Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 2ο Τεστ (Σειρά Α)
7 Νοεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $a_n \to +\infty$ τότε η (a_n) είναι αύξουσα.

(β) Αν η (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε είναι φραγμένη.

(γ) Αν $a_n \in \mathbb{Z}$ και $a_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $a_n = x$ για κάθε $n \geqslant n_0$.

(δ) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

2. **(3 μον.)** Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \beta_n = (\sqrt[n]{n} - 1)\,\text{ημ}(n^2), \qquad \gamma_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (2 μον.) Έστω $0 < \alpha < 1$ και έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $|x_{n+1}| \leqslant \alpha |x_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.

4. (2 μον.) Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = 0$ και

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1 - a_n^2}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 2ο Τεστ (Σειρά Β)
7 Νοεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $a_n \to +\infty$ τότε η (a_n) είναι κάτω φραγμένη.

(β) Αν $a_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε $x \in \mathbb{Q}$.

(γ) Αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που ικανοποιούν την $a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, τότε $a_n \to x$.

(δ) Αν $a_n \to 0$ τότε η $(|a_n|)$ είναι φθίνουσα.

2. (3 μον.) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριο της:

$$\alpha_n = \frac{\text{συν}(n!)}{n}, \quad \beta_n = \frac{n!}{n^n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

3. **(2 μον.)** Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \to a > 0$ αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. Τι μπορείτε να πείτε αν $a_n \to 0$;

4. **(2 μον.)** Θεωρούμε την ακολουθία (b_n) με $b_1 = 1$ και

$$b_{n+1} = \frac{6b_n + 6}{b_n + 7}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Εξετάστε αν η (b_n) συγκλίνει και, αν ναι, υπολογίστε το όριο της.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 2ο Τεστ (Σειρά Γ)
7 Νοεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $a_n \to +\infty$ τότε η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

(β) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to 1$, τότε $a_n^n \to 1$.

(γ) Αν η (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό και $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η (a_n) είναι σταθερή ακολουθία.

(δ) Αν $a_n, b_n > 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

2. **(3 μον.)** Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριο της:

$$\alpha_n = \frac{n^3}{4^n}, \qquad \beta_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n + 2n}, \qquad \gamma_n = \sqrt[n]{1^4 + 2^4 + \cdots + n^4}.$$

Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

3. (2 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών, η οποία συγκλίνει στον $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι φραγμένη.

4. (2 μον.) Θεωρούμε την ακολουθία (α_n) που ορίζεται από τις $\alpha_1 = \alpha > 0$ και $\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha + \alpha_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.