Ανάλυση Ι και Εφαρμογές

29 Ιανουαρίου 2019

1. (1+0.5 μον.) (α) Έστω A μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και α ένα κάτω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι $\alpha = \inf A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του A τέτοια ώστε $x_n \to \alpha$.

(β) Έστω $B \subseteq (0, +\infty)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in B$ υπάρχει $y \in B$ ώστε $y < \frac{x}{2}$. Αποδείξτε ότι $\inf(B) = 0$.

2. (1+1 μον.) (α) Αποδείξτε πλήρως ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε κάποιον $x \in \mathbb{R}$. Με την πρόσθετη υπόθεση ότι η (x_n) είναι *γνησίως αύξουσα*, αποδείξτε ότι $x \neq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή, το όριο της (x_n) δεν είναι όρος της (x_n)).

(β) Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_1 = \sqrt{2}$ και, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Αποδείξτε ότι:

(i) όλοι οι όροι της (a_n) είναι άρρητοι,

(ii) η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη.

Προσδιορίστε το όριο της (a_n).

3. (1+0.5 μον.) (α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}}.$$

(β) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

(δηλαδή, το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η παραπάνω σειρά συγκλίνει).

4. (1+1 μον.) (α) Διατυπώστε το θεώρημα Bolzano-Weierstrass. Χρησιμοποιώντας το αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη.

(β) Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη. Παίρνει (απαραίτητα) μέγιστη τιμή;

5. (0.8+1.2 μον.) (α) Έστω $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} (f(2x) - f(x)) = 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \text{ημ} \frac{1}{x} & , \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

(i) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και εξετάστε αν η f' είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Αποδείξτε ότι $f'(0) > 0$ αλλά **για κάθε** $\delta > 0$ η f **δεν** είναι αύξουσα στο $(-\delta, \delta)$.

6. (1+1 μον.) (α) Χρησιμοποιώντας την $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$ για $x \in (-1,1)$, αποδείξτε ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \ \text{ για κάθε } \ x \in (-1,1).$$

(β) Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το 0 της

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

στο διάστημα $(-1,1)$ και χρησιμοποιώντας το υπολογίστε το άθροισμα

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2k-1}(2k-1)}.$$

7. (1 μον.) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $0 < f'(x) \leqslant 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

Υπόδειξη: Μελετήστε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$G(x) = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt.$$

8. (1+1 μον.) (α) Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, αποδείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}\ .$$

(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx \quad , \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Μπορείτε να παραδώσετε το πολύ επτά (7) από τα οκτώ θέματα, όποια επιλέξετε.

Καλή Επιτυχία!