) \leqslant M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δοθεί παράδειγμα το οποίο να δείχνει ότι η f δεν παίρνει απαραίτητα μέγιστη τιμή.

(β) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις, συνεχείς στο 0. Αν $f(0) > g(0)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $y, z \in (-\delta, \delta)$ ισχύει $f(y) > g(z)$.

5. (2μ) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $f(a) > 0$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο a. Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 1$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα εξετάστε ποιος είναι μεγαλύτερος: ο $2^{\sqrt{2}}$ ή ο e;

6. (1.5μ) (α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor αποδείξτε πλήρως ότι $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$ (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

7. (2μ) (α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \sin^2 x \, dx \qquad \text{και} \qquad \int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\, dx.$$

(β) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αποδείξτε πλήρως ότι

$$\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right).$$

Καλή Επιτυχία!