Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 2ο Τεστ – Ομάδα Β′

11 Νοεμβρίου 2020

1. (**4 μον.**) **(α)** Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \frac{n^3}{4^n}, \qquad \beta_n = (\sqrt[n]{n} - 1)\,\text{ημ}(n^2), \qquad \gamma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}.$$

(β) Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \to \frac{1}{2}$. Ορίζουμε $y_n = [x_n]$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x. Αποδείξτε ότι $y_n \to 0$.

2. (**4 μον.**) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(i) Αν $\alpha_n \to +\infty$ τότε η (α_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

(ii) Αν $\beta_n \to +\infty$ τότε η (β_n) είναι κάτω φραγμένη.

(iii) Αν $\gamma_n \to +\infty$ τότε η (γ_n) είναι αύξουσα.

3. (**4 μον.**) **(α)** Έστω A μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) που όλοι οι όροι της ανήκουν στο A τέτοια ώστε $a_n \to \inf(A)$.
(β) Ορίζουμε μια ακολουθία (x_n) με $0 < x_1 < 1$ και

$$x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Εξετάστε αν η (x_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό και, αν ναι, βρείτε το $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Σύντομες απαντήσεις

1 (α) Για την (α_n) εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+1)^3 4^n}{n^3 4^{n+1}} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^3 \frac{1}{4} \to \frac{1}{4} < 1,$$

άρα $\alpha_n \to 0$.

Για την (β_n) παρατηρούμε ότι $|\beta_n| = (\sqrt[n]{n}-1)|\eta\mu(n^2)| \leqslant \sqrt[n]{n}-1 \to 0$, άρα $\beta_n \to 0$.

Για την (γ_n) παρατηρούμε ότι ο μεγαλύτερος από τους $\frac{1}{(n+1)^2}, \ldots, \frac{1}{(n+n)^2}$ είναι ο $\frac{1}{(n+1)^2}$ και έχουμε n όρους στο άθροισμα που ορίζει τον γ_n, άρα

$$0 < \gamma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \leqslant \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $\frac{n}{(n+1)^2} \to 0$, άρα $\gamma_n \to 0$.

1 (β) Αφού $x_n \to \frac{1}{2}$, παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{4} > 0$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$ για κάθε $n \geqslant n_0$, δηλαδή $\frac{1}{4} < x_n < \frac{3}{4}$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $x_n \in (0,1)$ άρα $y_n = [x_n] = 0$. Συνεπώς, $y_n \to 0$.

2 (α) Ισχύει: έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha_n \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\alpha_n \to +\infty$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\alpha_n > M$ για κάθε $n \geqslant n_0$, και έχουμε αντίφαση.

2 (β) Ισχύει: παίρνουμε $M = 1$ και αφού $\beta_n \to +\infty$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $\beta_n > 1$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Αν ορίσουμε $m = \min\{1, \beta_1, \ldots, \beta_{n_0}\}$ τότε έχουμε $\beta_n \geqslant m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα η (β_n) είναι κάτω φραγμένη.

2 (γ) Δεν ισχύει: η ακολουθία (γ_n) με $\gamma_n = n$ αν ο n είναι περιττός και $\gamma_n = n^2$ αν ο n είναι άρτιος, ικανοποιεί την $\gamma_n \geqslant n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\gamma_n \to +\infty$. Όμως, οι πρώτοι π.χ. όροι της γ_n είναι

$$1, 4, 3, 16, 5, 36, \ldots$$

άρα η (γ_n) δεν είναι αύξουσα.

3 (α) Έστω $x = \inf(A)$. Από τον ε-χαρακτηρισμό του infimum, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $a_n \in A$ ώστε $x \leqslant a_n < x + \frac{1}{n}$. Αφού $x + \frac{1}{n} \to x$, από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $a_n \to x = \inf(A)$.

3 (β) Δείχνουμε επαγωγικά ότι $0 < x_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $0 < x_1 < 1$ και αν $0 < x_n < 1$ τότε $0 < 1 - x_n < 1$, άρα $0 < \sqrt{1-x_n} < 1$, άρα $0 < 1 - \sqrt{1-x_n} < 1$, δηλαδή $0 < x_{n+1} < 1$.

Παρατηρούμε τώρα ότι η (x_n) είναι φθίνουσα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$x_{n+1} - x_n = 1 - \sqrt{1-x_n} - x_n = (1-x_n) - \sqrt{1-x_n} = \sqrt{1-x_n}(\sqrt{1-x_n} - 1) < 0$$

διότι $\sqrt{1-x_n} > 0$ και $\sqrt{1-x_n} - 1 < 0$.

Αφού η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συγκλίνει σε κάποιον $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $x_{n+1} \to x$ και $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n} \to 1 - \sqrt{1-x}$, άρα $x = 1 - \sqrt{1-x}$. Έπεται ότι $x = 0$ ή $x = 1$, και αφού $x < x_1 < 1$ συμπεραίνουμε ότι $x = 0$.