Ανάλυση I και Εφαρμογές – 6ο Τεστ – Ομάδα Α΄

1 Φεβρουαρίου 2021

1. (**4 μον.**) **(α)** Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 f(x)dx > 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι: για κάθε $n \geqslant 2$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x}dx \geqslant \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

2. (**4 μον.**) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

- **(α)** Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c \in [a,b]$ ώστε $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$.
- **(β)** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αν η f είναι αύξουσα τότε η F είναι αύξουσα.
- **(γ)** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν $L(f,P) = U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$, τότε η f είναι σταθερή.

3. (**4 μον.**) **(α)** Έστω $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $G : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$$

είναι αύξουσα.

(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int x(\sin x)^2, \qquad \int \frac{1}{x(1+x^2)^2}dx, \qquad \int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx.$$