

Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 8: Τεχνικές ολοκλήρωσης

Α' Ομάδα

1. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx, \quad \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x+3)(x-1)^2} dx, \quad \int \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx.$$

2. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

3. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \cos^3 x dx, \quad \int \cos^2 x \sin^3 x dx, \quad \int \tan^2 x dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}, \quad \int \sqrt{\tan x} dx.$$

4. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

5. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2-1)} dx, \quad \int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} dx, \quad \int x \log x dx \\ & \int x \cos x dx, \quad \int e^x \sin x dx, \quad \int x \sin^2 x dx \\ & \int \log(x + \sqrt{x}) dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int \frac{x+4}{(x^2+1)(x-1)} dx \\ & \int \frac{x}{1+\sin x} dx, \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx, \quad \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}. \end{aligned}$$

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \sin(\log x) dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} \log(1-x) dx.$$

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx.$$

8. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \quad \int \frac{\log(\tan x)}{\cos^2 x} dx.$$

9. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx, \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x} dx$$

$$\int_0^5 x \log(\sqrt{1+x^2}) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx.$$

10. Υπολογίστε τα ακόλουθα εμβαδά:

(α) Του χωρίου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$ και από τον x -άξονα.

(β) Του χωρίου που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \cos x$ και $g(x) = \sin x$ στο διάστημα $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

Β' Ομάδα

11. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} dx, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx, \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int x \arctan x dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \quad \int \sqrt{x^2-1} dx.$$

12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

14. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x) dx.$$

15. Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} x^p dx$$

δεν είναι πεπερασμένο για κανένα $p \in \mathbb{R}$.

16. Υπολογίστε τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \log x dx.$$

17. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

18. Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^6} \int_0^{x^3} e^{t^2} dt, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t dt.$$