

Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 3: Σειρές πραγματικών αριθμών

Α' Ομάδα

1. Έστω  $(a_k)$  μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν  $a_k \rightarrow 0$  τότε η ακολουθία  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  είναι φραγμένη.

(β) Αν η ακολουθία  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  είναι φραγμένη τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει.

(γ) Αν  $|a_k| \rightarrow 0$ , τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει απολύτως.

(δ) Αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  συγκλίνει, τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει.

(ε) Αν  $a_k > 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και αν  $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ , τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει.

(στ) Αν  $a_k > 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και αν  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ , τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  αποκλίνει.

(ζ) Αν  $a_k > 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και αν  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow +\infty$ , τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  αποκλίνει.

(η) Αν  $a_k \rightarrow 0$ , τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  συγκλίνει.

(θ) Αν  $a_k > 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει, τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$  συγκλίνει.

(ι) Αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει, τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  συγκλίνει.

(ια) Αν  $a_k > 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει, τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  συγκλίνει.

2. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{k!}$  συγκλίνει.

3. Εξετάστε για ποιές τιμές του  $p$  συγκλίνει η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ .

4. Δείξτε ότι

$$(α) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \quad (β) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \frac{3}{2} \quad (γ) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1.$$

5. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

6. Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου και ρίζας στις ακόλουθες σειρές:

$$(α) \sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k \quad (β) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (γ) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \quad (δ) \sum_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$$

$$(\epsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k \quad (\sigma\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2} \quad (\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k \quad (\eta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10} x^k}{k!}.$$

Αν για κάποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  κανένα από αυτά τα δύο κριτήρια δεν δίνει απάντηση, εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς με άλλο τρόπο.

7. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(\alpha) a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \quad (\beta) a_k = \sqrt{1+k^2} - k$$

$$(\gamma) a_k = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k} \quad (\delta) a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)^k.$$

8. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \sqrt{k}}{2k^3 - 1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

9. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι  $p, q, x \in \mathbb{R}$  να βρεθούν οι τιμές τους για τις οποίες οι αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

$$(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2} \quad (\beta) \sum_{k=1}^{\infty} p^k k^p \quad (0 < p) \quad (\gamma) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q} \quad (0 < q < p)$$

$$(\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} \quad (\epsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k} \quad (0 < q < p) \quad (\sigma\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$$

$$(\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

### Β' Ομάδα

10. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

$$(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k}, \quad (\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}, \quad (\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$$

$$(\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - \sqrt{k}}{k^2 + 1}, \quad (\epsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}, \quad (\sigma\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + k}, \quad (\eta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, \quad (\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}.$$

11. Ορίζουμε μια ακολουθία  $(a_k)$  ως εξής: αν ο  $k$  είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε  $a_k = \frac{1}{k}$  και αν ο  $k$  δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε  $a_k = \frac{1}{k^2}$ . Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

12. Έστω  $\{a_k\}$  φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Ορίζουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k.$$

Δείξτε ότι  $0 \leq (-1)^n (s - s_n) \leq a_{n+1}$ .

13. Έστω  $(a_k)$  φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει τότε  $ka_k \rightarrow 0$ .

14. Έστω ότι  $a_k > 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ . Αν η  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει, δείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

15. Υποθέτουμε ότι  $a_k \geq 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και ότι η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$  συγκλίνει. Δείξτε ότι, αν η  $\{a_k\}$  είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

16. Υποθέτουμε ότι  $a_k \geq 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και ότι η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$  συγκλίνει.

17. Έστω  $(a_k), (b_k)$  δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν οι σειρές  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  και  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$  συγκλίνουν, τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  συγκλίνει απολύτως.

18. Έστω  $(a_k)$  μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  συγκλίνει και αν  $p > 1/2$ , τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^p}$  συγκλίνει απολύτως.

19. Προσδιορίστε τις τιμές των  $a, b, c$  για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{k^b (\ln k)^c}.$$

20. Προσδιορίστε τις τιμές των  $a, b, c > 0$  για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \sin\left(\frac{1}{k^b}\right) \cos\left(\frac{1}{k^c}\right).$$

21. Έστω  $(a_k)$  ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k > 1$ . Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$$

συγκλίνει.

22. Έστω  $(a_n)$  ακολουθία στο  $\mathbb{R}$ . Υποθέτουμε ότι  $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n^2}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Δείξτε ότι η  $(a_n)$  συγκλίνει.

23. Έστω  $(a_k), (b_k)$  δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει και αν η  $(b_k)$  είναι μονότονη και φραγμένη, τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  συγκλίνει.

24. Έστω  $(a_k), (b_k)$  δύο ακολουθίες. Αν η  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει και η  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$  συγκλίνει, δείξτε ότι η  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  συγκλίνει.

25. Έστω  $(a_k)_{k \geq 0}$  φραγμένη ακολουθία. Υποθέτουμε ότι η  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  αποκλίνει. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης  $R$  της δυναμοσειράς  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ισούται με 1.

26. Έστω  $(a_k)_{k \geq 0}$  ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  συγκλίνει υπό συνθήκη. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης  $R$  της δυναμοσειράς  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ισούται με 1.

## Γ' Ομάδα

27. Υποθέτουμε ότι  $a_k \geq 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και ότι η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  αποκλίνει. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1.$$

28. Έστω  $(a_k)$  φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με  $a_k \rightarrow 0$ . Δείξτε ότι: αν η  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  αποκλίνει τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min \left\{ a_k, \frac{1}{k} \right\} = +\infty.$$

29. Υποθέτουμε ότι  $a_k > 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και ότι η  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  αποκλίνει. Θέτουμε  $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ .

(α) Δείξτε ότι η  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$  αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι: για  $1 \leq m < n$ ,

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_m}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$  αποκλίνει.

(γ) Δείξτε ότι  $\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$  και συμπεράνατε ότι η  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$  συγχλίνει.

30. Υποθέτουμε ότι  $a_k > 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και ότι η  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγχλίνει. Θέτουμε  $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ .

(α) Δείξτε ότι: για  $1 \leq m < n$ ,

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$$

και συμπεράνατε ότι η  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$  αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι  $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$  και συμπεράνατε ότι η  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$  συγχλίνει.

31. Έστω  $(a_k)$  ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  αποκλίνει τότε και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$$

αποκλίνει.

32. Έστω  $(a_k)$  ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγχλίνει, τότε

και η  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$  συγχλίνει.