Φυσική των αστέρων
Μάθημα 15
(εσωτερικό των αστέρων-πολυτροπικά μοντέλα)
Carroll & Ostlie Κεφ. 7

α.ε. 2022-23

Πολυτροπικά μοντέλα (polytropes)

Οι διαφορικές εξισώσεις της αστρικής δομής επιλύονται αριθμητικά. Σε ειδικές περιπτώσεις υπάρχουν αναλυτικές λύσεις.

Οι δύο πρώτες εξισώσεις αστρικής δομής:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \qquad (1)$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \qquad (2)$$

μπορούν να λυθούν ταυτόχρονα, χωρίς αναφορά στις εξισώσεις για τη βαθμίδα φωτεινότητας και τη βαθμίδα θερμοκρασίας.

Υπό ορισμένες συνθήκες, όπως για αδιαβατικό αέριο, η πίεση μπορεί να εξαρτάται ρητά μόνο από τη πυκνότητα ρ.

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι

$$\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr} = -GM_r \Rightarrow \frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right] = -G\frac{dM_r}{dr} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας το $\frac{dM_r}{dr}$ από την (2) στη (3), παίρνουμε:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{d\rho}\right) = -G4\pi r^2 p \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{d\rho}\right] = -4\pi G\rho \qquad (4)$$

Για να λύσουμε την (4) θα υποθέσουμε ότι η πίεση και η πυκνότητα συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης $P = K\rho^{\gamma}$ (5), όπου Κ και γ θετικές σταθερές.

Αντί του γ, χρησιμοποιείται ο λεγόμενος **πολυτροπικός δείκτης n**, όπου $\gamma \equiv \frac{n+1}{n}$ (6)

Υπάρχουν ενδιαφέρουσες περιπτώσεις για τις οποίες ισχύει η (5):

i. Άστρα των οποίων το εσωτερικό είναι εντελώς “convective” δηλ. η ενέργεια διαδίδεται μόνο με μεταφορά. Σε αυτή τη περίπτωση η πίεση ακτινοβολίας είναι αμελητέα, οπότε

$P = P_{\text{gas}} = P_{\text{adiabatic}} = k\rho^{\gamma},\ \gamma = \frac{5}{3}$ (για ιδανικό αέριο), και από τη καταστατική εξίσωση, έχουμε

$P_{\text{gas}} = \frac{\rho kT}{\mu m_H} \Rightarrow \mathrm{T} \propto \rho^{\frac{5}{3}-1} \Rightarrow \rho \propto \mathrm{T}^{\frac{3}{2}}$ πολυτροπικός δείκτης $n = 1.5$

ii. Άστρα στα οποία έχουμε και πίεση ιδανικού αερίου και πίεση ακτινοβολίας → “καθιερωμένο αστρικό μοντέλο” του Eddington

Έστω άστρο με πίεση $P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}}$

Γράφουμε $P_{\text{gas}} = \beta P$ $\quad$ *και* $\quad$ $P_{\text{rad}} = (1-\beta)P$ $\quad$ *όπου* $\quad 0 \leq \beta \leq 1$

Υποθέτοντας ιδανικό αέριο, $P_{\text{gas}} = \frac{\rho kT}{\mu m_H} \Rightarrow T = \frac{\beta P \mu m_H}{\rho k}$

Για την πίεση ακτινοβολίας, έχουμε $P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3}aT^4 \Rightarrow P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{3}a\left(\frac{\beta P\mu m_H}{\rho k}\right)^4 = (1-\beta)P \Rightarrow$

$P = K\rho^{4/3}$ με $K = \left[\left[\frac{3(1-\beta)}{a}\right]^{1/3}\left(\frac{k}{\beta\mu m_H}\right)^{4/3}\right]$ $\quad (\gamma = \frac{4}{3} \rightarrow$ πολυτροπικός δεικτης $n = 3)$

iii. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των λευκών νάνων, η πίεση για αέριο πλήρως εκφυλισμένων ηλεκτρονίων ακολουθεί τη σχέση $P = K\rho^{5/3}$, για μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια, και τη $P = K\rho^{4/3}$, για σχετικιστικά ηλεκτρόνια

Από την (5) προκύπτει ότι

$\frac{dP}{dr} = \frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr}$ (7), οπότε αντικαθιστώντας στην (4) βρίσκουμε:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho}K\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr}\right] = -4\pi G\rho$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma K}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dr}\right] = -4\pi G\rho \quad (8)$$

Από (7) και (8) προκύπτει: $\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{K}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\rho^{(1-n)/n}\frac{d\rho}{dr}\right] = -4\pi G\rho$ (9)

Έχουμε δει στα παραδείγματα πολυτρόπων που συζητήσαμε, ότι $\rho \propto T^n$, οπότε δοκιμάζουμε για την (9) λύσεις της μορφής $\rho = \lambda\varphi^n$ (10)

όπου φ είναι αδιάστατη ποσότητα με $0 \le \varphi \le 1$ και λ σταθερά με μονάδες πυκνότητας .

Προφανώς, από την (10) προκύπτει $\frac{d\rho}{dr} = \lambda n \varphi^{n-1} \frac{d\varphi}{dr}$ (11)

Αντικαθιστώντας τις (10) και (11) στην (9) παίρνουμε:

$(n+1)K\lambda^{1/n} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = -4\pi G \lambda \varphi^n$ (12)

Ορίζοντας ως μονάδα μήκους το α $\equiv \left[\frac{(n+1)k\lambda^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}\right]^{\frac{1}{2}}$ (13)

αλλάζουμε μεταβλητή από το r στην αδιάστατη μεταβλητή $\xi = \frac{r}{\alpha}$ (14).

Έτσι η (12) γράφεται:

$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi}\right) = -\varphi^n$ (15) → **εξίσωση Lane-Emden**

Η λύση $\varphi(\xi)$ καθορίζει πλήρως τη δομή του πολυτρόπου, εκτός από την κεντρική πυκνότητα.

Αν θέσουμε $\lambda = \rho_c$, τότε $\rho = \rho_c$ για $\varphi = 1$ (δηλ. ξ=0).

Λύνοντας την Εξ. (15) για την αδιάστατη συνάρτηση φ συναρτήσει του ξ για έναν συγκεκριμένο πολυτροπικό δείκτη n, οδηγούμαστε απευθείας στο προφίλ της πυκνότητας ως συνάρτηση της ακτίνας. Από τη σχέση (5) προκύπτει το προφίλ της πίεσης, και από τη καταστατική εξίσωση (ιδανικό αέριο + πίεση ακτινοβολίας) προκύπτει το προφίλ της θερμοκρασίας.

Για τη λύση της (15) χρειαζόμαστε δύο συνοριακές συνθήκες:

(i) $\varphi = 0$ για $\xi = 1$ (θα το συμβολιζουμε με ξ_1), δηλ. στην «επιφάνεια» του άστρου η πυκνότητα (και άρα και η πίεση) τείνει στο 0.

(ii) Στο κέντρο, $\xi = 0$, $d\varphi/d\xi = 0$

Αυτό προκύπτει ως εξής: έστω μία πολύ μικρή ακτίνα δ γύρω από τον κέντρο του άστρου. Η μάζα που περιέχεται μέσα στην ακτίνα αυτή είναι $M_r = \frac{4\pi}{3}\delta^3\bar{\rho}$, οπότε $\frac{dP}{dr} = -G\,\frac{4\pi}{3}\frac{\delta^3\bar{\rho}^2}{\delta^2} = -G\,\frac{4\pi}{3}\delta\bar{\rho}^2 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.

Επιπλέον, $P = K\rho^{(n+1)/n}$, άρα $d\rho/dr \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$, οπότε από την (11) $d\varphi/d\xi = 0$.

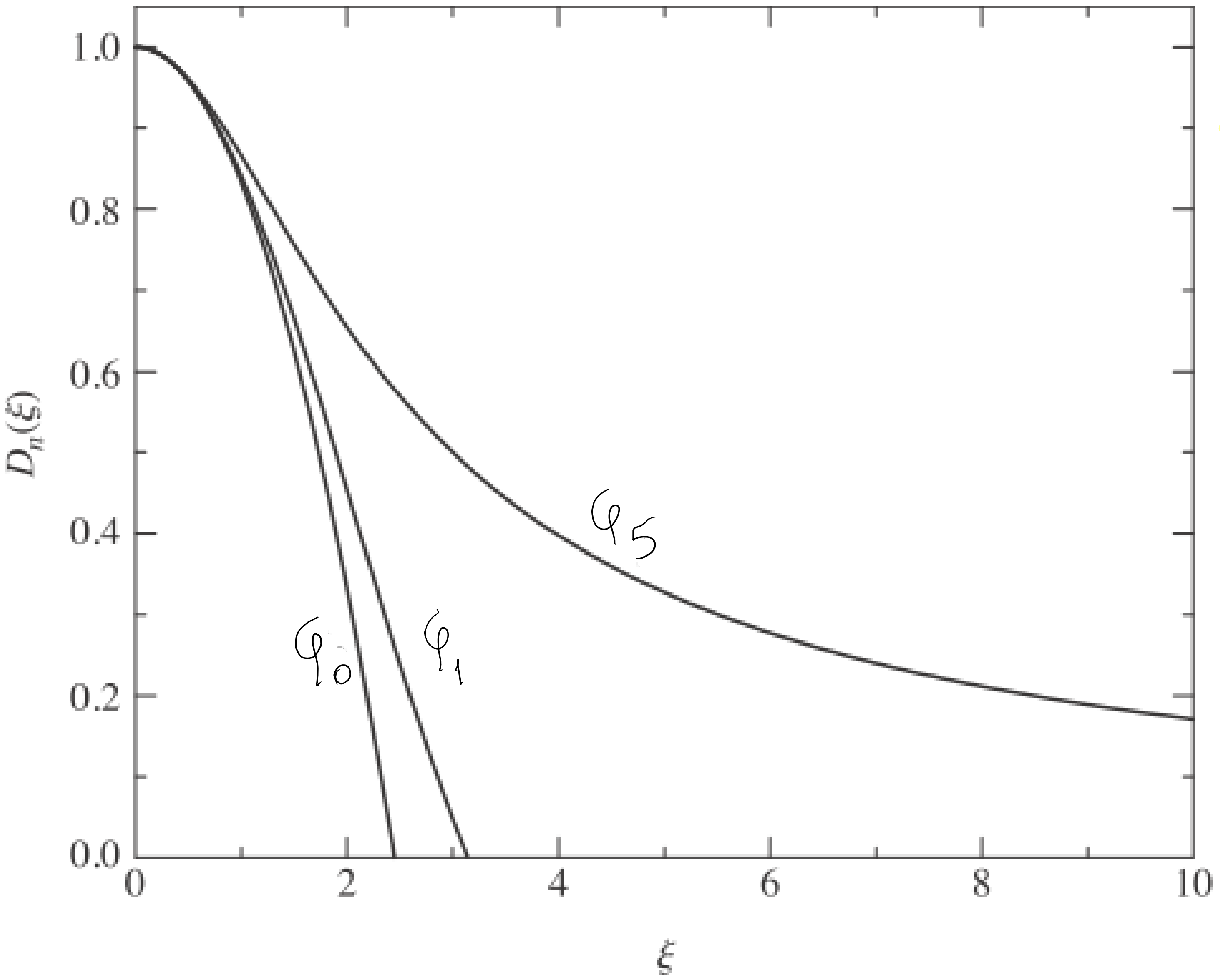
Αναλυτικές λύσεις υπάρχουν για $n = 0, 1$ και 5. Για άλλα n χρειάζονται αριθμητικές λύσεις.

$$\varphi_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} \;\; \mu\varepsilon \;\; \xi_1 = \sqrt{6}$$

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi} \;\; \mu\varepsilon \;\; \xi_1 = \pi$$

$$\varphi_5(\xi) = \left[1 + \frac{\xi^2}{3}\right]^{-\frac{1}{2}} \;\; \mu\varepsilon \;\; \xi_1 \to \infty$$

(βλ. Αστροφυσικά ρευστά)



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
2
4
6
8
10
$D_n(\xi)$
ξ
φ_0
φ_1
φ_5

Μακροσκοπικές ιδιότητες του άστρου με βάση τις λύσεις της εξ. Lane-Emden

1. Ακτίνα

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{1/2} \lambda^{(1-n)/2n} \xi_1 \quad (16)$$

2. Μάζα

Η μάζα εντός της κανονικοποιημένης ακτίνας ξ:

$$M(\xi) = \int_0^{a\xi} 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi a^3 \int_0^{\xi} \lambda \varphi^n \xi^2 d\xi \quad (17)$$

Από εξ. (15) (Lane-Emden) $\varphi^n = -\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi}\right)$, οπότε

$M(\xi) = -4\pi a^3 \int_0^{\xi} \lambda d\left(\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi}\right) = -4\pi a^3 \lambda^2 \frac{d\varphi}{d\xi}$ (18) και η συνολική μάζα του άστρου είναι:

$$M_* = -4\pi \left[\frac{(n+1)k}{4\pi G}\right]^{3/2} \lambda^{(3-n)/2n} \left(\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi}\right)_{\xi_1} \quad (19)$$

Παρατηρούμε ότι για πολυτροπικό δείκτη n=3, η μάζα δεν εξαρτάται από το λ (δηλ. τη κεντρική πυκνότητα).

3. Λόγος της μέσης προς τη κεντρική πυκνότητα

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = \frac{M_*/\frac{4\pi}{3}R_*^3}{\lambda} = -3\frac{1}{\xi_1}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)_{\xi_1} \quad (20) \quad (\rho_c = \lambda)$$

που εξαρτάται μόνο από τον πολυτροπικό δείκτη.

Για $n = 0$, το άστρο έχει σταθερή πυκνότητα: $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = 1$

Για $n = 5$, $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \to \infty$, δηλ. το άστρο είναι άπειρα συγκεντρωμένο στο κέντρο.

4. Κεντρική πίεση

Στο κέντρο $\xi = 0, \varphi = 1 \rightarrow \rho = \lambda\varphi^n = \lambda$, οπότε η κεντρική πίεση γίνεται

$$P_c = K\lambda^{(n+1)/n} = K\,\lambda^{(1-n)/n}\,\lambda^2 \quad (21)$$

Από τη σχέση (16) λύνουμε ως προς $K\,\lambda^{(1-n)/n}$ οπότε προκύπτει $K\,\lambda^{(1-n)/n} = \frac{4\pi G R^2}{(n+1)\xi_1^2}$ (22)

Αντικαθιστούμε στην (21) και χρησιμοποιούμε ότι $\rho_c = \lambda \underset{(20)}{\Longrightarrow} \rho_c = -\bar{\rho}\xi_1 / \left[3\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)_{\xi_1}\right]$ οπότε:

$$P_c = \frac{4\pi R^2 G}{(n+1)\xi_1^2}\left[\frac{\xi_1}{3}\frac{1}{(d\varphi/d\xi)_{\xi_1}}\right]^2 \bar{\rho}^2 \underset{(19)}{\Longrightarrow} P_c = \frac{1}{4\pi(n+1)(d\varphi/d\xi)_{\xi_1}^2}\frac{GM_*^2}{R^4} \quad (23)$$

Π.χ. για n=3, βρίσκουμε $P_c = 1.24 \times 10^{17}\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^2\left(\frac{R_\odot}{R_*}\right)^4 \mathrm{dyn/cm^2}$

5. Κεντρική θερμοκρασία

$T_c = \frac{\beta P_c \mu m_H}{\rho k}$. Για n=3, βρίσκουμε ότι $T_c = 4.6 \times 10^6 \mu\beta\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{2/3}\rho_c^{1/3}$

Constants of the Lane-Emden functions†

n	ξ_1	$-\xi_1^2\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$	$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}$
0	2.4494	4.8988	1.0000
0.5	2.7528	3.7871	1.8361
1.0	3.14159	3.14159	3.28987
1.5	3.65375	2.71406	5.99071
2.0	4.35287	2.41105	11.40254
2.5	5.35528	2.18720	23.40646
3.0	6.89685	2.01824	54.1825
3.25	8.01894	1.94980	88.153
3.5	9.53581	1.89056	152.884
4.0	14.97155	1.79723	622.408
4.5	31.83646	1.73780	6,189.47
4.9	169.47	1.7355	934,800
5.0	∞	1.73205	∞

† S. Chandrasekhar, "An Introduction to the Study of Stellar Structure," p. 96; reprinted from the Dover Publications edition,