Ανάλυση I και Εφαρμογές – 1ο Τεστ (Σειρά A)
24 Οκτωβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $x < q < y$.

(β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = 1$.

(γ) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ τότε υπάρχει $s > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f(x) \geqslant s$.

(δ) Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, τότε η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $(0,1)$.

2. **(3 μον.)** Λέμε ότι ο $a \in \mathbb{N}$ είναι πολλαπλάσιο του $b \in \mathbb{N}$ αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $a = \lambda \cdot b$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)$ είναι πολλαπλάσιο του 2^n.

3. **(2 μον.)** Αποδείξτε ότι αν A, B είναι μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $\sup A = \inf B$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε $b - a < \varepsilon$.

4. **(2 μον.)** Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων (χωρίς αιτιολόγηση):

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 0 \text{ και } 0 < x^2 - 1 \leqslant 2\} \quad , \quad B = \left\{2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{3 - \frac{2}{m} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 1ο Τεστ (Σειρά Β)
24 Οκτωβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Τότε, $\lim\limits_{x \to 0} g(x)\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

(β) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $|x - y| \leqslant \varepsilon$. Τότε, $x = y$.

(γ) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$. Τότε, η f είναι σταθερή.

(δ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.

2. **(3 μον.)** Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

3. (2 μον.) Αποδείξτε ότι αν A, B είναι μη κενά άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $A \subseteq B$ τότε $\sup A \leqslant \sup B$.

4. (2 μον.) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων (χωρίς αιτιολόγηση):

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x^2 - 1 \leqslant 2\} \quad , \quad B = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{7 - \frac{2}{m} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 1ο Τεστ (Σειρά Γ)
24 Οκτωβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω $p, q \in \mathbb{Q}$ με $p < q$. Υπάρχει άρρητος $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $p < x < q$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι συνεχής τότε η f είναι συνεχής.

(γ) Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

(δ) Αν $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$ και $f(0) = 0$, τότε $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$.

2. (**3 μον.**) Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ταυτότητα

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

3. **(2 μον.)** Αποδείξτε ότι αν A, B είναι μη κενά κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $A \subseteq B$ τότε $\inf B \leqslant \inf A$.

4. **(2 μον.)** Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων (χωρίς αιτιολόγηση):

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) < 0\} \quad , \quad B = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$