

Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 6: Θεώρημα Taylor

Α' Ομάδα

1. Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ πολυώνυμο βαθμού n και έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι

$$b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

2. Γράψτε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα στη μορφή $b_0 + b_1(x-3) + \dots + b_n(x-3)^n$:

$$p_1(x) = x^2 - 4x - 9, \quad p_2(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1, \quad p_3(x) = x^5.$$

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ που υποδεικνύεται.

$$(T_{3,f,0}) : f(x) = \exp(\sin x).$$

$$(T_{2n+1,f,0}) : f(x) = (1+x^2)^{-1}.$$

$$(T_{n,f,0}) : f(x) = (1+x)^{-1}.$$

$$(T_{4,f,0}) : f(x) = x^5 + x^3 + x.$$

$$(T_{6,f,0}) : f(x) = x^5 + x^3 + x.$$

$$(T_{5,f,1}) : f(x) = x^5 + x^3 + x.$$

4. Έστω $n \geq 1$ και $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

5. Έστω $n \geq 2$ και $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι:

(α) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .

(β) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

(γ) Αν ο n είναι περιττός, τότε η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο x_0 , αλλά το x_0 είναι σημείο καμπής για την f .

6. Αν $f(x) = \ln x$, $x > 0$, βρείτε την πλησιέστερη ευθεία και την πλησιέστερη παραβολή στο γράφημα της f στο σημείο $(e, 1)$.

7. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f(0) = 0$ και

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \quad x \neq 0.$$

8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f''' = f$ και $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = 0$.

(α) Έστω $R > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $M = M(R) > 0$ ώστε: για κάθε $x \in [-R, R]$ και για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$|f^{(k)}(x)| \leq M.$$

(β) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{3n,f,0}$ και, χρησιμοποιώντας το (α) και οποιονδήποτε τύπο υπολοίπου, δείξτε ότι

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. Βρείτε προσεγγιστική τιμή, με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6} , για καθέναν από τους αριθμούς

$$\sin 1, \quad \sin 2, \quad \sin \frac{1}{2}, \quad e, \quad e^2.$$

10. (α) Δείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

και

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

(β) Δείξτε ότι $\pi = 3.14159 \dots$ (με άλλα λόγια, βρείτε προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό π με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}).

B' Ομάδα

11. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = f(1) = 0$. Υποθέτουμε ότι $|f''(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Δείξτε ότι $|f'(x)| \leq M/2$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $M_k = \sup\{|f^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}\}$, $k = 0, 1, 2$, δείξτε ότι

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

13. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία υπάρχει η $f''(0)$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο πολυώνυμο Taylor της f , δείξτε ότι

$$f''(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) + f(-t) - 2f(0)}{t^2}.$$