ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση Ι

Οκτωβρίου 6, 2017

(α) Απόδειξη με μαθηματική επαγωγή: Για κάθε φυσικό n ισχύει

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \ .$$

Αυτός είναι ο τύπος της γεωμετρικής σειράς με πεπερασμένους όρους.

(β) Ομοίως για κάθε φυσικό n ισχύει:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots (2n - 1) = n^2 \ .$$

(γ) Δεν αρκεί για την επαγωγική απόδειξη μιας πρότασης για $n \geq n_0$ να αποδείξουμε μόνο το βήμα: ότι αν ισχύει η πρόταση για κάποιο $n \geq n_0$ ότι θα ισχύει και για το $n + 1$. Πρέπει να δείξουμε επίσης ότι η προτάταση ισχύει για $n = n_0$ Π.χ. η πρόταση

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \quad ,$$

δεν είναι αληθής παρότι μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν ισχύει για τον n θα ισχύει και για τον $n+1$. Ο Pólya παραθέτει το εξής παράδειγμα λαθεμένης χρήσης της επαγωγικής μεθόδου: δείχνει ότι αν σε μία ομάδα n φοιτητών ένας είναι γαλανομάτης τότε όλοι οι φοιτητές έχουν γαλανά μάτια. Η γενική πρόταση αυτή είναι λανθασμένη. Ποιό είναι το λάθος στην επαγωγική απόδειξη (που συζητήσαμε στην τάξη) της πρότασης αυτής ;

(δ) Απόδειξη με μαθηματική επαγωγή: Για κάθε φυσικό n ισχύει

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \ \ , \forall x \geq -1 \quad , \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \ \ , \forall x \geq 0$$

(ε) Δυωνυμικός τύπος:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad , \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ όπου } n! = 1 \cdots n \ \ , \ \ 0! = 1$$

(στ) (Δεν συζητήθηκε)Η έννοια του αντιπαραδείγματος: (Euler: οι αριθμοί $n^2 - n + 41$, είναι πρώτοι αριθμοί) (ζ) (Δεν συζητήθηκε) Αποδείξεις με εις άτοπον απαγωγή. Ευκλείδης (Βιβλίο IX, Πρόταση 20): Οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι. Απ. όπως στον Ευκλείδη. Έστω ότι οι πρώτοι είναι οι p_1, p_2, p_3. Θεωρήστε τον $P = p_1p_2p_3 + 1$, αν ο P είναι πρώτος τότε υπάρχει και άλλος πρώτος αριθμος που δεν είναι στη λίστα, αν ο P δεν είναι πρώτος θα διαρείται από έναν πρώτο αριθμό p, ο οποίος και αυτός δεν δεν είναι στη λίστα. Οπότε η λίστα δεν έχει εξαντλήσει τους πρώτους.

(η) Εισαγωγή στο δεκαδικό ανάπτυγμα (πολύ λίγα). Κάθε πεπερασμένο ή περιοδικό ανάπτυγμα αριθμού αντιστοιχεί σε ρητό αριθμό. Ποία η σχέση του $0.999\ldots$ και του 1; Ποίος ο ρητός που αντιστοιχεί στον $0.24858585858585\ldots$;

(θ) Μεταξύ δύο ρητών $a/b < c/d$ υπάρχει άλλος ρητός. Π.χ.: οι

$$\frac{m}{m+n}\frac{a}{b} + \frac{n}{m+n}\frac{c}{d}\ , \quad \frac{a+nc}{b+nd}$$

Επίσης κάθε ρητός p/q μεταξύ των $a/b < c/d$ μπορεί να γραφεί

$$\frac{p}{q} = \frac{ma+nc}{mb+nd}\ , m, n \in \mathbb{N}$$

(ι) Στους ρητούς δεν υπάρχει επόμενος. Υπάρχει λοιπόν αριθμός που δεν είναι ρητός, αφού μπορώ να φτιάξω 2 ρητούς οσοδήποτε κοντά τον ένα στον άλλο; Κατασκευάστε ρητό που να απέχει από τον p/q απόσταση μικρότερη του $\epsilon > 0$ οταν ο $\epsilon \in \mathbb{Q}$ (σε λίγο όταν ο $\epsilon \in \mathbb{R}$).

(ια) Πάρτε το σύνολο όλων των ρητών αριθμών της μορφής $1/n$, με $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει κάποιος αριθμός μεταξύ αυτών, ο οποίος να είναι μικρότερος από όλους; Υπάρχει κάποιος αμιγώς θετικός αριθμός, ακόμη και όχι μεταξύ των παραπάνω αριθμών, ο οποίος να είναι μικρότερος από όλους τους αριθμούς του παραπάνω συνόλου;

(ιβ) Ετέθη το ερώτημα: ο αριθμός $0.123456789101112\ldots$ που προκύπτει από την παράθεση όλων των φυσικών στη σειρά, είναι ρητός; Δείξαμε προηγουμένως ότι ένας πεπερασμένος δεκαδικός ή ένας δεκαδικός που έχει απείρως επαναλαμβανόμενα ψηφία είναι ρητός. Πρόβλημα για την επομένη φορά: μπορεί να δείξετε το αντίστροφο;

(ιγ) (Δεν συζητήθηκε) Έννοια αριθμήσιμου συνόλου. Οι άρτιοι έχουν το ίδιο (άπειρο) πλήθος με τους περιττούς, οι ακέραιοι με τους φυσικούς κ.λ.π. Η λίστα των ρητών. Η λίστα των πρώτων (βλ. ζ).