Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 5ο Τεστ – Ομάδα Α΄

8 Ιανουαρίου 2021

1. (**4 μον.**) **(α)** Εξετάστε αν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x| \sin x$.

(β) Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g(a) = g(b) = 0$. Υποθέτουμε ότι η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) και $g''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι $g(t) \neq 0$ για κάθε $t \in (a, b)$.

2. (**4 μον.**) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.

(β) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, τότε $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$.

(γ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.

3. (**4 μον.**) **(α)** Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(\sqrt{x^2 + 1}) - f(x) \big) = 0.$$

(β) Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2/2} - e^{-x^2/2}$ με κέντρο το 0 στο $\mathbb{R}$, και χρησιμοποιώντας το αποδείξτε ότι

$$x^2 + \frac{x^6}{24} \leq e^{x^2/2} - e^{-x^2/2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.