Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 6ο Τεστ – Ομάδα Β΄

1 Φεβρουαρίου 2021

1. (**4 μον.**) **(α)** Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $f(a) = 1$ και $f(x) = 0$ για κάθε $a < x \leqslant b$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x)dx = 0$.

(β) Αποδείξτε ότι: για κάθε $n \geqslant 2$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^2}dx \geqslant n\left(\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right).$$

2. (**4 μον.**) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων στα οποία είναι ασυνεχής είναι πεπερασμένο.

(γ) Έστω f, g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

3. (**4 μον.**) **(α)** Αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο συνεχείς συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x (f(t))^2 dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Ποιες είναι αυτές;

(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int (\ln x)^2 dx, \qquad \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}dx, \qquad \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}dx.$$