

Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 8: Τεχνικές ολοκλήρωσης

Α' Ομάδα

1. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx, \quad \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x+3)(x-1)^2} dx, \quad \int \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{2x}{(x+1)^2 + 1} dx$$

και χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $y = x + 1$.

(β) Ανάλυση σε απλά κλάσματα. Ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

Ελέγξτε ότι $a = 1$, $b = 1$ και $c = 1$.

(γ) Παρατηρούμε ότι $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)$ και κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

2. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x + \sqrt[3]{x}}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ και κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt[6]{x}$ προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{6u^5}{u^3 + u^2} du = \int \frac{6u^3}{u + 1} du$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα (μπορείτε να κάνετε τη νέα αντικατάσταση $y = u + 1$).

(γ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{x^2 - 1}$ έχουμε $\frac{dx}{x} = \frac{u du}{u^2 + 1}$, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan(\sqrt{x^2 - 1}) + c.$$

(δ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1 + e^x}$ έχουμε $du = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} dx = \frac{u^2 - 1}{2u} dx$, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα $\int \frac{2du}{u^2 - 1}$, το οποίο υπολογίζεται εύκολα με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

3. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \cos^3 x dx, \quad \int \cos^2 x \sin^3 x dx, \quad \int \tan^2 x dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}, \quad \int \sqrt{\tan x} dx.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)(\sin x)' \, dx$$

και θέτουμε $u = \sin x$.

(β) Γράφουμε

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x)(-1)(\cos x)' \, dx$$

και θέτουμε $u = \cos x$.

(γ) Γράφουμε

$$\int \tan^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + c.$$

(δ) Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^4 x} \, dx &= \int (\tan x)' \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)' \, dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \tan x \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \, dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \frac{2(1 - \cos^2 x)}{\cos^4 x} \, dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2 \int \frac{1}{\cos^4 x} \, dx + 2 \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$3 \int \frac{1}{\cos^4 x} \, dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} + 2 \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} + \tan x + c.$$

(ε) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{\tan x}$ παίρνουμε

$$du = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} (\tan^2 x + 1) \, dx = \frac{u^4 + 1}{2u} \, dx,$$

οπότε θεωρούμε το

$$\int \frac{2u^2}{u^4 + 1} \, du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

4. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \int (x)' \frac{1}{(x^2 + 1)^n} \, dx = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} \, dx - 2n \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

5. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2-1)} dx, \quad \int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} dx, \quad \int x \log x dx$$

$$\int x \cos x dx, \quad \int e^x \sin x dx, \quad \int x \sin^2 x dx$$

$$\int \log(x + \sqrt{x}) dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int \frac{x+4}{(x^2+1)(x-1)} dx$$

$$\int \frac{x}{1+\sin x} dx, \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx, \quad \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Υπόδειξη. (α) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(γ) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int x \log x dx = \frac{1}{2} \int (x^2)' \log x dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c.$$

(δ) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int x \cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

(ε) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} I = \int e^x \sin x dx &= \int (e^x)' \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (\cos x)' dx \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) - I. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + c.$$

(στ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ παίρνουμε

$$\int x \sin^2 x dx = \int \frac{x}{2} dx - \int x \frac{\cos(2x)}{2} dx.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $u = 2x$ και ολοκλήρωση κατά μέρη όπως στο (δ).

(ζ) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int \log(x + \sqrt{x}) dx = \int (x)' \log(x + \sqrt{x}) dx = x \log(x + \sqrt{x}) - \int \frac{x}{x + \sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx.$$

Κατόπιν, εφαρμόστε την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$.

(η) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1-x^2}$ βλέπουμε ότι $\frac{dx}{x} = \frac{u du}{u^2-1}$, οπότε καταλήγουμε στο

$$\int \frac{1}{u^2-1} du$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(θ) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(ι) Θέτουμε $y = \tan \frac{x}{2}$. Ελέγξτε ότι $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$ και $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$. Αναγόμεστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int 2 \arctan y \frac{1}{1 + \frac{2y}{1+y^2}} \frac{2}{1+y^2} dy &= 4 \int \arctan y \frac{1}{(1+y)^2} dy \\ &= 4 \int \arctan y \left(-\frac{1}{1+y} \right)' dy \\ &= -4 \frac{\arctan y}{1+y} + 4 \int \frac{1}{(1+y^2)(1+y)} dy. \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(κ) Γράφουμε

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} (\sin x)' dx$$

και κάνουμε την αντικατάσταση $u = \sin x$.

(λ) Αντικατάσταση $y = x + 1$.

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \sin(\log x) dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} \log(1-x) dx.$$

Υπόδειξη. (α) Αν θέσουμε $u = \log x$, τότε $dx = e^u du$ και καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα

$$\int e^u \sin u du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά μέρη.

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x}} \log(1-x) dx &= -2 \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' \log(1-x) dx \\ &= -\frac{2 \log(1-x)}{\sqrt{x}} - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1-x} dx. \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$.

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' \arctan x dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx. \end{aligned}$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο της Άσκησης 4.

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx &= - \int \left(\frac{1}{1+x} \right)' x e^x dx \\ &= - \frac{x e^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x} (x e^x)' dx \\ &= - \frac{x e^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x} (1+x) e^x dx \\ &= - \frac{x e^x}{1+x} + e^x + c. \end{aligned}$$

8. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \quad \int \frac{\log(\tan x)}{\cos^2 x} dx.$$

Υπόδειξη. (α) Με την αντικατάσταση $u = e^x$ αναγόμεστε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης.

(β) Με την αντικατάσταση $u = \tan x$ αναγόμεστε στον υπολογισμό του

$$\int \log u du = u \log u - u + c.$$

9. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx, \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x} dx \\ \int_0^5 x \log(\sqrt{1+x^2}) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Υπολογίστε πρώτα τα αόριστα ολοκληρώματα:

(α) Γράφουμε

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \log(\cos x) + c.$$

(β) Γράφουμε

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x}{\cos^6 x} dx$$

και κάνουμε την αντικατάσταση $u = \cos x$.

(γ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1+x^2}$ αναγόμεστε στον υπολογισμό του

$$\int u \log u du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά μέρη.

(δ) Γράφουμε

$$\int x \tan^2 x dx = \int x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int x dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίστηκε στο (α).

10. Υπολογίστε τα ακόλουθα εμβαδά:

(α) Του χωρίου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$ και από τον x -άξονα.

(β) Του χωρίου που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \cos x$ και $g(x) = \sin x$ στο διάστημα $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

Υπόδειξη. (α) Το εμβαδόν είναι ίσο με

$$\int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx.$$

Εξηγήστε γιατί και υπολογίστε το.

(β) Το εμβαδόν είναι ίσο με

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx.$$

Εξηγήστε γιατί και υπολογίστε το.

Β' Ομάδα

11. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} dx, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx, \quad \int \frac{x}{(1 + x^2)^2} dx, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx, \quad \int x \arctan x dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx, \quad \int \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $y = \tan \frac{x}{2}$. Ελέγξτε ότι $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$, $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ και $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$. Αναγόμεστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{(1+y)^2}{y^2(1+y^2)} dy,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Γράφουμε

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

και κάνοντας την αντικατάσταση $u = \cos x$ αναγόμεστε στο $\int \frac{1}{u^2-1} du$, το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(γ) Με την αντικατάσταση $u = x^2 + 1$ αναγόμεστε στον υπολογισμό του

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} + c.$$

(δ) Με την αντικατάσταση $x = \sin u$ αναγόμεστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{1}{\sin u} du,$$

το οποίο υπολογίστηκε στο (β).

(ε) Χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο της Άσκησης 4.

(στ) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int x \arctan x dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + c.$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx.$$

(ζ) Με την αντικατάσταση $u = x^2 + 1$ αναγόμεστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c.$$

(η) Θέτουμε $x^2 - 1 = (x-t)^2$. Ισοδύναμα, $x = \frac{t^2+1}{2t}$. Τότε, $dx = \frac{t^2-1}{2t^2} dt$ και $x-t = \frac{1-t^2}{2t}$, οπότε αναγόμεστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{-(t^2-1)^2}{4t^3} dt.$$

12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Υπόδειξη. Με την αντικατάσταση $y = \pi - x$ παίρνουμε

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - y) \sin y}{1 + \cos^2 y} dy = \pi \int_0^\pi \frac{\sin y}{1 + \cos^2 y} dy - I,$$

δηλαδή

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin y}{1 + \cos^2 y} dy.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $u = \cos y$.

13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Υπόδειξη. Η αντικατάσταση $y = \frac{\pi}{2} - x$ δίνει (εξηγήστε γιατί)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = - \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos y}{\cos y + \sin y} dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Αφού

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{2},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

14. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x) dx.$$

Υπόδειξη. Η αντικατάσταση $y = \frac{\pi}{4} - x$ δίνει

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx = \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan(\pi/4 - y)) dy.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \frac{1 - \tan y}{1 + \tan y},$$

άρα,

$$1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \frac{2}{1 + \tan y}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx &= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1 + \tan y}\right) dy \\ &= \int_0^{\pi/4} (\log 2 - \log(1 + \tan y)) dy \\ &= \frac{\pi(\log 2)}{4} - I. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$I = \frac{\pi(\log 2)}{8}.$$

15. Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} x^p dx$$

δεν είναι πεπερασμένο για κανένα $p \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: αν $p > -1$ τότε

$$\int_1^{\infty} x^p dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M x^p dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M^{p+1} - 1}{p+1} = +\infty.$$

Αν $p < -1$ τότε

$$\int_0^1 x^p dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 x^p dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \delta^{p+1}}{p+1} = +\infty.$$

Τέλος, αν $p = -1$ τότε

$$\int_1^{\infty} x^p dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \log M = +\infty.$$

Σε κάθε περίπτωση, έπεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} x^p dx$ απειρίζεται.

16. Υπολογίστε τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \log x dx.$$

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $M > 0$ έχουμε

$$\int_0^M x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^M = \frac{1 - e^{-M^2}}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x e^{-x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-M^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

(β) Για κάθε $s \in (0, 1)$ έχουμε

$$\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^s = \arcsin s - \arcsin 0 = \arcsin s.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{s \rightarrow 1^-} \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{s \rightarrow 1^-} \arcsin s = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Λόγω συμμετρίας,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

(γ) Για κάθε $\delta \in (0, 1)$ έχουμε

$$\int_{\delta}^1 \log x \, dx = x \log x - x \Big|_{\delta}^1 = -1 - \delta \log \delta + \delta.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^1 \log x \, dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \log x \, dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (-\delta \log \delta + \delta - 1) = -1.$$

17. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = n!$$

Υπόδειξη. Με επαγωγή: για $n = 0$ έχουμε

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \, dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε, για κάθε $M > 0$ έχουμε

$$\int_0^M e^{-x} x^n \, dx = \int_0^M (-e^{-x})' x^n \, dx = -e^{-x} x^n \Big|_0^M + n \int_0^M e^{-x} x^{n-1} \, dx.$$

Αφήνοντας το $M \rightarrow \infty$ βλέπουμε ότι

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \, dx = n I_{n-1}.$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $I_{n-1} = (n-1)!$, τότε $I_n = n \cdot (n-1)! = n!$.

18. Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^6} \int_0^{x^3} e^{t^2} \, dt, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t \, dt.$$

Υπόδειξη. (α) Με την αντικατάσταση $y = x^3$ βλέπουμε ότι αρκεί να υπολογίσουμε το

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y e^{-y^2} \int_0^y e^{t^2} \, dt.$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\frac{\left(\int_0^y e^{t^2} \, dt\right)'}{(e^{y^2}/y)'} = \frac{e^{y^2}}{2e^{y^2} - e^{y^2}/y^2} = \frac{1}{2 - y^{-2}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

όταν $y \rightarrow +\infty$. Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^6} \int_0^{x^3} e^{t^2} \, dt = \frac{1}{2}.$$

(α) Με την αντικατάσταση $y = x^2$ βλέπουμε ότι αρκεί να υπολογίσουμε το

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y^2} \int_0^y e^t \sin t \, dt.$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\frac{\left(\int_0^y e^t \sin t \, dt\right)'}{(y^2)'} = \frac{e^y \sin y}{2y} \rightarrow \frac{1}{2}$$

όταν $y \rightarrow 0^+$. Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t \, dt = \frac{1}{2}.$$