Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 8ο Τεστ

20 Δεκεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε η f είναι συνεχής στο (a,b).

(β) Αν $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$ και $f(0)=0$, τότε $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

2. (**2 μον.**) Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

3. **(3 μον.)** Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geqslant 0$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. **(2 μον.)** Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b), με $f(a) = f(b)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in (a, b)$ ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 8ο Τεστ
21 Δεκεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n) = 0$.

(β) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$.

2. (**2 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο: υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 για τον οποίο

$$f(x_0) = x_0.$$

3. (**3 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $f(y) \geqslant f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. (**2 μον.**) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι: $f(x_0) = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 8ο Τεστ
22 Δεκεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.

(β) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, 1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

2. (**2 μον.**) Έστω $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο με την ιδιότητα $a_0 a_m < 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει θετική πραγματική ρίζα.

3. (**3 μον.**) Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - a|}$$

είναι ίση με $\frac{2+a}{1+a}$.

4. (**2 μον.**) Έστω $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $[0, a]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, a)$. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και $f'(x) > 0$ στο $(0, a)$. Αν η f' είναι αύξουσα στο $(0, a)$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$.