

Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 4: Συνέχεια και όρια συναρτήσεων

Α' Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).
- (α) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) = 1$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f(x) > \frac{4}{5}$.
 - (β) Η $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής.
 - (γ) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τις: $f(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{N}$ και $f(x) = 1$ αν $x \notin \mathbb{N}$, είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $x_0 \notin \mathbb{N}$.
 - (δ) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.
 - (ε) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.
 - (στ) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.
 - (ζ) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο x , τότε είναι συνεχής σε κάθε x .
 - (η) Αν η f είναι συνεχής στο (a, b) και $f(q) = 0$ για κάθε ρητό $q \in (a, b)$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.
 - (θ) Αν $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η f είναι ασυνεχής στο σημείο 0.
 - (ι) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(0) = -f(1)$ τότε υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = 0$.
 - (ια) Αν η $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο (a, b) .
 - (ιβ) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.
 - (ιγ) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \sin \frac{1}{x} = 0$.

2. Έστω $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] - [nx]$$

είναι περιοδική με περίοδο $1/n$. Δηλαδή, $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Υπολογίστε την τιμή $f(x)$ όταν $0 \leq x < 1/n$.

(γ) Δείξτε την ταυτότητα

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right]$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M \geq 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$, για κάθε $x \in X$ και $y \in X$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Δώστε παράδειγμα μιας τέτοιας f που να είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $a_1 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $a_{n+1} = f(a_n)$ για $n = 1, 2, \dots$. Αν $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ τότε $f(a) = a$.

6. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι:

(α) Αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) = g(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) \leq g(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

7. Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{\alpha}{x - \lambda} + \frac{\beta}{x - \mu} + \frac{\gamma}{x - \nu} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν) .

8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = \frac{a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

9. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια και, αν ναι, υπολογίστε τα.

$$(α) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, \quad (β) \lim_{x \rightarrow x_0} [x], \quad (γ) \lim_{x \rightarrow x_0} (x - [x]).$$

10. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και ότι αν $x_0 \neq 0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

11. Εξετάστε αν είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις:

$$(α) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

$$(β) f_k : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(γ) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x^2} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

12. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(α) Δείξτε ότι αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(β) Δώστε ένα παράδειγμα όπου $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

13. Έστω $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του X . Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$ και ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

14. Έστω $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x \in [a, b]$ με $f(x) = x$.

15. Έστω $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: $f(x) = x^2$ για κάθε ρητό $x \in (0, 1)$. Να βρεθεί το $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

16. Έστω $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in [0, 1]$ με $f(x+1) = f(x)$.

17. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) = f(1)$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ ώστε $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

18. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2 \in [a, b]$. Δείξτε ότι για κάθε $t \in [0, 1]$ υπάρχει $y_t \in [a, b]$ ώστε

$$f(y_t) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

19. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, και $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε

$$f(y) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Β' Ομάδα

20. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στα σημεία $-1, 0, 1$.

21. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

22. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $g \equiv f$ ή $g \equiv -f$ στο $[a, b]$.

23. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

24. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $f(x) \geq \xi$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Ισχύει το συμπέρασμα αν αντικαταστήσουμε το διάστημα $[a, b]$ με το διάστημα (a, b) ;

25. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $f(x) > g(x) + \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.

26. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

27. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $\max(f) < \max(g)$.

28. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ συνεχείς και επί συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

29. Δείξτε ότι αν $a, b > 0$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x} \right] = \frac{b}{a} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} \left[\frac{x}{a} \right] = 0.$$

Τι γίνεται όταν $x \rightarrow 0^-$;

30. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ και 0 αλλιώς. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

31. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

32. Έστω $P(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο με την ιδιότητα $a_0 a_m < 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει θετική πραγματική ρίζα.

33. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο: υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 για τον οποίο

$$f(x_0) = x_0.$$

34. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $f(y) \geq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

35. (α) Έστω $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq 0$ δείξτε ότι η g διατηρεί πρόσημο: ή $g(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \geq 0$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geq 0$, δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

36. Υποθέτουμε ότι η $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in [a, +\infty)$ με $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

37. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$, τότε η f παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

38. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

39. Έστω $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση γνησίως αύξουσα και συνεχής. Δείξτε ότι

$$f((\alpha, \beta)) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right).$$

40. Έστω $a \in [0, \pi]$. Ορίζουμε ακολουθία με $a_1 = a$ και $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Δείξτε ότι $a_n \rightarrow 0$.

41. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n \in [0, 1]$ ώστε $f(x_n) \rightarrow 0$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

- 42.** Έστω $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι
 (α) η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I .
 (β) η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I , αν όμως οι f, g υποτεθούν και φραγμένες τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I .
- 43.** Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geq M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- 44.** Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- 45.** Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 46.** Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
- 47.** (α) Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.
 (β) Δείξτε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.
- 48.** Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.
- (α) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x + 1$.
 - (β) $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$.
 - (γ) $f : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} \sin^2 x$.
 - (δ) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.
 - (ε) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.
 - (στ) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
 - (ζ) $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x}$.
 - (η) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.
 - (θ) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
 - (ι) $f : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
 - (ια) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin x$.
 - (ιβ) $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$.

Γ' Ομάδα

- 49.** Δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια *συνεχής* συνάρτηση με $f(1) = \alpha$, η οποία ικανοποιεί την $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, τότε:
- (α) $f(n) = n\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
 - (β) $f(\frac{1}{m}) = \frac{\alpha}{m}$ για κάθε $m = 1, 2, \dots$
 - (γ) $f(x) = \alpha x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

50. Μελετήστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{αν } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, \text{ΜΚΔ}(p, q) = 1. \end{cases}$$

51. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι $f(x/2) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

52. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(\frac{m}{2^n}) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

53. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

54. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $A = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$. Αν $A \neq \emptyset$, δείξτε ότι $\sup A \in A$ και $\inf A \in A$.

55. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$: δηλαδή, $f(x + T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = f(x + \sqrt{2})$.

56. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a < b$ και ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ στο $[0, +\infty)$ με $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow +\infty$ και $f(x_n) \rightarrow a, f(y_n) \rightarrow b$. Δείξτε ότι: για κάθε $c \in (a, b)$ υπάρχει ακολουθία (z_n) στο $[0, +\infty)$ με $z_n \rightarrow +\infty$ και $f(z_n) \rightarrow c$.

57. Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) σημείων του (a, b) με $x_n \rightarrow x_0$ ισχύει $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

58. (α) Έστω $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a + t_n) = L$ για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία (t_n) με $t_n \rightarrow 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

(β) Σωστό ή λάθος; Έστω $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a + \frac{1}{n}) = L$ τότε $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

59. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι το $f(x_0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του $f([a, b])$.

60. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι επί.

61. Έστω $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα και $g \circ f = f \circ g$. Δείξτε ότι οι f και g έχουν κοινό σταθερό σημείο: υπάρχει $y \in [0, 1]$ ώστε $f(y) = y$ και $g(y) = y$. [Υπόδειξη: Ξέρουμε ότι υπάρχει $x_1 \in [0, 1]$ με $g(x_1) = x_1$. Αν ισχύει και η $f(x_1) = x_1$, έχουμε τελειώσει. Αν όχι, θεωρήστε την ακολουθία $x_{n+1} = f(x_n)$, δείξτε ότι είναι μονότονη και ότι όλοι οι όροι της είναι σταθερά σημεία της g . Το όριό της θα είναι κοινό σταθερό σημείο των f και g (γιατί:).]

62. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_0 \in [a, b]$ υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Τότε, η f είναι φραγμένη.