Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 4: Συνέχεια και όρια συναρτήσεων

Α΄ Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)=1$, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει $f(x)>\frac{4}{5}$.

(β) Η $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής.

(γ) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από τις: $f(x)=0$ αν $x\in\mathbb{N}$ και $f(x)=1$ αν $x\notin\mathbb{N}$, είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $x_0\notin\mathbb{N}$.

(δ) Υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $0,1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(ε) Υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(στ) Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(ζ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο x, τότε είναι συνεχής σε κάθε x.

(η) Αν η f είναι συνεχής στο (a,b) και $f(q)=0$ για κάθε ρητό $q\in(a,b)$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in(a,b)$.

(θ) Αν $f\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)^n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε η f είναι ασυνεχής στο σημείο 0.

(ι) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(0)=-f(1)$ τότε υπάρχει $x_0\in[0,1]$ ώστε $f(x_0)=0$.

(ια) Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο (a,b).

(ιβ) Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.

(ιγ) Αν $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\sin\frac{1}{x}=0$.

Υπόδειξη. (α) *Σωστό.* Εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας με $\varepsilon=\frac{1}{5}>0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{5},\ \text{δηλαδή}\ |f(x)-1|<\frac{1}{5}.$$

Συνεπώς, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει $\frac{4}{5}=1-\frac{1}{5}<f(x)<1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$.

(β) *Σωστό.* Όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της f είναι μεμονωμένα σημεία του, άρα η f είναι συνεχής σε αυτά. Το επιχείρημα είναι το εξής: έστω $m\in\mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $\delta=\frac{1}{2}$. Αν $n\in\mathbb{N}$ και $|n-m|<\frac{1}{2}$, τότε, αναγκαστικά, $n=m$. Συνεπώς,

$$|f(n)-f(m)|=|f(m)-f(m)|=0<\varepsilon.$$

(γ) *Σωστό.* Αν $x_0\notin\mathbb{N}$ τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε στο $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ να μην περιέχεται φυσικός αριθμός (εξηγήστε γιατί). Τότε, για κάθε $\varepsilon>0$ και για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ έχουμε $|f(x)-f(x_0)|=|1-1|=0<\varepsilon$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0.

Έστω τώρα $x_0 \in \mathbb{N}$. Υπάρχει ακολουθία (x_n) η οποία συγκλίνει στο x_0 και η οποία δεν έχει όρους που να είναι φυσικοί αριθμοί (εξηγήστε γιατί). Τότε, $f(x_n) = 1 \to 1 \neq 0 = f(x_0)$. Σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

(δ) *Σωστό.* Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που παίρνει την τιμή 1 στα σημεία $0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και την τιμή 0 σε όλα τα άλλα σημεία.

(ε) *Σωστό.* Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f(x) = x$ αν $x = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και $f(x) = 0$ σε όλα τα άλλα σημεία. Για να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο 0 χρησιμοποιήστε τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας.

(στ) *Σωστό.* Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -x$ αν $x \notin \mathbb{Q}$.

(ζ) *Λάθος.* Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \neq 4$ και $f(4) = 1$. Η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 4$ και συνεχής σε κάθε άρρητο x.

(η) *Σωστό.* Θεωρήστε $x \in (a, b)$ και ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών από το (a, b) η οποία συγκλίνει στο x. Τέτοια ακολουθία υπάρχει λόγω της πυκνότητας των ρητών στο $\mathbb{R}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(q_n) \to f(x)$. Από την υπόθεση έχουμε $f(q_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και συνεπώς, $f(x) = 0$.

(θ) *Σωστό.* Έχουμε $\frac{1}{2n} \to 0$ και $\frac{1}{2n-1} \to 0$. Από την υπόθεση, $f\left(\frac{1}{2n}\right) = (-1)^{2n} = 1 \to 1$ και $f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = (-1)^{2n-1} = -1 \to -1$. Από την αρχή της μεταφοράς, η f είναι ασυνεχής στο σημείο 0.

(ι) *Σωστό.* Αν $f(0) = 0$ τότε παίρνουμε $x_0 = 0$ ή 1. Αν $f(0) \neq 0$, τότε από την $f(0) = -f(1)$ βλέπουμε ότι η f παίρνει ετερόσημες τιμές στα άκρα του $[0, 1]$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

(ια) *Λάθος.* Θεωρήστε την $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$. Η f είναι συνεχής στο $(0, 1)$, όμως δεν παίρνει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0, 1)$.

(ιβ) *Σωστό.* Ένα από τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα.

(ιγ) *Σωστό.* Χρησιμοποιήστε, για παράδειγμα, την αρχή της μεταφοράς. Αν $x_n \neq 0$ και $x_n \to 0$, τότε

$$\left| g(x_n) \sin \frac{1}{x_n} \right| \leqslant |g(x_n)|.$$

Αφού $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, έχουμε $g(x_n) \to 0$. Από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι

$$\lim_{x \to 0} g(x_n) \sin \frac{1}{x_n} = 0.$$

2. Έστω $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$$

είναι περιοδική με περίοδο $1/n$. Δηλαδή, $f\big(x + \frac{1}{n}\big) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Υπολογίστε την τιμή $f(x)$ όταν $0 \leqslant x < 1/n$.

(γ) Δείξτε την ταυτότητα

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} f\big(x+\frac{1}{n}\big) &= \left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{1}{n}+\frac{n-2}{n}\right]+\left[x+\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\right]-\left[n\big(x+\frac{1}{n}\big)\right] \\ &= \left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x+1]-[nx+1] \\ &= \left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x]+1-[nx]-1 \\ &= [x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx] \\ &= f(x). \end{aligned}$$

(β) Αν $0 \leqslant x < 1/n$ τότε

$$x,\ x+\frac{1}{n},\ \ldots,\ x+\frac{n-1}{n},\ nx \in [0,1)$$

άρα

$$[x] = \left[x+\frac{1}{n}\right] = \cdots = \left[x+\frac{n-1}{n}\right] = [nx] = 0.$$

Έπεται ότι $f(x) = 0$.

(γ) Κάθε $x \in \mathbb{R}$ γράφεται στη μορφή $x = m_x \cdot \frac{1}{n} + y_x$ για κάποιους $m_x \in \mathbb{Z}$ και $y_x \in [0, 1/n)$, οπότε, από τα (α) και (β), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = f\big(m_x \cdot \frac{1}{n} + y_x\big) = f(y_x) = 0$.

3. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M \geqslant 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leqslant M \cdot |x - y|$, για κάθε $x \in X$ και $y \in X$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

Υπόδειξη. Αν $M = 0$ τότε η f είναι σταθερή (γιατί;). Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $M > 0$.

Έστω $x_0 \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/M > 0$. Αν $x \in X$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| \leqslant M|x - x_0| < M\delta = \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $|f(x)| \leqslant |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Δώστε παράδειγμα μιας τέτοιας f που να είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $|f(0)| \leqslant 0$, δηλαδή $f(0) = 0$. Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \to 0$. Τότε, από την $-x_n \leqslant f(x_n) \leqslant x_n$ και το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $f(x_n) \to 0 = f(0)$. Από την αρχή της μεταφοράς η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στο σημείο 0 (εξηγήστε γιατί) και ικανοποιεί την $|f(x)| \leqslant |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $a_1 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $a_{n+1} = f(a_n)$ για $n = 1, 2, \ldots$. Αν $a_n \to a \in \mathbb{R}$ τότε $f(a) = a$.

Υπόδειξη. Από την $a_n \to a$ και από την αρχή της μεταφοράς, έχουμε $f(a_n) \to f(a)$. Από την υπόθεση, $f(a_n) = a_{n+1} \to a$. Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας, $f(a) = a$.

6. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι:

(α) Αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) = g(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν $f(x) \leqslant g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) \leqslant g(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $y \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) ρητών αριθμών με $x_n \to y$. Αφού η f είναι συνεχής, από την αρχή της μεταφοράς έχουμε $0 = f(x_n) \to f(y)$. Άρα, $f(y) = 0$.

(β) Εφαρμόστε το (α) για την συνεχή συνάρτηση $h = f - g$.

(γ) Έστω $y \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) ρητών αριθμών με $x_n \to y$. Από την υπόθεση έχουμε $f(x_n) \leqslant g(x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(y).$$

7. Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{\alpha}{x-\lambda} + \frac{\beta}{x-\mu} + \frac{\gamma}{x-\nu} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν).

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$g(x) = \alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu) = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν). Η g είναι συνεχής στο $[\lambda, \mu]$ και στο $[\mu, \nu]$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu) > 0, \\ g(\mu) &= \beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu) < 0, \\ g(\nu) &= \gamma(\nu-\lambda)(\nu-\mu) > 0. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (\lambda, \mu)$ ώστε $g(\xi_1) = 0$ και υπάρχει $\xi_2 \in (\mu, \nu)$ ώστε $g(\xi_2) = 0$.

8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right) = \frac{a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in (-1, 1)$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1 &= \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \left(\left(1 - \sqrt{1+x}\right) + \left(1 - \sqrt{1-x}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \left(\frac{-x}{1 + \sqrt{1+x}} + \frac{x}{1 + \sqrt{1-x}} \right). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > 1$, $1 + \sqrt{1+x} > 1$ και $1 + \sqrt{1-x} > 1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1 \right| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \left(\frac{|x|}{1 + \sqrt{1+x}} + \frac{|x|}{1 + \sqrt{1-x}} \right) \\ &\leqslant 2|x|. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $0 < |x| < \delta = \varepsilon/2$ τότε $\left| \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1 \right| < \varepsilon$. Άρα, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$.

(β) Έστω $x > \max\{-a, 0\}$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right) - \frac{a}{2} &= \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} - \frac{a}{2} \\
&= \frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+a}\right) \\
&= -\frac{a^2}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})^2}.
\end{aligned}$$

Αφού $(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})^2 > x$, έχουμε

$$\left|\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right) - \frac{a}{2}\right| \leqslant \frac{a^2}{2x}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $x > M = a^2/(2\varepsilon) > 0$ τότε $\left|\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right) - \frac{a}{2}\right| < \varepsilon$. Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right) = \frac{a}{2}.$$

9. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια και, αν ναι, υπολογίστε τα.

$$(\alpha)\quad \lim_{x\to 2} \tfrac{x^3-8}{x-2}, \qquad (\beta)\quad \lim_{x\to x_0}[x], \qquad (\gamma)\quad \lim_{x\to x_0}(x-[x]).$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $\frac{x^3-8}{x-2} = x^2+2x+4$ για κάθε $x \neq 2$. Αν (x_n) είναι μια ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \neq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to 2$, τότε $x_n^2 + 2x_n + 4 \to 2^2 + 2\cdot 2 + 4 = 12$. Από την αρχή της μεταφοράς, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = 12$.

(β) Αν $x_0 \notin \mathbb{Z}$, τότε $[x_0] < x_0 < [x_0]+1$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $[x_0] < x_0 - \delta < x_0 + \delta < [x_0]+1$. Τότε, η $f(x) = [x]$ είναι σταθερή και ίση με $[x_0]$ σε μια περιοχή του x_0 (εξηγήστε γιατί), άρα $\lim\limits_{x\to x_0}[x] = [x_0]$. Αν $x_0 \in \mathbb{Z}$, τότε για κάθε $x \in (x_0-1, x_0)$ έχουμε $f(x) = [x] = x_0 - 1$ ενώ για κάθε $x \in (x_0, x_0+1)$ έχουμε $f(x) = [x] = x_0$. Άρα, $\lim\limits_{x\to x_0^-}[x] = x_0 - 1 \neq x_0 = \lim\limits_{x\to x_0^+}[x]$. Έπεται ότι το $\lim\limits_{x\to x_0}[x]$ δεν υπάρχει.

(γ) Από το (β), αν $x_0 \notin \mathbb{Z}$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(x-[x]) = \lim\limits_{x\to x_0} x - \lim\limits_{x\to x_0}[x] = x_0 - [x_0]$. Αν $x_0 \in \mathbb{Z}$ τότε το $\lim\limits_{x\to x_0}(x-[x])$ δεν υπάρχει, γιατί τότε θα υπήρχε και το $\lim\limits_{x\to x_0}[x]$ (εξηγήστε γιατί).

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ και ότι αν $x_0 \neq 0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την $|f(x)| = |x|$ και τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων δείξτε, με βάση την αρχή της μεταφοράς, ότι αν $x_0 \neq 0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

11. Εξετάστε αν είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις:

(α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

(β) $f_k : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $\quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

(γ) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2} & \text{αν } x\neq 0\\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases}$

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι $\sin x\leqslant x\leqslant \tan x$, άρα $\cos x\leqslant \frac{\sin x}{x}\leqslant 1$ για $x\in(0,\pi/2)$. Αν (x_n) είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών με $x_n\to 0$, τότε $\cos x_n\to\cos 0=1$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $f(x_n)=\frac{\sin x_n}{x_n}\to 1\neq f(0)$. Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$. Η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\neq 0$.

(β) Η f είναι ασυνεχής στο 0 αν $k=0$: δοκιμάστε την ακολουθία $x_n=-\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$. Η f είναι συνεχής στο 0 αν $k\geqslant 1$: παρατηρήστε ότι $|f(x)|\leqslant |x|^k\leqslant |x|$ για κάθε $x\in[-1,0]$.

(γ) Η f δεν είναι συνεχής στο σημείο 0: για την ακολουθία $x_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}}$ έχουμε $x_n\to 0$ και $f(x_n)=\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\to+\infty$. Η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\neq 0$.

12. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(α) Δείξτε ότι αν $f(x)\leqslant g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(β) Δώστε ένα παράδειγμα όπου $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ενώ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\alpha$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\beta$. Θεωρήστε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ με $x_n\neq x_0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x_n\to x_0$. Τότε, $f(x_n)\leqslant g(x_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $f(x_n)\to\alpha$ και $g(x_n)\to\beta$. Άρα, $\alpha\leqslant\beta$.

(β) Θεωρήστε τη συνάρτηση f που ορίζεται από την $f(x)=0$ και τη συνάρτηση g που ορίζεται από τις $g(x)=x^2$ αν $x\neq 0$ και $g(0)=5$. Τότε, $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αλλά $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ (εξηγήστε γιατί).

13. Έστω $X\subset\mathbb{R}$, $f,g:X\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και έστω $x_0\in\mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap X$ και ότι $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχουν $\delta>0$ και $M>0$ ώστε: αν $x\in X$ και $|x-x_0|<\delta$ τότε $|f(x)|\leqslant M$. Θεωρήστε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο X με $x_n\neq x_0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x_n\to x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n)g(x_n)\to 0$, οπότε το ζητούμενο προκύπτει από την αρχή της μεταφοράς.

Έστω $\varepsilon>0$. Από την υπόθεση έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=0$, άρα υπάρχει $n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε $|g(x_n)|<\frac{\varepsilon}{M}$ για κάθε $n\geqslant n_1$. Αφού $x_n\to x_0$, υπάρχει $n_2(\delta)\in\mathbb{N}$ ώστε: $|x_n-x_0|<\delta$ για κάθε $n\geqslant n_2$. Άρα, $|f(x_n)|\leqslant M$ για κάθε $n\geqslant n_2$. Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Τότε, για κάθε $n\geqslant n_0$ έχουμε

$$|f(x_n)g(x_n)|=|f(x_n)|\cdot|g(x_n)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

Το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, άρα $f(x_n)g(x_n)\to 0$.

14. Έστω $f:[a,b]\to[a,b]$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x\in[a,b]$ με $f(x)=x$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνεχή συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την $g(x)=f(x)-x$. Παρατηρήστε ότι $g(a)=f(a)-a\geqslant 0$ και $g(b)=f(b)-b\leqslant 0$. Αφού $g(a)g(b)\leqslant 0$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x\in[a,b]$ ώστε $f(x)-x=g(x)=0$.

15. Έστω $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: $f(x)=x^2$ για κάθε ρητό $x\in(0,1)$. Να βρεθεί το $f\big(\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι $f(t)=t^2$ για κάθε $t\in(0,1)$. Ειδικότερα, θα έχουμε $f\big(\frac{\sqrt{2}}{2}\big)=\big(\frac{\sqrt{2}}{2}\big)^2=\frac{1}{2}$.

Έστω λοιπόν $t\in(0,1)$. Υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών στο $(0,1)$ με $q_n\to t$. Αφού $f(q_n)=q_n^2$ και η f είναι συνεχής στο t, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}f(q_n)=\lim_{n\to\infty}q_n^2=t^2.$$

16. Έστω $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0)=f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x\in[0,1]$ με $f(x+1)=f(x)$.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-f(x+1)$. Η g είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο $[0,1]$. Παρατηρήστε ότι

$$g(0)=f(0)-f(1)=f(2)-f(1)=-g(1),$$

άρα $g(0)g(1)\leqslant 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x\in[0,1]$ ώστε

$$f(x)-f(x+1)=g(x)=0.$$

17. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)=f(1)$. Έστω $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x\in\big[0,1-\frac{1}{n}\big]$ ώστε $f(x)=f\big(x+\frac{1}{n}\big)$.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g:\big[0,1-\frac{1}{n}\big]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$. Η g είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο $\big[0,1-\frac{1}{n}\big]$. Παρατηρήστε ότι

$$g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+g\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(0)-f(1)=0.$$

Άρα, υπάρχουν $\kappa,\lambda\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ ώστε $g\left(\frac{\kappa}{n}\right)\leqslant 0$ και $g\left(\frac{\lambda}{n}\right)\geqslant 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει x που ανήκει στο κλειστό διάστημα που έχει άκρα τα $\frac{\kappa}{n}$ και $\frac{\lambda}{n}$ και ικανοποιεί την $f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)=g(x)=0$.

18. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1,x_2\in[a,b]$. Δείξτε ότι για κάθε $t\in[0,1]$ υπάρχει $y_t\in[a,b]$ ώστε

$$f(y_t)=tf(x_1)+(1-t)f(x_2).$$

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[a,b]$. Για $i=1,2$ έχουμε $m\leqslant f(x_i)\leqslant M$, άρα

$$m=tm+(1-t)m\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\leqslant tM+(1-t)M=M.$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $y_t\in[a,b]$ με $f(y_t)=tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$.

19. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, και $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $y\in[a,b]$ ώστε

$$f(y)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[a,b]$. Για κάθε $i=1,\ldots,n$ έχουμε $m\leqslant f(x_i)\leqslant M$, άρα

$$m\leqslant\alpha:=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M.$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $y\in[a,b]$ με $f(y)=\alpha$.

Β′ Ομάδα

20. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x & \text{αν } x\in\mathbb{Q} \\ x^3 & \text{αν } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στα σημεία $-1,0,1$.

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}$. Υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών με $q_n\to x_0$ και υπάρχει ακολουθία (α_n) αρρήτων αριθμών με $\alpha_n\to x_0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 έχουμε $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(q_n)=\lim\limits_{n\to\infty}q_n=x_0$ και $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\alpha_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n^3=x_0^3$. Άρα, $x_0=x_0^3$. Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο αν $x_0=-1,0$ ή 1. Δηλαδή, η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0\notin\{-1,0,1\}$.

Ας υποθέσουμε ότι $x_0\in\{-1,0,1\}$. Τότε, αν θεωρήσουμε τις συνεχείς συναρτήσεις $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x$ και $h(x)=x^3$, έχουμε $f(x_0)=g(x_0)=h(x_0)$. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η g είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta_1>0$ ώστε: αν $|x-x_0|<\delta_1$ τότε $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$. Αφού η h είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta_2>0$ ώστε: αν $|x-x_0|<\delta_2$ τότε $|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$. Θέτουμε $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Αν $|x-x_0|<\delta$, τότε:

(i) είτε $x\in\mathbb{Q}$ και $|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_1$, οπότε $|f(x)-f(x_0)|=|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$,

(ii) ή $x\notin\mathbb{Q}$ και $|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_2$, οπότε $|f(x)-f(x_0)|=|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$.

Σε κάθε περίπτωση, $|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο x_0.

21. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x\in[a,b]$ ισχύει $|f(x)|=1$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Η f μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές -1 και 1. Αν δεν είναι σταθερή, τότε υπάρχουν $x_1\in[a,b]$ ώστε $f(x_1)=-1$ και $x_2\in[a,b]$ ώστε $f(x_2)=1$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, η f παίρνει τότε όλες τις τιμές $\rho\in[-1,1]$. Για παράδειγμα, υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=0$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο, αφού $|f(\xi)|=1$ από την υπόθεση.

22. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f^2(x)=g^2(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι $g\equiv f$ ή $g\equiv -f$ στο $[a,b]$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι αφού η f δεν μηδενίζεται σε κανένα $x\in[a,b]$ το ίδιο ισχύει και για την g.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(a)>0$. Τότε έχουμε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$ (αν η f έπαιρνε κάπου αρνητική τιμή τότε, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, θα υπήρχε και σημείο στο οποίο θα μηδενιζόταν).

Ας υποθέσουμε ότι $g(a)>0$. Όπως πριν, έχουμε $g(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αφού $f^2(x)=g^2(x)$ για κάθε x, συμπεραίνουμε ότι $g(x)=f(x)$ για κάθε x. Δηλαδή, $g=f$.

Ελέγξτε την περίπτωση $f(a)>0$ και $g(a)<0$ με τον ίδιο τρόπο. Σε αυτή την περίπτωση από την $f^2=g^2$ θα προκύψει ότι $g=-f$.

23. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x)\in\mathbb{Q}$ για κάθε $x\in[0,1]$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[0,1]$. Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση, τότε $m<M$ (γιατί;). Γνωρίζουμε ότι υπάρχει άρρητος α ώστε $m<\alpha<M$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x\in(0,1)$ με $f(x)=\alpha$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι η f παίρνει μόνο ρητές τιμές.

24. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi>0$ ώστε $f(x)\geqslant\xi$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Ισχύει το συμπέρασμα αν αντικαταστήσουμε το διάστημα $[a,b]$ με το διάστημα $(a,b]$;

Υπόδειξη. Η f παίρνει ελάχιστη τιμή $f(x_0)>0$ σε κάποιο $x_0\in[a,b]$. Αν θέσουμε $\xi=f(x_0)$, τότε $\xi>0$ και $f(x)\geqslant f(x_0)=\xi$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Αν αντικαταστήσουμε το $[a,b]$ με το $(a,b]$ τότε το συμπέρασμα παύει να ισχύει. Παράδειγμα: η $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$ είναι συνεχής και $f(x)=x>0$ για κάθε $x\in(0,1]$. Όμως, $\inf\{f(x):x\in(0,1]\}=\inf(0,1]=0$. Άρα, για κάθε $\xi>0$ υπάρχει $x\in(0,1]$ ώστε $f(x)=x<\xi$.

25. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\rho>0$ ώστε $f(x)>g(x)+\rho$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνεχή συνάρτηση $f-g:[a,b]\to\mathbb{R}$. Η $f-g$ παίρνει ελάχιστη τιμή m σε κάποιο $y\in[a,b]$. Από την υπόθεση έχουμε $m=(f-g)(y)=f(y)-g(y)>0$. Αν θέσουμε $\rho=\frac{m}{2}$, τότε $\rho>0$ και για κάθε $x\in[a,b]$ έχουμε $f(x)-g(x)\geqslant m>\rho$.

26. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x\in[a,b]$ υπάρχει $y\in[a,b]$ ώστε $|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in[a,b]$ ώστε $f(x_0)=0$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν μηδενίζεται στο $[a,b]$. Τότε, $|f(t)|>0$ για κάθε $t\in[a,b]$. Η συνεχής συνάρτηση $|f|$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$. Δηλαδή, υπάρχει $x\in[a,b]$ ώστε

$$|f(t)|\geqslant|f(x)|>0\quad\text{για κάθε } t\in[a,b].$$

Όμως, από την υπόθεση, υπάρχει $y\in[a,b]$ ώστε

$$0<|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}|f(y)|.$$

Δηλαδή, $|f(y)|<0$, το οποίο είναι άτοπο.

27. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι $\max(f)<\max(g)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε $t\in[a,b]$ με $f(t)=\max(f)$. Τότε,

$$\max(f)=f(t)<g(t)\leqslant\max(g),$$

δηλαδή $\max(f)<\max(g)$.

28. Έστω $f,g:[a,b]\to[c,d]$ συνεχείς και επί συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

Υπόδειξη. Αφού οι f,g είναι επί του $[c,d]$, υπάρχουν $x_1,x_2\in[a,b]$ ώστε $f(x_1)=d=g(x_2)$. Τότε, για τη συνάρτηση $h=f-g$ έχουμε

$$h(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=d-g(x_1)\geqslant 0$$

και

$$h(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-d\leqslant 0.$$

Από την $h(x_1)h(x_2)\leqslant 0$ και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $h(\xi)=0$, δηλαδή $f(\xi)=g(\xi)$.

29. Δείξτε ότι αν $a,b>0$ τότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]=\frac{b}{a}\quad\text{και}\quad\lim_{x\to 0^+}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]=0.$$

Τι γίνεται όταν $x \to 0^-$;

Υπόδειξη. (α) Έστω $x > 0$. Παρατηρήστε ότι $\frac{b}{x} - 1 < \left[\frac{b}{x}\right] \leqslant \frac{b}{x}$ και $\frac{x}{a} > 0$, άρα

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \leqslant \frac{b}{a}.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{b}{a} - \frac{x}{a}\right) = \frac{b}{a}$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a}$.

Για το δεύτερο όριο, παρατηρήστε ότι αν $0 < x < a$ τότε $\left[\frac{x}{a}\right]$ =0. Άρα, $\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = 0$ για κάθε $x \in (0, a)$. Έπεται ότι $\lim_{x\to 0^+}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = 0$.

(β)Έστω $x < 0$. Παρατηρήστε ότι $\frac{b}{x} - 1 < \left[\frac{b}{x}\right] \leqslant \frac{b}{x}$ και $\frac{x}{a} < 0$, άρα

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} > \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \geqslant \frac{b}{a}.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{b}{a} - \frac{x}{a}\right) = \frac{b}{a}$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a}$.

Για το δεύτερο όριο, παρατηρήστε ότι αν $-a < x < 0$ τότε $-1 < \frac{x}{a} < 0$, άρα $\left[\frac{x}{a}\right] = -1$. Συνεπώς, $\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = -\frac{b}{x}$ για κάθε $x \in (-a, 0)$. Έπεται ότι $\lim_{x\to 0^-}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = +\infty$.

30. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ και 0 αλλιώς. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Υπόδειξη. Το όριο δεν υπάρχει. Οι ακολουθίες $a_n = \frac{1}{n}$ και $b_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ συγκλίνουν στο 0. Έχουμε $f(a_n) = 1 \to 1$ και $f(b_n) = 0 \to 0$. Αν υπήρχε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell$, από την αρχή της μεταφοράς θα είχαμε $f(a_n) \to \ell$ και $f(b_n) \to \ell$, δηλαδή $1 = \ell = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

31. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = x + nT$. Τότε, $x_n \to +\infty$ και $f(x_n) = f(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$, από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Άρα $f(x) = b$. Το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι σταθερή: $f(x) = b$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

32. Έστω $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο με την ιδιότητα $a_0 a_m < 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει θετική πραγματική ρίζα.

Υπόδειξη. Έστω $x > 0$. Γράφουμε $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = a_m x^m (1 + \Delta(x))$ όπου

$$\Delta(x) = \frac{a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_m x^m}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \Delta(x) = 0,$$

άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$1 + \Delta(x) > 0$$

για κάθε $x \geqslant M$. Ειδικότερα, οι $P(M)$ και a_m έχουν το ίδιο πρόσημο (εξηγήστε γιατί). Χρησιμοποιώντας και την $P(0) = a_0$, βλέπουμε ότι ο $P(M)P(0)$ είναι ομόσημος με τον $a_0 a_m$, δηλαδή αρνητικός. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\rho \in (0, M)$ ώστε $P(\rho) = 0$.

33. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο: υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 για τον οποίο

$$f(x_0) = x_0.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι φθίνουσα, για κάθε $x > 0$ έχουμε $f(x) - x \leqslant f(0) - x$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(0) - x) = -\infty$. Άρα, υπάρχει $x_1 > 0$ ώστε $f(x_1) - x_1 < 0$.

Όμοια, για κάθε $x < 0$ έχουμε $f(x) - x \geqslant f(0) - x$ και $\lim_{x\to-\infty}(f(0) - x) = +\infty$. Άρα, υπάρχει $x_2 < 0$ ώστε $f(x_2) - x_2 > 0$.

Αφού η f είναι συνεχής, εφραμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για την $f(x) - x$ στο διάστημα $[x_2, x_1]$ βρίσκουμε $x_0 \in (x_2, x_1)$ ώστε $f(x_0) - x_0 = 0$, δηλαδή $f(x_0) = x_0$.

Για τη μοναδικότητα, παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα, και συνεπώς, έχει το πολύ μία ρίζα.

34. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $f(y) \geqslant f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $\varepsilon = f(0) > 0$. Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $x > M$ ισχύει $0 < f(x) < f(0)$. Αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, υπάρχει $N > 0$ ώστε: για κάθε $x < -N$ ισχύει $0 < f(x) < f(0)$.

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-N, M]$. Άρα, υπάρχει $y \in [-N, M]$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in [-N, M]$ ισχύει $f(x) \leqslant f(y)$. Ειδικότερα, αφού $-N < 0 < M$ έχουμε $f(0) \leqslant f(y)$.

Μπορούμε τώρα εύκολα να δούμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο y. Θεωρήστε τυχόν $x \in \mathbb{R}$ και διακρίνετε τις περιπτώσεις $x < -N$, $x \in [-N, M]$ και $x > M$.

35. (α) Έστω $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geqslant 0$ δείξτε ότι η g διατηρεί πρόσημο: ή $g(x) > 0$ για κάθε $x \geqslant 0$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \geqslant 0$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geqslant 0$, δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Υπόδειξη. (α) Αφού $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geqslant 0$, αν η g δεν διατηρεί πρόσημο, θα υπάρχουν $x_1, x_2 \geqslant 0$ ώστε $g(x_1) < 0$ και $g(x_2) > 0$. Όμως τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μπορούμε να βρούμε ξ ανάμεσα στα x_1 και x_2 για το οποίο $g(\xi) = 0$. Έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο (από την υπόθεση έχουμε $g(\xi) \neq 0$).

(β) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Από την υπόθεση έχουμε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \geqslant 0$. Από το (α), η g διατηρεί πρόσημο. Αφού $g(0) = f(0) > 0$, συμπεραίνουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \geqslant 0$. Συνεπώς, $f(x) > x$ για κάθε $x \geqslant 0$. Έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

36. Υποθέτουμε ότι η $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in [a, +\infty)$ με $f(x) \geqslant f(x_0)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

Υπόδειξη. Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει $M > a$ ώστε $f(x) > f(a)$ για κάθε $x > M$.

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, M]$, άρα υπάρχει $x_0 \in [a, M]$ ώστε $f(x_0) \leqslant f(x)$ για κάθε $x \in [a, M]$. Τότε, έχουμε επίσης

$$f(x) > f(a) \geqslant f(x_0)$$

(η δεύτερη ανισότητα ισχύει διότι $a \in [a, M]$).

Έπεται ότι $f(x) \geqslant f(x_0)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

37. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$, τότε η f παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

Υπόδειξη. Αν η f είναι σταθερή και $f(x) = \alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f παίρνει προφανώς μέγιστη και ελάχιστη τιμή (την α). Αλλιώς, είτε υπάρχει x_1 ώστε $f(x_1) > \alpha$ ή υπάρχει x_2 ώστε $f(x_2) < \alpha$ (μπορεί φυσικά να συμβαίνουν και τα δύο).

Με την υπόθεση ότι υπάρχει x_1 ώστε $f(x_1) > \alpha$, θα δείξουμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή. Θέτουμε $\varepsilon = f(x_1) - \alpha > 0$. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$, υπάρχει $M > \max\{0, x_1\}$ ώστε: για κάθε $x > M$ ισχύει $f(x) < \alpha + \varepsilon = f(x_1)$. Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$, υπάρχει $N > 0$ ώστε $-N < x_1$ και για κάθε $x < -N$ να ισχύει $f(x) < \alpha + \varepsilon = f(x_1)$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-N, M]$. Άρα, υπάρχει $y \in [-N, M]$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in [-N, M]$ ισχύει $f(x) \leqslant f(y)$. Ειδικότερα, αφού $-N < x_1 < M$ έχουμε $f(x_1) \leqslant f(y)$. Μπορούμε τώρα εύκολα να δούμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο y. Θεωρήστε τυχόν $x \in \mathbb{R}$ και διακρίνετε τις περιπτώσεις $x < -N$, $x \in [-N, M]$ και $x > M$.

Με την υπόθεση ότι υπάρχει x_2 ώστε $f(x_2) < \alpha$, δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

38. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Ο εγκλεισμός $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ είναι προφανής. Θα δείξουμε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $y = f(x)$, οπότε $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R})$.

Έστω $y \in \mathbb{R}$. Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $x_1 < 0$ και $f(x_1) < y$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $x_2 > 0$ και $f(x_2) > y$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $f(x_1) < y < f(x_2)$ και η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in (x_1, x_2)$ ώστε $f(x) = y$.

39. Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση γνησίως αύξουσα και συνεχής. Δείξτε ότι

$$f((\alpha, \beta)) = (\lim_{x\to\alpha^+} f(x), \lim_{x\to\beta^-} f(x)).$$

Υπόδειξη. Αφού η $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, γνωρίζουμε ότι το $f((\alpha, \beta))$ είναι ένα διάστημα J το οποίο περιέχει το (γ, δ), όπου $\gamma = \inf\limits_{\alpha<x<\beta} f(x)$ και $\delta = \sup\limits_{\alpha<x<\beta} f(x)$.

Δείξτε πρώτα ότι $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = \gamma$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = \delta$. Για παράδειγμα, η πρώτη ισότητα έπεται από τα εξής:

1. Αν $\alpha < x < \beta$ τότε $f(x) \geqslant \gamma$, άρα $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) \geqslant \gamma$.

2. Αν $\alpha < y < \beta$, τότε για κάθε $x \in (\alpha, y)$ έχουμε $f(x) < f(y)$, άρα $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) \leqslant f(y)$. Δηλαδή, το $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ είναι κάτω φράγμα του $\{f(y) : \alpha < y < \beta\}$, οπότε $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) \leqslant \gamma$.

Μένει να δείξουμε ότι το $f((\alpha, \beta))$ δεν περιέχει τα γ και δ (αν αυτά είναι πεπερασμένα). Αυτό όμως είναι συνέπεια του ότι η f είναι γνησίως αύξουσα: για παράδειγμα, αν $\gamma = f(x)$ για κάποιο $x \in (\alpha, \beta)$ τότε παίρνοντας τυχόν $\alpha < z < x$ θα είχαμε $f(z) < f(x) = \gamma$, που είναι άτοπο αφού ο γ είναι κάτω φράγμα του $f((\alpha, \beta))$.

40. Έστω $a \in [0, \pi]$. Ορίζουμε ακολουθία με $a_1 = a$ και $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Δείξτε ότι $a_n \to 0$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα με επαγωγή ότι $a_n \in [0, \pi]$ για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε, από την ανισότητα $0 \leqslant \sin x \leqslant x$ που ισχύει για $x \in [0, \pi]$, έχουμε ότι, για κάθε $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \sin(a_n) \leqslant a_n$. Δηλαδή, η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0. Έπεται ότι η (a_n) συγκλίνει σε κάποιο $x \in [0, \pi]$. Από την αναδρομική σχέση βλέπουμε ότι, αφού $a_{n+1} \to x$ και $\sin(a_n) \to \sin x$, το x ικανοποιεί την εξίσωση $\sin x = x$. Αφού $x \in [0, \pi]$, αναγκαστικά ισχύει $x = 0$ (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή, $a_n \to 0$.

41. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n \in [0, 1]$ ώστε $f(x_n) \to 0$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν μηδενίζεται στο $[a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $|f(x)| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in [a, b]$ (χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η $|f|$ παίρνει ελάχιστη τιμή). Από την υπόθεση όμως, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $[0, 1]$ ώστε $f(x_n) \to 0$. Για όλους τελικά τους $n \in \mathbb{N}$ πρέπει να ισχύει $|f(x_n)| < \varepsilon$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

42. Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι

(α) η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I, αν όμως οι f, g υποτεθούν και φραγμένες τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta_1$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ομοίως, αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta_2$ τότε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Τότε, αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta$, έχουμε

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))| \\ &\leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) Αν οι f, g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο I τότε η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I: θεωρήστε τις $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = g(x) = x$. Αυτές είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $[0, +\infty)$, όμως η $(f \cdot g)(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Αν όμως οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις $f, g : I \to \mathbb{R}$ υποτεθούν και φραγμένες, τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I. Υπάρχουν $M, N > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant M$ και $|g(x)| \leqslant N$ για κάθε $x \in I$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια των f και g μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{M+N} \quad \text{και} \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{M+N}.$$

Τότε, αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leqslant |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{M+N} + N \cdot \frac{\varepsilon}{M+N} = \varepsilon. \end{aligned}$$

43. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geqslant M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geqslant M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon/3$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-M, M]$, οπότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-M, M]$. Άρα, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με $\delta < M$, ώστε αν $x, y \in [-M, M]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$.

Θα δείξουμε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) $x, y \in (-\infty, M]$: τότε, $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(ii) $x, y \in [M, +\infty)$: τότε, $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(iii) $x, y \in [-M, M]$: τότε, από την επιλογή του δ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(iv) $x < M < y$: τότε, $x \in [-M, M]$ (διότι $\delta < M$) και $|x - M| < |x - y| < \delta$, άρα $|f(x) - f(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Επίσης, $M, y \geqslant M$ άρα $|f(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$ και $|f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| \\ &\leqslant |f(x) - f(M)| + |f(M)| + |f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(v) $x < -M < y$: όμοια με την προηγούμενη περίπτωση.

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

44. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Υπόδειξη. Έστω $\ell := \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \ell$. Τότε, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > a$ ώστε αν $x \geqslant M$ τότε $|g(x)| < \varepsilon$. Το επιχείρημα της προηγούμενης άσκησης δείχνει ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Αφού η σταθερή συνάρτηση $h(x) = \ell$ είναι επίσης ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$, έπεται ότι η $f = g + h$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$.

45. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Αφού η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, για $\varepsilon = 1$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < 1$.

Έστω $x > 0$. Θεωρούμε τον ελάχιστο φυσικό $n = n_x$ για τον οποίο $n_x \frac{\delta}{2} > x$ (αυτός υπάρχει, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα και από την αρχή του ελαχίστου). Τότε,

$$(n_x - 1)\frac{\delta}{2} \leqslant x < n_x \frac{\delta}{2}. \tag{$*$}$$

Θεωρούμε τα σημεία: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\delta}{2}, \ldots, x_n = n\frac{\delta}{2}$. Έχουμε $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ και $|x - x_n| < \delta$. Άρα,

$$|f(x) - f(0)| \leqslant |f(x) - f(x_n)| + \cdots + |f(x_1) - f(x_0)| < n + 1 = n_x + 1 < \frac{2}{\delta}x + 2$$

από την $(*)$. Δηλαδή, για κάθε $x > 0$.

$$|f(x)| \leqslant \frac{2}{\delta}x + 2 + |f(0)|.$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για $x<0$ δείξτε ότι

$$|f(x)| \leqslant \frac{2}{\delta}|x| + 2 + |f(0)|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, το ζητούμενο ισχύει με $A = \frac{2}{\delta}$ και $B = |f(0)| + 2$.

46. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Υπόδειξη. Έστω $n > 1$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Από την προηγούμενη άσκηση υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $x^n \leqslant Ax + B$ για κάθε $x > 0$. Τότε,

$$x^{n-1} \leqslant A + \frac{B}{x}$$

για κάθε $x > 0$. Αφού $n > 1$, έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-1} = +\infty$. Όμως, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(A + \frac{B}{x}\right) = A$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο.

47. (α) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

(β) Δείξτε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Υπόδειξη. (α) Έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, a]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, a]$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$ χρησιμοποιώντας την τεχνική της Άσκησης 43 (διακρίνοντας περιπτώσεις).

(β) Η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Αν $x, y \in [1, +\infty)$, τότε

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leqslant \frac{1}{2}|x - y|,$$

δηλαδή η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο $[1, +\infty)$. Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$. Τώρα, μπορείτε να εφαρμόσετε το (α).

48. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

(α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x + 1$.

(β) $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$.

(γ) $f : (0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}\sin^2 x$.

(δ) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

(ε) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$.

(στ) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

(ζ) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^3)}{x}$.

(η) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

(ϑ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

(ι) $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(ια) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\sin x$.

(ιβ) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$.

Υπόδειξη. Όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

(α) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x+1$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής: είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 3. Για την ακρίβεια,

$$|f(x)-f(y)|=3|x-y|$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

(β) $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής: είναι Lipschitz συνεχής, αφού

$$|f'(x)|=\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{4}$$

στο $[2,+\infty)$.

(γ) $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}\sin^2 x$. Η f ορίζεται στο ημιανοικτό διάστημα $(0,\pi]$ και

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=1\cdot 0=0.$$

Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(δ) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, διότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}.$$

(ε) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$. Επεκτείνουμε την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[0,+\infty)$, θέτοντας

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Για κάθε $x>0$ έχουμε

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Αν $x\geqslant 1$ τότε

$$|f'(x)|\leqslant\left|\sin\frac{1}{x}\right|+\frac{1}{x}\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant 2.$$

Συνεπώς, η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα και ομοιόμορφα συνεχής, στο $[1,+\infty)$. Αφού είναι και συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι ομοιόμορφα συνεχής (από την Άσκηση 47(α)).

(στ) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. Επεκτείνουμε την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[0,+\infty)$, θέτοντας

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Αφού

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0,$$

η f είναι ομοιόμορφα συνεχής από την Άσκηση 44.

(ζ) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\cos(x^3)}{x}$. Επεκτείνουμε την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[1,+\infty)$, θέτοντας

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cos(x^3)}{x}=\cos(1).$$

Αφού

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x^3)}{x}=0,$$

η f είναι ομοιόμορφα συνεχής από την Άσκηση 44.

(η) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Αφού $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+4} = 0$, η f ικανοποιεί την υπόθεση της Άσκησης 43. Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ϑ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$, από την Άσκηση 9. Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$, πάλι από την Άσκηση 44. Έπεται ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ (χρησιμοποιήστε την τεχνική της Άσκησης 43).

(ι) $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ια) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin x$. Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρατηρούμε ότι η $f'(x) = x \cos x + \sin x$ δεν είναι φραγμένη και ότι παίρνει μεγάλες τιμές στα σημεία της μορφής $2n\pi$ όπου n μεγάλος φυσικός. Ορίζουμε $x_n = 2n\pi$ και $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$. Τότε, $y_n - x_n = \frac{1}{n} \to 0$, αλλά

$$f(y_n) - f(x_n) = \big(2n\pi + (1/n)\big) \sin(1/n) = 2\pi \frac{\sin(1/n)}{1/n} + \frac{\sin(1/n)}{n} \to 2\pi \cdot 1 + 0 = 2\pi \neq 0$$

όταν $n \to \infty$. Από τον χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών έπεται ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ιβ) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$, από την Άσκηση 44.

Γ΄ Ομάδα

49. Δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια *συνεχής* συνάρτηση με $f(1) = \alpha$, η οποία ικανοποιεί την $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, τότε:

(α) $f(n) = n\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) $f(\frac{1}{m}) = \frac{\alpha}{m}$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots$.

(γ) $f(x) = \alpha x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Έχουμε υποθέσει ότι η f ικανοποιεί την $f(x+y) = f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Παίρνοντας $x = y = 0$ μπορείτε να ελέγξετε ότι $f(0) = 0$. Κατόπιν, για δοσμένο $x \in \mathbb{R}$, παίρνοντας $y = -x$ μπορείτε να ελέγξετε ότι $f(-x) = -f(x)$.

(α) Χρησιμοποιώντας επαγωγή δείχνουμε ότι

$$(*) \qquad f(x_1 + \cdots + x_m) = f(x_1) + \cdots + f(x_m)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$. Παίρνοντας $m = n$ και $x_1 = \cdots = x_n = 1$ βλέπουμε ότι $f(n) = n\alpha$.

(β) Πάρτε $x_1 = \cdots = x_m = \frac{1}{m}$ στην $(*)$.

(γ) Θεωρήστε πρώτα $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. Γράψτε τον q στη μορφή $\pm\big(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\big)$ – για κατάλληλο πλήθος προσθετέων – και χρησιμοποιήστε το (β) για να δείξετε ότι $f(q) = \alpha q$. Αν $q < 0$ το ζητούμενο έπεται από την $f(-x) = -f(x)$.

Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε ακολουθία ρητών αριθμών $q_n \to x$. Αφού η f είναι συνεχής, από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} (\alpha q_n) = \alpha x.$$

50. Μελετήστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \ \text{ ή } \ x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{αν } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}\,(p,q) = 1. \end{cases}$$

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν ο $x \in (0,1]$ είναι ρητός, οπότε γράφεται στη μορφή $x = \frac{p}{q}$ όπου $p, q \in \mathbb{N}$ με ΜΚΔ$(p,q) = 1$, τότε η f είναι ασυνεχής στο σημείο x. Πράγματι, υπάρχει ακολουθία αρρήτων αριθμών $\alpha_n \in [0,1]$ με $\alpha_n \to x$. Τότε, $f(\alpha_n) = 0 \to 0 \neq \frac{1}{q} = f(x)$, και το συμπέρασμα έπεται από την αρχή της μεταφοράς.

Έστω τώρα ότι ο $x \in [0,1]$ είναι άρρητος και έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $M = M(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ και $A(\varepsilon) = \{y \in [0,1] : f(y) \geqslant \varepsilon\}$. Αν ο y ανήκει στο $A(\varepsilon)$ τότε είναι ρητός ο οποίος γράφεται στη μορφή $x = \frac{p}{q}$ όπου $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leqslant q$ και $f(y) = \frac{1}{q} \geqslant \varepsilon$. Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι το πολύ ίσο με το πλήθος των ζευγαριών (p,q) φυσικών αριθμών όπου $q \leqslant M$ και $p \leqslant q$. Επομένως, δεν ξεπερνάει τον $M(M+1)/2$. Δηλαδή, το $A(\varepsilon)$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $A(\varepsilon) = \{y_1, \dots, y_m\}$ όπου $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.

Αφού ο x είναι άρρητος, ο x δεν ανήκει στο $A(\varepsilon)$. Άρα, ο αριθμός $\delta = \min\{|x - y_1|, \dots, |x - y_m|\}$ είναι γνήσια θετικός. Έστω $z \in [0,1]$ με $|z - x| < \delta$. Τότε, $z \notin A(\varepsilon)$ άρα $f(z) < \varepsilon$. Αφού $f(x) = 0$, έπεται ότι $0 \leqslant f(z) = f(z) - f(x) < \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι συνεχής στο σημείο x.

Τέλος, δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο 0.

51. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι $f(x/2) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (και με επαγωγή) δείχνουμε ότι

$$f(x) = f(x/2) = f(x/2^2) = \cdots = f(x/2^n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $\frac{x}{2^n} \to 0$ και η f είναι συνεχής στο 0. Από την αρχή της μεταφοράς, $f(x/2^n) \to f(0)$. Αφού $f(x) = f(x/2^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(f(x/2^n))$ είναι σταθερή, με όλους τους όρους της ίσους με $f(x)$. Έπεται ότι $f(x) = f(0)$ και, αφού το $x \neq 0$ ήταν τυχόν, η f είναι σταθερή.

52. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(\frac{m}{2^n}) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο ακέραιος $m_n = [2^n x]$ ικανοποιεί την $m_n \leqslant 2^n x < m_n + 1$. Άρα,

$$\frac{m_n}{2^n} \leqslant \frac{2^n x}{2^n} = x < \frac{m_n + 1}{2^n} = \frac{m_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Δηλαδή, $x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n}{2^n}$. Από την αρχή της μεταφοράς,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{m_n}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

53. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) = f\big(x + \frac{1}{n}\big)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έπεται ότι $f(0) = f\left(\frac{m}{n}\right)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $m_n(x) = [nx]$, τότε $m_n(x) \in \mathbb{Z}$ και $m_n(x) \leqslant nx < m_n(x) + 1$. Άρα,

$$\frac{m_n(x)}{n} \leqslant x < \frac{m_n(x)}{n} + \frac{1}{n}.$$

Παρατηρήστε ότι $f\left(\frac{m_n(x)}{n}\right) = f(0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι $x = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n(x)}{n}$. Από τη συνέχεια της f στο σημείο x συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{m_n(x)}{n}\right) = f(0).$$

Το x ήταν τυχόν, άρα η f είναι σταθερή.

54. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $A = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$. Αν $A \neq \emptyset$, δείξτε ότι $\sup A \in A$ και $\inf A \in A$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to \sup A$. Η f είναι συνεχής, άρα $f(x_n) \to f(\sup A)$ από την αρχή της μεταφοράς. Όμως $x_n \in A$, άρα $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $f(\sup A) = 0$, δηλαδή $\sup A \in A$.

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $\inf A \in A$.

55. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$: δηλαδή, $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = f(x + \sqrt{2})$.

Υπόδειξη. Η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο κλειστό διάστημα $[0, T]$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0, T]$ ώστε $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ για κάθε $x \in [0, T]$. Αφού η f είναι περιοδική με περίοδο T, μπορούμε να ελέγξουμε ότι η ανισότητα

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$$

ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $x+kT \in [0, T]$, και από την περιοδικότητα της f, $f(x) = f(x + kT)$).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - f(x+\sqrt{2})$. Τότε, $g(x_1) = f(x_1) - f(x_1+\sqrt{2}) \leqslant 0$ και $g(x_2) = f(x_2) - f(x_2+\sqrt{2}) \geqslant 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, βρίσκουμε x ανάμεσα στα x_1 και x_2 ώστε $g(x) = 0$, δηλαδή $f(x) = f(x + \sqrt{2})$.

56. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a < b$ και ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[0, +\infty)$ με $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ και $f(x_n) \to a$, $f(y_n) \to b$. Δείξτε ότι: για κάθε $c \in (a, b)$ υπάρχει ακολουθία (z_n) στο $[0, +\infty)$ με $z_n \to +\infty$ και $f(z_n) \to c$.

Υπόδειξη. Έστω $c \in (a, b)$. Αφού $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ και $f(x_n) \to a$, $f(y_n) \to b$, μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (k_n) ώστε:

$$(*) \qquad x_{k_n} > n,\ y_{k_n} > n \text{ και } f(x_{k_n}) < c < f(y_{k_n}).$$

Δείξτε το επαγωγικά. Για το επαγωγικό βήμα παρατηρήστε ότι όλοι τελικά οι όροι των $(x_m), (y_m)$ ικανοποιούν καθεμιά από τις $x_m > n + 1$, $y_m > n + 1$, $f(x_m) < c < f(y_m)$ (εξηγήστε γιατί) άρα υπάρχει $k_{n+1} > k_n$ ώστε να ισχύουν όλες μαζί για τους $x_{k_{n+1}}, y_{k_{n+1}}$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, βρίσκουμε z_n ανάμεσα στα x_{k_n} και y_{k_n} ώστε $f(z_n) = c$. Επιπλέον, αφού $x_{k_n}, y_{k_n} > n$, έχουμε $z_n > n$. Συνεπώς, $z_n \to +\infty$ και $f(z_n) = c \to c$.

57. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε *μονότονη* ακολουθία (x_n) σημείων του (a, b) με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

Υπόδειξη. ($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε μονότονη ακολουθία $y_n \in (a, b)$ ώστε $y_n \to x_0$ και $|f(y_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$. Αυτό δικαιολογείται ως εξής: αν έχουμε βρει τον x_n, παρατηρούμε ότι αναγκαστικά $x_n \neq x_0$ και επιλέγουμε x_{n+1} ώστε $|x_{n+1} - x_0| < |x_n - x_0|$, $|x_{n+1} - x_0| < \frac{1}{n+1}$ και $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$. Τότε, η ακολουθία $(|x_n - x_0|)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στο 0. Αν άπειροι όροι της (x_n) είναι μικρότεροι από τον

x_0, η ακολουθία (y_n) αυτών των όρων είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο x_0, οπότε ικανοποιεί τον ισχυρισμό. Αν όχι, υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι μεγαλύτεροι από τον x_0 και η ακολουθία που σχηματίζουν είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στον x_0.

Τέλος, από την $|f(y_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$ έχουμε $f(y_n) \not\to f(x_0)$. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση.

Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) προκύπτει άμεσα από την αρχή της μεταφοράς.

58. (α) Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} f(a + t_n) = L$ για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία (t_n) με $t_n \to 0$, τότε $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

(β) Σωστό ή λάθος; Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(a + \frac{1}{n}\right) = L$ τότε $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

Υπόδειξη. (α) Με απαγωγή σε άτοπο: αν δεν ισχύει η $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in (a, +\infty)$ με $a < x < a + \delta$ και $|f(x) - L| \geqslant \varepsilon$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω με $\delta = 1$ βρίσκουμε $x_1 \in (a, +\infty)$ με $a < x_1 < a + 1$ και $|f(x_1) - L| \geqslant \varepsilon$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω με $\delta = \min\{1/2, x_1 - a\}$ βρίσκουμε $x_2 < x_1$ με $a < x_2 < a + \frac{1}{2}$ και $|f(x_2) - L| \geqslant \varepsilon$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, ορίζουμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $t_n = x_n - a$ με $t_n \to 0$ και $|f(a + t_n) - L| \geqslant \varepsilon$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) *Λάθος*. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ που παίρνει την τιμή 1 στα σημεία $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και την τιμή 0 σε όλα τα άλλα σημεία. Το $\lim\limits_{n\to\infty} f(1/n) = 1$, όμως το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει.

59. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι το $f(x_0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του $f([a, b])$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_n) στο (a, b) με $x_n \to x_0$. Τέτοια ακολουθία υπάρχει, διότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του (a, b). Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $f(x_n) < f(x_0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και αφού η f είναι συνεχής στο x_0, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$. Η ακολουθία $(f(x_n))$ έχει όρους στο $f([a, b])$, όλοι της οι όροι είναι διαφορετικοί από το $f(x_0)$ και $f(x_n) \to f(x_0)$. Από τον ακολουθιακό χαρακτηρισμό του σημείου συσσώρευσης συνόλου, το $f(x_0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του $f([a, b])$.

60. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι επί.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, αν $f(x) = f(y)$ έχουμε $0 = |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$, άρα $x = y$. Δηλαδή, η f είναι 1-1. Έπεται ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Τότε, αν $x > 0$ έχουμε $f(x) - f(0) = |f(x) - f(0)| \geqslant x$, δηλαδή

$$f(x) \geqslant f(0) + x, \ x > 0.$$

Όμοια, αν $x < 0$ έχουμε $f(0) - f(x) = |f(x) - f(0)| \geqslant |x| = -x$, δηλαδή

$$f(x) \leqslant f(0) + x, \ x < 0.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \text{ και } \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι η f είναι επί (εξηγήστε γιατί).

61. Έστω $f, g : [0,1] \to [0,1]$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα και $g \circ f = f \circ g$. Δείξτε ότι οι f και g έχουν κοινό σταθερό σημείο: υπάρχει $y \in [0,1]$ ώστε $f(y) = y$ και $g(y) = y$. [*Υπόδειξη:* Ξέρουμε ότι υπάρχει $x_1 \in [0,1]$ με $g(x_1) = x_1$. Αν ισχύει και η $f(x_1) = x_1$, έχουμε τελειώσει. Αν όχι, θεωρήστε την ακολουθία $x_{n+1} = f(x_n)$, δείξτε ότι είναι μονότονη και ότι όλοι οι όροι της είναι σταθερά σημεία της g. Το όριό της θα είναι κοινό σταθερό σημείο των f και g (γιατί;).]

Υπόδειξη. Από το θεώρημα σταθερού σημείου (δείτε και την Άσκηση 8) γνωρίζουμε ότι υπάρχει $x_1 \in [0,1]$ ώστε $g(x_1) = x_1$. Ορίζουμε αναδρομικά μια ακολουθία (x_n) στο $[0,1]$ θέτοντας $x_{n+1} = f(x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι $g(x_n) = x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, αυτό ισχύει για $n = 1$ και αν $g(x_m) = x_m$ τότε, χρησιμοποιώντας την $f \circ g = g \circ f$ έχουμε

$$g(x_{m+1}) = g(f(x_m)) = (g \circ f)(x_m) = (f \circ g)(x_m) = f(g(x_m)) = f(x_m) = x_{m+1}.$$

Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f(x_n) = x_n$ τότε το x_n είναι κοινό σταθερό σημείο των f και g.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x_{n+1} = f(x_n) \neq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, $x_2 = f(x_1) \neq x_1$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_2 > x_1$ (αν $x_2 < x_1$ δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο). Τότε, $x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2$ (γιατί η f είναι αύξουσα και έχουμε υποθέσει ότι $x_{n+1} \neq x_n$ για κάθε n). Επαγωγικά δείχνουμε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα. Αφού $x_n \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $x_n \to x_0$ για κάποιο $x_0 \in [0,1]$. Η συνέχεια της f στο x_0 δείχνει ότι

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0.$$

Από την άλλη πλευρά, η συνέχεια της g στο x_0 δείχνει ότι

$$g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Άρα, το x_0 είναι κοινό σταθερό σημείο των f και g.

62. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_0 \in [a,b]$ υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Τότε, η f είναι φραγμένη.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε $x_0 \in [a,b]$ υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Άρα, υπάρχουν $\delta_{x_0} > 0$ και $M_{x_0} > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant M_{x_0}$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta_{x_0}, x + \delta_{x-0}) \cap [a,b]$ (εφαρμόστε τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon = 1$). Τώρα, μπορείτε να μιμηθείτε την απόδειξη του βασικού θεωρήματος ότι «κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα είναι φραγμένη».