Συνοπτικές απαντήσεις ασκήσεων 1ου φυλλαδίου

Σημαντική σημείωση!

Το παρόν αρχείο είναι υποδείξεις, θα πρέπει κάθε απάντηση να είναι σαφώς τεκμηριωμένη και με την απαραίτητη επεξήγηση.

1) Η ροή:

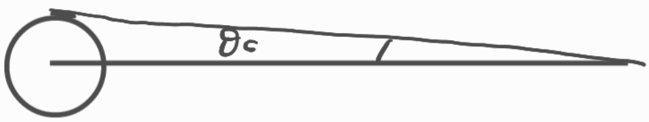
$$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta \, d\underline{\Omega} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_\nu \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \pi I_\nu$$

(στην επιφάνεια της σφαίρας)

Σε απόσταση D:

$$F_\nu R^2 = F_\nu(D) D^2 \Rightarrow F_\nu(D) = \pi I_\nu \frac{R^2}{D^2}$$

Διαφορετικά



$$\sin\theta_c = \frac{R}{D}$$

$$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta \, d\underline{\Omega} = \dots = \pi I_\nu \sin^2\theta_c = \pi I_\nu \frac{R^2}{D^2}$$

Σχόλιο: Αν και αυτή η απάντηση είναι σωστή είναι ελλιπής καθώς δεν επεξηγεί τίποτα, δε δηλώνει τι σημαίνει το κάθε μέγεθος, ούτε σχολιάζει το αποτέλεσμα.

2) Σφαίρα ακτίνας R, $\tau_\nu \gg 1$ και συντελεστή σκέδασης σ_ν, ισοτροπικές, ελαστικές σκεδάσεις. Μέσω των τυχαίων βημάτων:

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \dots + \vec{r}_N \Rightarrow \langle \vec{R}^2 \rangle = \langle \vec{r}_1^{\,2} \rangle + \dots \langle \vec{r}_N^{\,2} \rangle + 2\underbrace{\cancel{\langle \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \rangle}}_{0} + \dots + 2\underbrace{\cancel{\langle \vec{r}_{N-1} \vec{r}_N \rangle}}_{0}$$

$(\langle \cos\theta \rangle = 0)$

$$\langle \vec{R}^2 \rangle = \underbrace{N}_{\#\text{σκεδάσεων}} \bar{\ell}^2 \rightarrow \text{μέση ελεύθερη διαδρομή}$$

$\langle R^2 \rangle = N \bar{\ell}^2 = \ell_*^2$ (μέση απομάκρυνση) και αν θέλω τη διαφυγή από άστρο ακτίνας R, τότε:

$$l_* = R = \sqrt{N}\,\bar{l} \quad , \quad N_{sc} = \frac{R^2}{\bar{l}^2} \quad (1) \quad \text{όμως} \quad \bar{l} = \frac{1}{\sigma_\nu} \Rightarrow$$

$$\bar{l}^2 = \frac{1}{\sigma_\nu^2} \quad , \quad \tau_\nu = \int \sigma_\nu \, ds \Rightarrow \sigma_\nu R = \tau_\nu$$

$$R = \frac{\tau_\nu^2}{\sigma_\nu^2} \quad (2) \quad \text{από τις (1) και (2)}$$

$N_{sc} = \tau_\nu^2$ πλήθος σκεδάσεων μέχρι τη διαφυγή.

Ερώτηση: Τι μονάδες έχει ο συντελεστής σκέδασης σ' αυτήν την άσκηση;

3) Ε.Δ.Α.

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -a_\nu I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{I_\nu} = -d\tau_\nu$$

$$I_\nu = I_{\nu,0}\, e^{-\tau_\nu} \qquad \tau_\nu = \int_0^R a_\nu ds = a_\nu R \quad \text{άρα}$$

$I_\nu = I_{\nu,0}\, e^{-a_\nu R}$, η ειδική ενεργειακή πυκνότητα: $u_\nu = \frac{1}{c}\int I_\nu d\Omega =$

$$u_\nu = \frac{4\pi I_\nu}{c}$$

$$u_\nu = \frac{N\varepsilon}{V}$$

$I_\nu \propto N$, ισοτροπικό πεδίο φωτονίων ίδιας ενέργειας

$$N = N_0\, e^{-a_\nu R}$$

οπότε τα φωτόνια που απορροφούνται $N' = N_0 - N_0 e^{-a_\nu R}$

$$= N_0 (1 - e^{-\tau_\nu})$$

4) Ε.Δ.Α. (χωρίς απορρόφηση)

(a) Στερεά γωνία ανιχνευτή: $\Delta\Omega_{det} = \pi\,(\Delta\theta_{det})^2$

Η συνολική φωτεινότητα: $L = \frac{4\pi R^3}{r_c}$ και η ροή $F = \frac{L}{4\pi D^2} = \frac{R^3 r_c}{3 D^2}$

οπότε για την ένταση της αυτινοβολίας: $\bar{I} = \frac{R^3 r_c}{3\pi D^2 (\Delta\theta_{det})^2}$ (1)

Η γωνία με την οποία βλέπουμε την πηγή $\Delta\theta_s = \frac{R}{D}$

(β) $\frac{dI}{ds} = j = \frac{r_c}{4\pi}$, ολοκληρώνουμε κατά μήκος της γραμμής παρατήρησης.

$$I_o = 2jR = \frac{R r_c}{2\pi}$$

Συνέχεια ερωτήματος (α) $\frac{\bar{I}}{I_o} = \frac{2}{3}\left(\frac{\Delta\theta_s}{\Delta\theta_{det}}\right)^2$

αν $\Delta\theta_s \ll \Delta\theta_{det}$ $\quad \bar{I} \ll I_o$ ερώτηση: τι σημαίνει αυτό; Αν και η απάντηση είναι σωστή, όπως και στις παραπάνω απαντήσεις, δεν είναι πλήρης καθώς χρειάζονται οι απαραίτητες επεξηγήσεις.

5) (α) $I_\nu = F_\nu / \Delta\Omega$, $\Delta\Omega = \pi(\Delta\theta)^2$, $\Delta\theta = \theta/2$

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$ αντικαθιστούμε $T = \ldots$

Συγκρίνουμε τη συχνότητα με την αντίστοιχη της θερμοκρασίας λαμπρότητας. Θα προκύψει ότι είμαστε στο όριο Rayleigh-Jeans.

(β) πιο συμπαγής, με ίδια ροή $\theta_{c2} < \theta_{c1}$

$$\frac{I_{\nu 2}}{I_{\nu 1}} = \frac{F_\nu / \Delta\Omega_2}{F_\nu / \Delta\Omega_1} = \frac{\theta_{c1}}{\theta_{c2}}$$ άρα $I_{\nu 2} > I_{\nu 1}$

(γ) $h\nu_{max} \simeq 2{,}3 k_B T \Rightarrow \ldots$

6) Για τη ροή έχουμε: $F_\nu = \int I_\nu \cos\theta \, d\underline{\Omega} = I_\nu \cos\theta \, d\underline{\Omega}$

$\Delta\underline{\Omega} \ll 1$. $\Delta\underline{\Omega} = \dfrac{\Delta A \cos\theta}{r^2}$, $\Delta A = \pi\left(\dfrac{s}{2}\right)^2$, $r = \dfrac{D}{\cos\theta}$

οπότε $F_\nu = \dfrac{\pi \cos^2\theta}{4 f^2} I_\nu(\theta, \varphi)$ με $f = D/s$

7) Εξίσωση Boltzmann
$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} e^{-\Delta E/kT} \quad , \; g_n = 2n^2 \; , \; E_n = \frac{E_1}{n^2}$$
$$\Delta E = E_n - E_1$$
και με αντικατάσταση κάνουμε τις πράξεις.

8) $\ell = \dfrac{1}{k\rho} \sim 3 \cdot 10^{-5} m$, $N = \left(\dfrac{R_\odot}{\ell}\right)^2$, $t = \dfrac{N\ell}{c} \sim 5 \cdot 10^{13} s$
$\downarrow$
$\sim 10^6 yr$

Ερώτηση Πόσο κάνει ένα φωτόνιο να φτάσει από το εσωτερικό του Ήλιου σε εμάς?

9) Σταθερό όριο στο οπτικό βάθος που βλέπουμε μέσα στο άστρο: $|\tau_\nu| = 2/3$, $\int_0^s k_\lambda \rho \, ds = \dfrac{2}{3}$

οπότε η αδιαφάνεια K_λ γίνεται μέγιστη εκεί που η τιμή του βάθους s γίνεται ελάχιστη, εφόσον το 2/3 είναι σταθερή τιμή.
Επομένως, παρατηρούμε τα εξωτερικά στρώματα του άστρου, όπου η θερμοκρασία είναι μέγιστη. Λόγω του θερμού αερίου αναμένουμε γραμμές εκπομπής.

10) Η συμπεριλαμβανόμενη (?) εκφώνηση είναι κάπως ασαφής και επιτρέπει

αρκετή αυξήτηση. Ο δακτύλιος είναι οπτικά διαφανής ώστε να τον παρατηρούμε. Λόγω του θερμού αερίου γύρω από το άστρο θα μπορούσαμε να δούμε και γραμμές εκπομπής.

11) Σταθερή ροή $\frac{dF_{rad}}{d\tau_\nu} = 0$, οπότε για τη συνάρτηση πηγής: $S = J = \bar{I}$. Γκρίζα ατμόσφαιρα σε τοπική θερμοδυναμική ισορροπία:

$$J = \bar{I} = \frac{3F_{rad}}{4\pi}\left(\tau_\nu + \frac{2}{3}\right) \text{ άρα}$$

$$S = \frac{3F_{rad}}{4\pi}\left(\tau_\nu + \frac{2}{3}\right) \text{ για } \tau_\nu = \frac{2}{3} \quad \boxed{F_{rad} = \pi S}$$

12)

	λ (nm)	w (nm)	f
(1)	330.298	0.0067	0.0049
(2)	589.594	0.0560	0.325

$$\log\left(\frac{w}{\lambda}\right)_{(1)} = -4.69$$

$$\log\left(\frac{w}{\lambda}\right)_{(2)} = -3.71$$

από την καμπύλη αναπτύξης $\Rightarrow$ ~ 16.65, ~ 19.10

$$\log\left(\frac{f\lambda}{500nm}\right)_{(1)} \sim -2.5$$

$$\log\left(\frac{f\lambda}{500nm}\right)_{(2)} \sim -0.4$$

και αντικαθιστούμε στη βασική σχέση:

$$\boxed{\log N_a = \log\left(\frac{f N_a \lambda}{500nm}\right) - \log\left(\frac{f\lambda}{500nm}\right)}$$

και προκύπτει για την (1) ~19.1 , για τη (2) ~ 19.5

Παίρνουμε τον μέσο όρο $\log \langle N_a \rangle \sim 19.3$

οπότε $10^{19.3}$ #Na /μονάδα επιφανείας.