Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 4ο Τεστ – Ομάδα Β΄

18 Δεκεμβρίου 2020

1. (**4 μον.**) **(α)** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) = 1$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f(x) < 2$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

2. (**4 μον.**) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

- **(α)** Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.
- **(β)** Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $|f(x)| \leqslant x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής στο 0.
- **(γ)** Αν η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, και αν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 1]$.

3. (**4 μον.**) **(α)** Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\max(f) = \max(g)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Αποδείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x) \leqslant f(x_0)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.