Π. ΖΕΡΒΟΥ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΤΡΙΤΗ ΕΚΔΟΣΙΣ

ΤΟΜΟΣ Α.'

ΣΥΝΟΛΑ — ΟΡΙΑ — ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ — ΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ — ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ
1952

Α Σ Υ Μ Μ Ε Τ Ρ Ο Ι   Α Ρ Ι Θ Μ Ο Ι

Κ α τ ά   π ρ ο σ έ γ γ ι σ ι ν
π ρ ο σ δ ι ο ρ ι σ μ ό ς   κ λ ά σ μ α τ ο ς

Ι.Θεωρήσωμεν τυχόντα ρητόν ἀριθμόν μή τρεπόμενον εἰς δεκαδικόν ἀκριβῶς· π.χ. τόν $7\frac{8}{33}$. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς,ὅτι οὗτος τρέπεται εἰς τό ἁπλοῦν περιοδικόν κλάσμα 7,242424... Οἱ ἀριθμοί:

(α) 7,2 , 7,24 , 7,242 , 7,2424...

εἶναι αἱ κατά προσέγγισιν $\frac{I}{I0}$, $\frac{I}{I00}$... τιμαί τοῦ $7\frac{8}{33}$ κατ'ἔλλειψιν,καί αἱ τιμαί:

(β) 7,3 , 7,25 , 7,243 , 7,2425...

εἶναι αἱ κατά προσέγγισιν $\frac{I}{I0}$,$\frac{I}{I00}$... τιμαί τοῦ $7\frac{8}{33}$ καθ' ὑπεροχήν.

Παρατηροῦμεν ἤδη,ὅτι ἔχομεν δύο ἀκολουθίας (α) καί (β) μέ τάς ἑξῆς ἰδιότητας:

I) Οἱοσδήποτε ἀριθμός τῆς ἀκολουθίας (α) εἶναι μικρότερος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ τῆς ἀκολουθίας (β).

II)'Εάν δοθῇ ἀριθμός τις θετικός ε,ὁσονδήποτε μικρός, δυνάμεθα πάντοτε νά εὕρωμεν ἀριθμόν τῆς ἀκολουθίας (β) καί ἀριθμόν τῆς ἀκολουθίας (α) διαφέροντας ἀπ' ἀλλήλων ὀλιγώτερον τοῦ ε.

Π.χ."Εστω ὅτι ἐδόθη ὡς ε ὁ ἀριθμός $\frac{2}{93}$· αὐτός εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $\frac{I}{I00}$· ἀρκεῖ νά λάβω ἐκ τῆς ἀκολουθίας (α) τό 7,24 ἤ οἱονδήποτε ἑπόμενόν του καί ἐκ τῆς ἀκολουθίας (β) τό 7,243 ἤ οἱονδήποτε ἑπόμενόν του,ἵνα ἔχω δύο ἀριθμούς τῶν δύο ἀκολουθιῶν (α) καί (β) μέ διαφοράν μικροτέραν τοῦ $\frac{I}{100}$, ἑπομένως καί τοῦ ε.

Ὅπως ἐσχηματίσαμεν τάς ἀκολουθίας (α) καί (β), οὕτω θά ἠδυνάμεθα νά σχηματίσωμεν ἀκολουθίας, θεωροῦντες τιμάς τοῦ $7\frac{8}{33}$ κατά προσέγγισιν $\frac{I}{II}$, $\frac{I}{II^2}$, $\frac{I}{II^3}$..., ἤ κατά προσέγγισιν $\frac{I}{\alpha}$, $\frac{I}{\alpha^2}$... $(\alpha > I)$, ἤ καί γενικώτερον κατά προσέγγισιν $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$..., ὅπου τά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$... εἶναι θετικά καί βαίνουν διαρκῶς ἐλαττούμενα, καθίστανται δέ μικρότερα οἱασδήποτε μικρᾶς ποσότητος θετικῆς δοθείσης.

Ὁρισμός τῶν ἀσυμμέτρων δι' ἀνισοτήτων.

2. Θεωρήσωμεν πάλιν τόν ρητόν ἀριθμόν $7\frac{8}{33}$. Δυνάμεθα νά νοήσωμεν ὅλους τούς ρητούς ἀριθμούς χωρισμένους εἰς δύο τάξεις, Α καί Β, εἰς τρόπον, ὥστε εἰς τήν πρώτην **Α** νά ἀνήκωσιν ὅλοι οἱ ρητοί οἱ μικρότεροι τοῦ $7\frac{8}{33}$, ὅπως καί αὐτός οὗτος ὁ $7\frac{8}{33}$, εἰς δέ τήν ἄλλην Β πάντες οἱ λοιποί, δηλ. οἱ μεγαλύτεροι τοῦ $7\frac{8}{33}$. Ὁ ἀριθμός $7\frac{8}{33}$, ὅστις εἶναι τό σύνορον τῶν δύο τάξεων, δύναται νά νοηθῇ ὡς <u>σύμβολον</u> αὐτοῦ τοῦ καταμερισμοῦ.

Θά ἠδυνάμεθα ὁμοίως νά νοήσωμεν τό σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν χωρισμένον εἰς δύο τάξεις Α καί Β τοιαύτας, ὥστε εἰς τήν μίαν τάξιν Α ν'ἀνήκωσιν ὅλοι οἱ ρητοί οἱ μικρότεροι τοῦ $7\frac{8}{33}$, εἰς δέ τήν ἄλλην ὁ $7\frac{8}{33}$ καί πάντες οἱ μεγαλύτεροι αὐτοῦ. Καί πάλιν ὁ $7\frac{8}{33}$ εἶναι τό σύμβολον τοῦ γενομένου καταμερισμοῦ.

Καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

I) Πᾶς ἀριθμός τῆς τάξεως Α εἶναι μικρότερος παντός ἀριθμοῦ τῆς τάξεως Β.

II) Δοθέντος ἀριθμοῦ ρητοῦ θετικοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ ε, δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἀριθμόν ἀπό τήν τάξιν Β καί ἀριθμόν ἀπό τήν τάξιν Α τοιούτους,ὥστε ἡ διαφορά των νά εἶναι μικροτέρα τοῦ ε.

Εἰς τό πρῶτον τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ὁ $7\frac{8}{33}$ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπό ὅλους τῆς πρώτης τάξεως (ἀνήκων εἰς τήν τάξιν),εἰς τό δεύτερον παράδειγμα ὁ $7\frac{8}{33}$ εἶναι ὁ μικρότερος ἀπό ὅλους τῆς δευτέρας τάξεως ἀνήκων εἰς τήν τάξιν. Ὅπως εἰργάσθημεν μέ τόν $7\frac{8}{33}$,θά ἠδυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν καί μέ οἱονδήποτε ἄλλον ρητόν. Ὥστε διά πάντα ρητόν ἔχομεν ἕνα (καί ἕνα μόνον) τοιοῦτον χωρισμόν τῶν ρητῶν εἰς δύο τάξεις.

Πλήν ὅμως τῶν καταμερισμῶν αὐτῶν δυνάμεθα νά ἔχωμεν καί καταμερισμούς τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἰς δύο τάξεις Α καί Β τοιαύτας,ὥστε οἱοσδήποτε ἀριθμός τῆς πρώτης νά εἶναι μικρότερος ἀπό οἱονδήποτε τῆς δευτέρας,χωρίς ὅμως νά δυνάμεθα νά εὕρωμεν οὔτε ἐν τῇ πρώτῃ τάξει ἀριθμόν μεγαλύτερον ἀπό ὅλους τούς ἄλλους (ἀνήκοντα εἰς τήν τάξιν), οὔτε ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀριθμόν μικρότερον ἀπό ὅλους τούς ἄλλους. Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι πρόκειται νά λύσωμεντήν ἐξίσωσιν $\chi^2-5=0$ ζητοῦντες, διά τήν σαφήνειαν,θετικήν λύσιν. Οὐδείς ρητός ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν αὐτήν [1]). Θεωροῦμεν ἤδη τό σύνολον τῶν θετικῶν ρητῶν,οἵτινες ἐπαληθεύουσι τήν $\chi^2-5>0$ καί τό σύνολον τῶν θετικῶν ρητῶν οἵτινες ἐπαληθεύουσι τήν $\chi^2-5<0$· χωρίζομεν τούς ρητούς εἰς δύο τάξεις Α καί Β,τοποθετοῦντες εἰς τήν πρώτην τάξιν ὅλους τούς θετικούς ρητούς,τῶν ὁποίων τό τετράγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ 5,ὡς ἐπίσης τό μηδέν καί ὅλους τούς ἀρνητικούς ρητούς,εἰς δέ τήν δευτέραν ὅλους τούς θετικούς ρητούς,τῶν ὁποίων τό τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5. Προφανῶς πᾶς ρητός ἀνήκει ἤ εἰς τήν μίαν ἤ εἰς τήν ἄλλην τάξιν,ἰσχύουν δέ εἰς τόν καταμερισμόν αὐτόν αἱ ἰδιότητες Ι καί ΙΙ. Ὅπως ἀνωτέρω ὁ $7\frac{8}{33}$ ἐθεωρήθη ὡς σύμβολον τοῦ γενομένου καταμερισμοῦ,οὕτω καί ἐδῶ,ὅπου ὅμως δέν ὑπάρχει μεγαλύτερος ρητός τῆς τάξεως Α,οὔτε μικρό-

[1]) Ἰδέ Θεωρητικήν Ἀριθμητικήν Μαρίας Ζερβοῦ σελ. 140.
[2]) Ἡ δικαιολογία τῆς ἀντιστοιχίας τῶν νέων τούτων καταμερισμῶν πρός ἀριθμούς,ἔγκειται εἰς τοῦτο·ὅτι,ἀφοῦ ὁρισθῶσιν αἱ πράξεις καί ἡ

τερος ρητός τῆς τάξεως Β, θά λέγωμεν ὅτι σύμβολον τοῦ καταμερισμοῦ αὐτοῦ εἶναι ἀριθμός τις ἀσύμμετρος [2]), ἐπαληθεύων τήν ἐξίσωσιν $\chi^2=5$· θά νοῶμεν τουτέστιν, ὅτι ὁ ἀνωτέρω καταμερισμός ὁρίζει ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ὅστις ἐνταῦθα σημειοῦται διά τοῦ $\sqrt{5}$. Διά τοῦ συμβόλου τούτου νοοῦμεν ἐδῶ ἀριθμόν μεγαλύτερον πάντων τῶν τῆς τάξεως Α καί μικρότερον πάντων τῶν τῆς τάξεως Β, ἤτοι θά νοῶμεν αὐτόν παρεμβαλόμενον μεταξύ τῶν δύο τάξεων.

3. Ἔστω γενικῶς ὅτι ἐχωρίσθησαν κατά τινα μέθοδον ὅλοι οἱ ρητοί ἀριθμοί εἰς δύο τάξεις Α καί Β, τοιαύτας, ὥστε πᾶς ἀριθμός τῆς Α νά εἶναι μικρότερος παντός ἀριθμοῦ τῆς Β. Τότε τρεῖς περιπτώσεις δύνανται νά παρουσιασθῶσι:

Περίπτωσις Ι. Ἡ τάξις Α νά περιέχῃ ἀριθμόν τ μεγαλύτερον παντός ἄλλου, ἀνήκοντος εἰς αὐτήν.

Περίπτωσις ΙΙ. Ἡ τάξις Β νά περιέχῃ ἀριθμόν τ μικρότερον ἀπό ὅλους τούς ἄλλους, τούς ἀνήκοντας εἰς αὐτήν.

Καί εἰς τάς δύο ταύτας περιπτώσεις ὁ ἀριθμός τ δύναται νά νοηθῇ ὡς τό σύμβολον τοῦ καταμερισμοῦ καί λέγομεν ὅτι ὁ τ προσδιορίζει τήν τομήν (Α,Β) καί ὅτι ἡ τομή εἶναι ρητή.

Περίπτωσις ΙΙΙ. Δέν ὑπάρχει οὔτε μεγαλύτερος εἰς τήν τάξιν Α, οὔτε μικρότερος εἰς τήν τάξιν Β [1])· τότε λέγομεν ὅτι, ἡ τομή εἶναι ἀσύμμετρος.

Ἔχομεν οὕτως ὅτι εἰς ἕκαστον καταμερισμόν τῶν ρητῶν εἰς δύο τάξεις Α καί Β, τοιαύτας ὥστε πᾶς ἀριθμός τῆς Α νά εἶναι μικρότερος παντός ἀριθμοῦ τῆς τάξεως Β, ἀντιστοιχεῖ, ἕνας (καί μόνον) ἀριθμός ρητός ἤ ἀσύμμετρος, ὁ ὁποῖος χρησιμεύει ὡς σύμβολον τοῦ καταμερισμοῦ αὐτοῦ καί λέγεται τομή (Dedekind) [2]).

ανισότης ἐπ' αὐτῶν, καθ' ὅν τρόπον θά ἴδωμεν κατωτέρω, ἐξακολουθοῦν ἰσχύουσαι ὅλαι, αἱ ἐπί τῶν ρητῶν, θεμελιώδεις ἰδιότητες, ἐξ' ὧν, ἀπορρέει ὁλόκληρος ἡ Ἀριθμητική. Ἰδιαιτέρως ἰσχύει, εἰς τήν εὐρυτάτην ταύτην ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ πρότασις τοῦ Ἀρχιμήδους καί ἡ πρότασις, ὅτι μεταξύ δύο ἀριθμῶν ὑπάρχει πάντοτε εἷς τουλάχιστον, καί συνεπῶς ὑπάρχουσιν ἄπειροι ρητοί ἀριθμοί.

[1]) Εἶναι φανερόν, ὅτι ἀποκλείεται ἡ περίπτωσις, νά ὑπάρχῃ μεγαλύτερος ἀριθμός τ εἰς τήν τάξιν Α καί μικρότερος λ εἰς τήν Β· διότι, ἄν ὑπῆρχε τοιαύτη περίπτωσις, ὁ ἀριθμός $\frac{\tau+\lambda}{2}$ (ρητός) θά ἐπλήρου τήν σχέσιν $\tau < \frac{\tau+\lambda}{2} < \lambda$ καί ἑπομένως δέν θ' ἀνῆκε οὔτε εἰς τήν τάξιν Α, οὔτε εἰς τήν τάξιν Β, ὁπότε θά ὑπῆρχε ρητός ἐκτός τῶν δύο τάξεων.

Τό ἀντίστροφον εἶναι ἐπίσης ἀληθές, ἄν τούς καταμερισμούς τῶν δύο πρώτων περιπτώσεων θεωρήσωμεν ὡς ἕνα μόνον.

Ὁρισμός ἰσότητος καί ἀνισότητος τῶν ἀσυμμέτρων.

4. Ἔστωσαν δύο ἀσύμμετροι ξ, ξ' καί ἔστωσαν Α, Β αἱ τάξεις, αἱ ὁρίζουσαι τήν τομήν ξ καί Α', Β' αἱ τάξεις, αἱ ὁρίζουσαι τήν τομήν ξ'· ἔχομεν τρεῖς περιπτώσεις:

Περίπτωσις Ι. Αἱ τάξεις Α καί Α' νά εἶναι αἱ αὐταί· τότε καί αἱ τάξεις Β καί Β' θά εἶναι αἱ αὐταί, οἱ δέ ἀριθμοί ξ καί ξ' ὁρίζονται ἀπό τήν αὐτήν τομήν. Θά λέγωμεν τότε, ὅτι οἱ ἀσύμμετροι ξ καί ξ' εἶναι ἴσοι καί θά γράφωμεν $\xi = \xi'$.

Περίπτωσις ΙΙ. Ὑπάρχει εἰς τήν τάξιν Α' ἀριθμός μή ἀνήκων εἰς τήν τάξιν Α, ἑπομένως ἀνήκων εἰς τήν τάξιν Β, ἤτοι ὑπάρχει ρητός ἀριθμός μικρότερος τοῦ ξ' (συμφώνως πρός τά ἀνωτέρω τεθέντα), ὁ ὁποῖος εἶναι καί μεγαλύτερος τοῦ ξ· θά λέγωμεν τότε ὅτι ξ' εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ξ καί θά γράφωμεν: $\xi' > \xi$.

Περίπτωσις ΙΙΙ. Ὑπάρχει εἰς τήν τάξιν Α ἀριθμός μή ἀνήκων εἰς τήν Α', ἑπομένως ἀνήκων εἰς τήν τάξιν Β', θά λέγωμεν τότε ὅτι ὁ ξ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ξ' καί θά γράφωμεν: $\xi > \xi'$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν προκύπτει ὅτι:

1) Ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα $\xi = \xi'$ εἶναι ἡ ἑξῆς: Πᾶς ρητός μικρότερος τοῦ ἑνός τῶν ἀσυμμέτρων νά εἶναι καί μικρότερος τοῦ ἄλλου.

2) Ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα $\xi < \xi'$ εἶναι ἡ ἑξῆς: Νά ὑπάρχῃ ρητός ἀριθμός, μικρότερος τοῦ ἑνός ἀσυμμέτρου ξ' καί μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου ξ.

Οἱ ρητοί καί οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοί λέγονται μέ ἕν ὄνομα <u>πραγματικοί</u> ἀριθμοί.

Καταμερισμός ὅλων τῶν πραγματικῶν εἰς δύο τάξεις

5. Εἴδομεν μέ ἕν παράδειγμα ἀνωτέρω, ὅτι ἐάν περιορι-

2) Ἡ καθαρῶς ἀριθμητική ἔννοια τῆς τομῆς ὀφείλεται εἰς τόν Dedekind.

σθῶμεν μόνον εἰς τούς ρητούς ἀριθμούς,δέν ἔχομεν πάντοτε τομήν ἕνα <u>ρητόν</u> ἀριθμόν.

Ἤδη,ἐάν θεωρησωμεν,ὅτι,μέ ἕνα οἱονδήποτε τρόπον,ἐχωρίσαμεν <u>ὅλους τούς πραγματικούς</u> ἀριθμούς εἰς δύο τάξεις Α καί Β,τοιαύτας,ὥστε πᾶς ἀριθμός τῆς Α νά εἶναι μικρότερος παντός τῆς Β([1]) θά ὑπάρχῃ <u>πάντοτε</u> πραγματικός ἀριθμός λ, (δηλ.ρητός ἤ ἀσύμμετρος) τοιοῦτος ὥστε πᾶς μικρότερος τοῦ λ νά ἀνήκῃ εἰς τήν Α καί πᾶς μεγαλύτερος τοῦ λ ν'ἀνήκῃ εἰς τήν Β δηλ. θά ὑπάρχῃ ἀριθμός τις πραγματικός λ,ὅστις θά ὁρίζῃ τήν τομήν.Τοῦτο φαίνεται ὡς ἑξῆς: Ἄς θεωρήσωμεν τούς ρητούς τούς ἀνήκοντας εἰς τήν τάξιν Α,οἵτινες ἀποτελοῦσι τάξιν τινά A_ρ, καί τούς ρητούς τούς ἀνήκοντας εἰς τήν τάξιν Β, οἵτινες ἀποτελοῦσι τάξιν τινά B_ρ ἡ τάξις Α θά ἀποτελῆται ἀπό τήν τάξιν A_ρ καί τήν τάξιν A_α (ἐάν A_α καλέσωμεν τήν τάξιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν τῶν ἀνηκόντων εἰς τήν Α) ὁμοίως, ἡ Β θά ἀποτελῆται ἀπό τήν B_ρ καί τήν B_α.

Κατά τά ἀνωτέρω,αἱ τάξεις A_ρ καί B_ρ,ὁρίζουσι τομήν ἕνα ἀριθμόν ρητόν ἤ ἀσύμμετρον· ἄς τόν καλέσωμεν λ·λέγω, ὅτι πᾶς μικρότερος τοῦ λ (ρητός ἤ ἀσύμμετρος),ἀνήκει εἰς τήν τάξιν Α καί πᾶς μεγαλύτερος τοῦ λ ἀνήκει εἰς τήν τάξιν Β·καί τῷ ὄντι, πᾶς μικρότερος τοῦ λ θά εἶναι ἤ ρητός ἤ ἀσύμμετρος καί ἐάν εἶναι ρητός θά ἀνήκῃ (συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τοῦ λ) εἰς τήν τάξιν A_ρ ἐάν δέ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός τις ξ,θά ὑπάρχῃ μεταξύ τοῦ ξ καί λ ρητός ἀριθμός καί ἑπομένως ἀπειρία ρητῶν·ἔστω τοιοῦτος τις ρητός ὁ κ·αὐτός θά εἶναι ρητός μικρότερος τοῦ λ, ἑπομένως ἀνήκει εἰς τήν τάξιν A_ρ·ἄρα ὁκ θά ἀνήκῃ καί εἰς τήν τάξιν Α·καί ἑπομένως θά εἶναι μικρότερος παντός ἀριθμοῦ τῆς τάξεως Β (συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τῶν τάξεων Α καί Β), ὥστε ἐάν ὁ ξ ἀνῆκεν εἰς τήν τάξιν Β θά εἴχομεν $\kappa < \xi$ ἐνῷ ὑπεθέσαμεν ὅτι $\kappa > \xi$· ἄρα ὁ ξ ἀνήκει εἰς τήν τάξιν Α. Ὁμοίως φαίνεται ὅτι πᾶς μεγαλύτερος τοῦ λ ἀνήκει εἰς τήν τάξιν Β,ὅθεν:ὁ λ,ὅστις εἶναι τομή τῶν τάξεων A_ρ καί B_ρ εἶναι καί τομή τῶν τάξεων Α καί Β.

---

[1])Ὑποθέτομεν πάντοτε ὅτι καί αἱ δύο τάξεις περιλαμβάνουν ἀριθμούς.

Πράξεις ἐπί τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐν γένει

6. Μέ τά ἀνωτέρω περί τομῆς ἐκτεθέντα δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν τάς πράξεις ἐπί τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐν γένει.

Πρόσθεσις. Ἔστωσαν λ καί λ' δύο πραγματικοί ἀριθμοί. Καλέσωμεν A καί B τάς τάξεις τῶν ρητῶν τάς ὁριζούσας τόν λ, καί A' καί B' τάς τάξεις τῶν ρητῶν τάς ὁριζούσας τόν λ'. ἐάν θεωρήσωμεν τέσσαρας οἱουσδήποτε ρητούς ἀριθμούς, α, β, α', β' ἀνήκοντας εἰς τάς τέσσαρας αὐτάς τάξεις, ἐπαληθεύοντας δέ τάς σχέσεις

$$\alpha < \lambda < \beta \quad , \quad \alpha' < \lambda' < \beta'$$

θά ἔχωμεν

$$\alpha + \alpha' < \beta + \beta' .$$

Ἄς νοήσωμεν ἤδη ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς χωρισμένους εἰς δύο τάξεις Γ καί Δ, ὁριζομένας ὡς ἑξῆς· εἰς τήν τάξιν Γ ἀνήκει πᾶς ἀριθμός μικρότερος ἀπό ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν τῆς μορφῆς $\beta + \beta'$, ἑπομένως εἰς τήν τάξιν Γ ἀνήκουν καί πάντες οἱ ἀριθμοί τῆς μορφῆς $\alpha + \alpha'$, εἰς δέ τήν τάξιν Δ ἀνήκουν πάντες οἱ λοιποί, ἑπομένως εἰς τήν Δ ἀνήκουν καί πάντες οἱ ἀριθμοί $\beta + \beta'$. Ἄς καλέσω X τόν ἀριθμόν, ὅστις εἶναι τό σύνορον ἤ ἡ τομή τῶν δύο τάξεων Γ καί Δ· αὐτός θά εἶναι, προφανῶς, μικρότερος παντός ἀριθμοῦ $\beta + \beta'$ (ἴσος μέ ἀριθμόν τινά $\beta + \beta'$ δέν δύναται νά εἶναι, διότι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\beta + \beta'$ δέν ὑπάρχει μικρότερος) καί μεγαλύτερος παντός ἀριθμοῦ $\alpha + \alpha'$ (ἴσος δέν δύναται νά εἶναι, διότι δέν ὑπάρχει μεγαλύτερος μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\alpha + \alpha'$). Εὑρήκαμεν οὕτω ἀριθμόν X, μικρότερον παντός ἀριθμοῦ $\beta + \beta'$ καί μεγαλύτερον παντός ἀριθμοῦ $\alpha + \alpha'$. Δέν εἶναι δυνατόν νά εὕρωμεν καί ἄλλον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νά εἶναι μικρότερος παντός ἀριθμοῦ $\beta + \beta'$ καί μεγαλύτερος παντός ἀριθμοῦ $\alpha + \alpha'$. Τοῦτο φαίνεται καί ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς· ἔστω ξ τοιοῦτος ἀριθμός, διάφορος τοῦ X· θά εἴχομεν μεταξύ τῶν ξ καί X ἀπείρους ρητούς· ἔστωσαν ρ καί σ δύο ἐξ αὐτῶν· θά εἴχομεν καί διά τόν ρ, ὅτι εἶναι μικρότερος παντός ἀριθμοῦ $\beta + \beta'$ καί μεγαλύτερος παντός ἀριθμοῦ $\alpha + \alpha'$, ὅπως, ἐπίσης καί διά τόν σ· ἤτοι θά εἴχομεν:

$$\alpha + \alpha' < \rho < \sigma < \beta + \beta'$$

(ἐθέσαμεν $\rho < \sigma$). Καί ἑπομένως: $\sigma - \rho < (\beta + \beta') - (\alpha + \alpha')$

ἀλλ' ἡ διαφορά $\sigma - \rho$, θά ἦτο σταθερός τις ἀριθμός ε· ἐνῷ, ἀφ' ἑτέρου, ἡ διαφορά $(\beta + \beta') - (\alpha + \alpha')$ γίνεται ὅσον θέλομεν μικρά, ἀρκεῖ νά λάβωμεν τάς διαφοράς $\beta' - \alpha'$ καί $\beta - \alpha$ ἱκανῶς μικράς· ἑπομένως τό δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος θά γίνεται καί μικρότερον τοῦ ε. Ἑπομένως δέν θά ἴσχυεν ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης διά πάντα τά συστήματα τῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$· τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· ἄρα ὁ ξ δέν θά διαφέρῃ τοῦ λ''.

Τόν ἀριθμόν λ'' καλοῦμεν <u>ἄθροισμα</u> τῶν ἀριθμῶν λ καί λ' καί σημειοῦμεν: $\lambda'' = \lambda + \lambda'$

<u>'Αφαίρεσις</u>: 'Αποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι δοθέντων τῶν λ, καί λ' εὑρίσκεται εἷς καί μόνος ἀριθμός δ, ὅστις προστιθέμενος εἰς τόν λ' δίδει τόν λ σημειοῦμεν δέ τότε $\delta = \lambda - \lambda'$

7. <u>Πολλαπλασιασμός</u>: Ἔστωσαν δύο τυχόντες θετικοί ἀριθμοί λ καί λ'. Καλέσωμεν A καί B τάς τάξεις τῶν ρητῶν τάς ὁριζούσας τόν λ, καί A' καί B' τάς τάξεις τῶν ρητῶν τάς ὁριζούσας τόν λ'.

'Εάν θεωρήσωμεν τέσσαρας θετικούς ρητούς ἀριθμούς $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ἀνήκοντας εἰς τάς τέσσαρας αὐτάς τάξεις, ἐπαληθεύοντας δέ τάς ἀνισότητας $\alpha < \lambda < \beta$ $\alpha' < \lambda' < \beta'$ θά ἔχωμεν $\alpha\alpha' < \beta\beta'$.

'Εργαζόμενοι ὅπως καί εἰς τήν πρόσθεσιν, ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὑπάρχει εἷς ἀριθμός θετικός καί εἷς μόνον, ὅστις θά εἶναι μικρότερος παντός γινομένου $\beta\beta'$ καί μεγαλύτερος παντός γινομένου $\alpha\alpha'$· τοῦτον καλοῦμεν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν λ καί λ' καί ἐάν τόν καλέσωμεν λ'' σημειοῦμεν: $\lambda'' = \lambda\lambda'$

Διά νά ἔχωμεν τό γινόμενον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν καί εἰς τήν περίπτωσιν, καθ' ἥν ὁ εἷς εἶναι ἀρνητικός ἤ καί ἀμφότεροι εἶναι ἀρνητικοί, λαμβάνομεν ὑπ' ὄψει καί τόν κανόνα τῶν σημείων, ἤτοι: $(-\lambda)\lambda' = -(\lambda\lambda')$, $(-\lambda)(-\lambda') = \lambda\lambda'$, $\lambda(-\lambda') = -(\lambda\lambda')$

8. <u>Διαίρεσις</u>: Εἰς ἕκαστον πραγματικόν ρητόν ἀριθμόν α, διάφορον τοῦ μηδενός ἀντιστοιχεῖ ἕνας πραγματικός ρητός α' τοιοῦτος ὥστε: $\alpha . \alpha' = 1$· τότε καλοῦμεν τόν α' ἀντίστροφον τοῦ α, καί τόν σημειοῦμεν: $\frac{1}{\alpha} = \alpha'$

Θεωρήσωμεν ἤδη ἀσύμμετρον ἀριθμόν θετικόν λ· ζητοῦμεν ἀριθμόν λ' τοιοῦτον ὥστε $\lambda\lambda' = 1$. Ἄς καλέσωμεν B τήν τάξιν τῶν ρητῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ λ καί A τήν τάξιν τῶν θετικῶν ρητῶν τῶν μικροτέρων τοῦ λ· οἱ ἀντίστροφοι τῶν ρητῶν τῆς τάξεως Α θά ἀποτελέσουν τάξιν τινά Β΄ καί οἱ ἀντίστροφοι τῶν ρητῶν τῆς τάξεως Β,μετά τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν ἀριθμῶν καί τοῦ μηδενός θά ἀποτελέσουν τήν τάξιν τῶν ἐπιλοίπων ρητῶν Α΄΄καί δυνάμεθα νά νοήσωμεν ὅλους τούς ρητούς χωρισμένους εἰς τάς τάξεις Α΄καί Β΄˙ θά ὁρίζεται οὕτω εἷς θετικός ἀσύμμετρος λ΄˙ἐξ ὁρισμοῦ ὁ λ΄ θά εἶναι τοιοῦτος ὥστε: $\lambda\lambda'=1$. Θά τόν σημειοῦμεν δέ καί διά τῶν: $1:\lambda$ ἤ $\frac{1}{\lambda}$ καί θά τόν καλοῦμεν ἀντίστροφον τοῦ λ. Καθ'ὅμοιον τρόπον ὁρίζομεν τόν ἀντίστροφον ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ˙ἤ καί ἐάν δοθῆ ἀριθμός τις $-\lambda$,ὅπου λ θετικός, ὁ ἀντίστροφος αὐτοῦ θά εἶναι $-\frac{1}{\lambda}$,ὅπου $\frac{1}{\lambda}$ εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ λ. Ὁ ἀριθμός 0 δέν ἔχει ἀντίστροφον.

Ἔστωσαν,ἤδη,δύο ἀριθμοί λ καί μ,(λ διάφορος τοῦ μηδενος). Ζητοῦμεν ἀριθμόν χ τοιοῦτον ὥστε $\lambda\chi=\mu$.Θεωροῦμεν τόν κατά τά ἀνωτέρω ὁριζόμενον ἀριθμόν $\frac{1}{\lambda}$˙ὁ ἀριθμός $\mu\cdot\frac{1}{\lambda}$ πληροῖ τήν ζητουμένην σχέσιν˙τόν ἀριθμόν αὐτόν θεωροῦμεν ὡς πηλίκον τοῦ μ διά λ καί θά τόν σημειοῦμεν: $\frac{\mu}{\lambda}$. Δυνάμεθα,κατά ταῦτα,νά γράψωμεν $\chi=\frac{\mu}{\lambda}$.

Παρατήρησις. Ἐθεωρήσαμεν (§2,3) ἕκαστον ρητόν ἤ ἀσύμμετρον ὡς τομήν ὅλων τῶν ρητῶν εἰς δύο τάξεις Α καί Β τοιαύτας ὥστε ἕκαστος ρητός τῆς Α νά εἶναι μικρότερος παντός ρητοῦ τῆς Β. Δέν ἕπεται ἐξ αὐτοῦ ὅτι εἶναι ἀπαραίτητον νά ληφθοῦν ὑπ'ὄψει ὅλοι οἱ ρητοί διά τόν ὁρισμόν ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ˙ἀρκεῖ διά νά ὁρίσωμεν ἕνα πραγματικόν ἀριθμόν νά ληφθοῦν δύο μερικαί τάξεις ρητῶν Π καί Ρ πληροῦσαι τάς συνθήκας:

1)Ἕκαστος ἀριθμός τῆς Π νά εἶναι μικρότερος παντός ἀριθμοῦ τῆς Ρ.

2) Νά μήν ὑπάρχῃ μεγαλύτερος εἰς τήν τάξιν Π καί μικρότερος εἰς τήν τάξιν Ρ.

3) Νά εὑρίσκωνται πάντοτε ἀριθμός τῆς τάξεως Ρ καί ἀριθμός τῆς τάξεως Π ἔχοντες διαφοράν μικροτέραν θετικοῦ ἀριθμοῦ ε,ὅσον δήποτε μικρός καί ἄν ὑποτεθῆ ὁ ε.

Π.χ. εἰς τό παράδειγμα τῆς §1 αἱ δύο ἀκολουθίαι (α) καί (β) δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς τάξεις ἀριθμῶν ὁριζουσαι τόν $7\frac{8}{33}$˙ὅστις ἀφ'ἑτέρου (ἰδέ § 2)δύναται νά θεωρηθῆ καί ὡς ὁριζόμενος ἀπό δύο τάξεις Α καί Β ὅλων τῶν ρητῶν. Ἀντιστρόφως.(1) ἔστω τυχοῦσα τομή ὅλων τῶν ρητῶν (Α,Β) ὁρίζουσα ἕνα ἀριθμόν. Δυνάμεθα νά ἐξαγάγωμεν (ἀπό τήν τάξιν Α) μίαν τάξιν ρητῶν ἀριθμῶν Π καί (ἀπό τήν τάξιν Β) μίαν τάξιν ρητῶν Ρ πληρούσας τάς ἀνωτέρω συνθήκας.

Μερική περίπτωσις. Ἔστω διά τήν ἁπλούστευσιν τῆς γραφῆς τυχοῦσα ἀσύμμετρος τομή. Δυνάμεθα διά τήν τάξιν Π νά λάβωμεν ἀκολουθίαν τῆς μορφῆς $\alpha \quad \alpha,\gamma_1 \quad \alpha,\gamma_1\gamma_2 \quad \alpha,\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ldots$ ὅπου α θά εἶναι θετικός ἀκέραιος ἤ 0 ἤ ἀρνητικός ἀκέραιος καί $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, εἶναι ψηφία μεταξύ 0 καί 9·

διά δέ τήν τάξιν Ρ ἀκολουθίαν τῆς μορφῆς

$$\alpha+1, \quad \alpha,\delta_1 \quad \alpha,\gamma_1\delta_2 \quad \alpha,\gamma_1\gamma_2\delta_3 \ldots$$

ὅπου $\delta_\nu = \gamma_\nu + 1$

Π.χ. διά τόν ἀριθμόν π ἔχομεν τάς ἀκολουθίας

3,	3,1	3,14	3,1415...
4,	3,2	3,15	3,1416...

Ἀσκήσεις

Νά ἀποδειχθῶσιν αἱ ἑξῆς προτάσεις:

1) Μεταξύ δύο οἱωνδήποτε ρητῶν ὑπάρχει πάντοτε ρητός καί ἑπομένως ἀπειρία ρητῶν.

2) Μεταξύ δύο οἱωνδήποτε πραγματικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει πάντοτε ρητός καί ἑπομένως ἀπειρία ρητῶν (ἐστηρίχθημεν ἐπί τῆς προτάσεως ταύτης εἰς τήν § 5)

3) Μεταξύ δύο οἱωνδήποτε ρητῶν ὑπάρχει πάντοτε ἀσύμμετρος ἀριθμός καί ἑπομένως ἀπειρία ἀσυμμέτρων.

4) Ἐάν καταμερίσωμεν ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς εἰς δύο τάξεις Α καί Β, οὕτως ὥστε νά ἰσχύῃ ἡ ἰδιότης Ι (§2) ὁρίζομεν ἕνα μόνον ρητόν ἤ ἀσύμμετρον (ἰδέ συμπέρασμα §2,5).

5) Ἔστω τομή (Α,Β) ὅλων τῶν ρητῶν καί θετικός τις ρητός ε· δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἕνα ἀριθμόν τῆς τάξεως Α καί ἕνα τῆς τάξεως Β, ἔχοντας διαφοράν ἴσην πρός τόν ε.

6) Ἔστω τομή (Α,Β) ὁρίζουσα θετικόν ἀριθμόν καί ρητός τις Κ μεγαλύτερος τῆς μονάδος· δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἕνα ἀριθμόν τῆς τάξεως Α καί ἕνα τῆς τάξεως Β, ἔχοντας πηλίκον ἴσον πρός τόν Κ.

(1) Ἰδέ S t o l z, Allgemeine Arithmetik.

7)Ἔστωσαν αἱ τάξεις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν Α καί Β,αἱ θεωρηθεῖσαι εἰς τήν 2 πρός ὁρισμόν τοῦ $\sqrt{5}$. Δέν ὑπάρχει μεταξύ τῶν ρητῶν τῆς τάξεως Α ρητός μεγαλύτερος ὅλων τῶν ἄλλων ρητῶν τῆς τάξεως Α,οὔτε μεταξύ τῶν ρητῶν τῆς τάξεως Β ρητός μικρότερος ὅλων τῶν ἄλλων ρητῶν τῆς Β.

8)Ἔστωσαν α καί β δύο ρητοί ἀριθμοί καί ξ ἀσύμμετρος.

Ἐάν $\alpha<\xi$ καί $\xi<\beta$, θά ἔχωμεν $\alpha<\beta$

Ἐάν $\alpha<\beta$ καί $\beta<\xi$, θά ἔχωμεν $\alpha<\xi$

9)Ἔστωσαν α,β,γ τρεῖς πραγματικοί ἀριθμοί.

Ἐάν $\alpha<\beta$ καί $\beta<\gamma$, θά ἔχωμεν $\alpha<\gamma$.

10) Μέ τούς δοθέντας ὁρισμούς διατηρεῖται καί ἐπί τῶν ἀσυμμέτρων ἡ ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως (ἤ ἀνταλλαγῆς),ἡ διαλυτική ἰδιότης καί ἡ ἐπιμεριστική ἰδιότης· ἤτοι

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$$

$$\alpha\beta=\beta\alpha$$

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$$

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

11)Ἐάν ὁ λ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός καί ὁ $\frac{1}{\lambda}$ (§8) θά εἶναι ἀσύμμετρος.

12)Ἐάν α καί β εἶναι ρητοί ἀριθμοί καί ἐάν ὁ β εἶναι θετικός καί δέν εἶναι τέλειον τετράγωνον ἡ παράστασις $(\alpha+\sqrt{\beta})^2$ δίδει ἀσύμμετρον ἀριθμόν.

13)Ἔστωσαν α καί β δύο ρητοί ἀριθμοί,τοιοῦτοι ὥστε $\alpha^2>\beta$ καί $\alpha>0$. Ἵνα ἡ παράστασις

$$\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}$$

εἶναι ρητός ἀριθμός πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ ἀριθμοί $\alpha^2-\beta$ καί $\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}$ νά εἶναι τετράγωνα ρητῶν ἀριθμῶν.

Νά εὑρεθῇ

14)Ἡ συνθήκη τήν ὁποίαν πρέπει νά πληροῦν οἱ ρητοί ἀριθμοί χ,ψ,ω,t, ἵνα ἡ παράστασις

$$\frac{\alpha\chi+\psi}{\alpha\omega+t}$$

εἶναι ρητός ἀριθμός ὅταν ὁ α εἶναι ἀσύμμετρος.

15)Ἡ συνθήκη ἵνα ὁ ἀριθμός $\sqrt{\chi}+\sqrt{\psi}$ εἶναι ρητός ὅταν διά τῶν χ καί ψ ἐκφράζωμεν ρητούς θετικούς ἀριθμούς.