Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 5ο Τεστ – Ομάδα Β΄

8 Ιανουαρίου 2021

1. (**4 μον.**) **(α)** Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (x-1)^2 g(x)$. Εξετάστε αν υπάρχει η $f'(1)$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ και $f''(0) = 1$. Αποδείξτε ότι: υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < |x| < \delta$ τότε $\frac{f'(x)}{x} > 0$.

2. (**4 μον.**) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) τότε η f είναι συνεχής στο (a, b).

(β) Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$.

(γ) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

3. (**4 μον.**) **(α)** Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $|f'(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(2x) - f(x)\big) = 0.$$

(β) Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το 0 της

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

στο διάστημα $(-1, 1)$ και χρησιμοποιώντας το υπολογίστε το άθροισμα

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k-1}(2k-1)}.$$