Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 2: Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Α΄ Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Κάθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

(β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

(γ) Αν (a_n) είναι μια ακολουθία ακεραίων αριθμών, τότε η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι τελικά σταθερή.

(δ) Υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

(ε) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία άρρητων αριθμών συγκλίνει σε άρρητο αριθμό.

(στ) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο κάποιας ακολουθίας άρρητων αριθμών.

(ζ) Αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τότε $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

(η) Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία. Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

(θ) Αν η $(|a_n|)$ συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.

(ι) Αν $a_n > 0$ και η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

(ια) Αν η (a_n) συγκλίνει και $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η (a_n) είναι σταθερή.

2. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \to a > 0$ αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. Τι μπορείτε να πείτε αν $a_n \to 0$;

3. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 2.001\} \\ A_2 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n > 2.003\} \\ A_3 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 1.98\} \\ A_4 &= \{n \in \mathbb{N} : 1.99997 < a_n < 2.0001\} \\ A_5 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant 2\}. \end{aligned}$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, 5$ εξετάστε αν (α) το A_j είναι πεπερασμένο, (β) το $\mathbb{N} \setminus A_j$ είναι πεπερασμένο.

4. Αποδείξτε με τον ορισμό ότι

$$a_n = \frac{n^2 - n}{n^2 + n} \to 1.$$

5. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, δείξτε ότι $a_n > 0$ τελικά.

6. Για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$;

7. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{3^n}{n!}, \qquad \beta_n = \frac{2n-1}{3n+2}, \qquad \gamma_n = n - \sqrt{n^2-n}, \qquad \delta_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$
$$\varepsilon_n = (\sqrt[n]{10}-1)^n, \qquad \zeta_n = \frac{n^6}{6^n}, \qquad \eta_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right), \qquad \theta_n = \frac{\sin n}{n}$$
$$\kappa_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \qquad \nu_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad \rho_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n, \qquad \sigma_n = \frac{n^2}{3n^2+n+1}$$
$$\tau_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, \qquad \xi_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}.$$

8. (α) Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$. Δείξτε ότι

$$b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \to \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

(β) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας

$$x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}.$$

9. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $x_n = \frac{[n\alpha]}{n}$ και, αν ναι, βρείτε το όριο της.

10. Έστω $\alpha > 0$. Δείξτε ότι η ακολουθία $b_n = \frac{1+n\alpha}{(1+\alpha)^n}$ είναι φθίνουσα και προσδιορίστε το όριο της.

11. Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ και $b_n \to +\infty$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $a_n > \delta$.

(β) Δείξτε ότι $a_n b_n \to +\infty$.

12. Δείξτε ότι η ακολουθία $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. *Υπόδειξη*: Εξετάστε πρώτα αν η (y_n) είναι μονότονη.

13. Θέτουμε $a_1 = \sqrt{6}$ και, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.
Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $(a_n)_n$.

14. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε αν συγκλίνει.

15. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Δείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στο a.

16. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}), (a_{2k-1}) και (a_{3k}) συγκλίνουν. Δείξτε ότι:

(α) $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} a_{3k}$.

(β) Η (a_n) συγκλίνει.

Β΄ Ομάδα

17. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{5^n + n}{6^n - n}, \qquad \beta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}, \qquad \gamma_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$$
$$\delta_n = n^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}\right), \qquad \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(n^2\right)$$
$$\lambda_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}, \qquad \mu_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad \theta_n = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}.$$

18. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ b_n &= \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} \\ \gamma_n &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} \\ \delta_n &= \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{2/3}}. \end{aligned}$$

19. Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $a = \sup A$, δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Αν, επιπλέον, το $\sup A$ δεν είναι στοιχείο του A, δείξτε ότι η παραπάνω ακολουθία μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι *γνησίως αύξουσα*.

20. Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \to a$. Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία (b_n) θέτοντας

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Δείξτε ότι $b_n \to a$.

21. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών όρων με $a_n \to a > 0$. Δείξτε ότι

$$b_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \to a \quad \text{και} \quad \gamma_n := \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \to a.$$

22. Έστω (a_n) ακολουθία με $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$. Δείξτε ότι

$$\frac{a_n}{n} \to a.$$

23. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία με την ιδιότητα

$$b_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to a.$$

Δείξτε ότι $a_n \to a$.

24. Δείξτε ότι: αν $a_n > 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

25. Προσδιορίστε τα όρια των ακολουθιών:

$$\alpha_n = \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^{1/n}$$
$$\beta_n = \frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{1/n}$$
$$\gamma_n = \left[\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n}$$

26. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad b_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n, \quad c_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

και

$$d_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n, \quad e_n = \left(1+\frac{2}{3n}\right)^n.$$

27. Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(α) Αν, επιπλέον, η (b_n) είναι φραγμένη, δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθιών για τις οποίες $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ αλλά δεν ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

28. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι βασική ακολουθία. Συμπεράνατε ότι $a_n \to +\infty$.

29. Έστω $0 < \mu < 1$ και ακολουθία (a_n) για την οποία ισχύει

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \mu |a_n - a_{n-1}|, \quad n \geq 2.$$

Δείξτε ότι η (a_n) είναι βασική ακολουθία.

30. Ορίζουμε $a_1 = a$, $a_2 = b$ και $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$. Εξετάστε αν η (a_n) είναι βασική ακολουθία.

Γ΄ Ομάδα

31. Δείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών αριθμών, καθώς επίσης και όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας άρρητων αριθμών.

32. Δείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to a > 0$, τότε

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0.$$

33. Δείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$, τότε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

34. Ορίζουμε μια ακολουθία (α_n) με $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2+1}{2\alpha_n+2}$, $\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$. Δείξτε ότι:

(α) Η (α_n) είναι αύξουσα.

(β) $\alpha_n \to 1$.

35. Θεωρούμε την ακολουθία (α_n) που ορίζεται από τις $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n+3}{5}$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.

36. Έστω $a > 0$. Θεωρούμε τυχόν $x_1 > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Δείξτε ότι η (x_n), τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον $\sqrt{a}$. Βρείτε το $\lim_{n\to\infty} x_n$.

37. Έστω $0 < a_1 < b_1$. Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) Δείξτε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) φθίνουσα.

(β) Δείξτε ότι οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

38. Επιλέγουμε $x_1 = a$, $x_2 = b$ και θέτουμε

$$x_{n+2} = \frac{x_n}{3} + \frac{2x_{n+1}}{3}.$$

Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $y_n = x_{n+1} - x_n$ και βρείτε αναδρομικό τύπο για την (y_n).]

39. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \leqslant k\}$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

40. Θεωρούμε γνωστό ότι $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Δείξτε ότι, για κάθε ρητό αριθμό q, ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n = e^q \ .$$

41. (Λήμμα του Stoltz) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω (b_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Δείξτε ότι αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda,$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda = +\infty$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

42. Ορίζουμε ακολουθία (a_n) με $0 < a_1 < 1$ και $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} n a_n = 1$.