



# Φυσική των αστέρων

## Μάθημα 7

α.ε. 2022-23

## Νόμος Boltzmann

- Τα άτομα ενός αερίου κερδίζουν ή χάνουν ενέργεια καθώς συγκρούονται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η κατανομή στις ταχύτητες των επηρεαζόμενων σωματιδίων, που δίνεται από την **κατανομή Maxwell-Boltzmann** να παράγει μία καθορισμένη κατανομή για τα ηλεκτρόνια μέσα στα ατομικά τροχιακά.
- Η κατανομή των ηλεκτρονίων διέπεται από ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα της στατιστικής μηχανικής:  
Τροχιακά μεγαλύτερης ενέργειας είναι λιγότερο πιθανό να καταλαμβάνονται από ηλεκτρόνια.
- Ο λόγος του αριθμού των ατόμων που είναι σε οποιαδήποτε από τις  $g_1$  εκφυλισμένες καταστάσεις με ενέργεια  $E_1 = h\nu$  προς τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται σε οποιαδήποτε από τις  $g_2$  εκφυλισμένες καταστάσεις με ενέργεια  $E_2 = E + h\nu$  δίνεται από την σχέση

$$\frac{P(E_1)}{P(E_2)} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp(-E/kT)}{g_2 \exp[-(E+h\nu)/kT]} = \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu/kT) \rightarrow \text{Νόμος Boltzmann}$$



# Εξίσωση Saha

- Μέχρι τώρα εξετάσαμε την κατανομή σε διαφορετικά ενεργειακά επίπεδα για όμοια ουδέτερα άτομα σε Θ.Ι. Καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία, κάποια άτομα μπορεί να ιονιστούν (και πιθανά σε διαφορετικό στάδιο ιονισμού)
- Η εξίσωση Saha μας δίνει τον σχετικό αριθμό των ατόμων (που βρίσκονται σε ΘΙ) σε διαφορετικά στάδια ιονισμού.
- Έστω  $\chi_i$  η ενέργεια που χρειάζεται για να απομακρυνθεί ένα ηλεκτρόνιο από ένα άτομο (ή ιόν) στη βασική στάθμη, στέλνοντάς το από το στάδιο ιονισμού  $i$  στο στάδιο  $(i + 1)$ .
- Αλλά το αρχικό ή/και το τελικό ιόν μπορεί να μην είναι στη βασική στάθμη.
- Πρέπει να πάρουμε μια μέση τιμή πάνω σε όλες τις τροχιακές ενέργειες, ώστε να συνυπολογίσουμε τον πιθανό καταμερισμό των ηλεκτρονίων του ατόμου στα διάφορα τροχιακά → συναρτήσεις επιμερισμού  $Z$
- Η συνάρτηση επιμερισμού ενός ατόμου είναι παρόμοια αλλά λίγο πιο περίπλοκη από το στατιστικό βάρος μιας κβαντομηχανικής κατάστασης.

Στη πραγματικότητα είναι το άθροισμα των στατιστικών βαρών (δηλ. βαθμών εκφυλισμού) όλων των δέσμιων καταστάσεων του ατόμου, με το καθένα από αυτά να σταθμίζεται με τον παράγοντα Boltzmann, που δείχνει τον σχετικό πληθυσμό σε εκείνο το ενεργειακό επίπεδο της δομής του ατόμου. Δηλαδή

$$Z_i(T) = g_{i,0} + g_{i,1}e^{-\epsilon_{i,1}/kT} + g_{i,2}e^{-\epsilon_{i,2}/kT} + \dots$$

όπου  $g_{i,j}$  είναι το στατιστικό βάρος του επιπέδου  $j$  του  $i$ -ιονισμένου ατόμου. Οι ενέργειες που εμφανίζονται στα εκθετικά είναι οι ενέργειες των διεγερμένων σταθμών του ιόντος  $i$  σε σχέση με την ενέργεια της βασικής (θεμελιώδους) στάθμης του.

- Θυμηθείτε ότι η ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου (π.χ. του ατόμου του H) είναι ανάλογη του κβαντικού αριθμού της αντίστοιχης στάθμης. Άρα σε ένα πραγματικό αέριο θα φτάσει η ακτίνα αυτή να ταυτίζεται με τη μέση απόσταση μεταξύ των ατόμων. Αυτός ο περιορισμός θέτει ένα φυσικό όριο στον αριθμό των bound states κι έτσι το παραπάνω άθροισμα γίνεται πεπερασμένο (συνήθως κρατάμε τους πρώτους λίγους όρους)
- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο καταστάσεις ιονισμού  $i$  και  $i + 1$ . Έστω  $N_i$  και  $N_{i+1}$  οι αριθμητικές πυκνότητες των ατόμων στα αντίστοιχα στάδια ιονισμού, και  $n_e$  η αριθμητική πυκνότητα των ελεύθερων ηλεκτρονίων. **Η εξίσωση Saha λέει ότι:**

$$\frac{N_{i+1}n_e}{N_i} = \frac{Z_e Z_{i+1}}{Z_i} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

( $Z_e = 2$ )

Η πλήρης απόδειξη προκύπτει από τη στατιστική αερίων φωτονίων και ηλεκτρονίων με τη βοήθεια των συντελεστών Einstein (σε ΜΠΤ μάθημα)

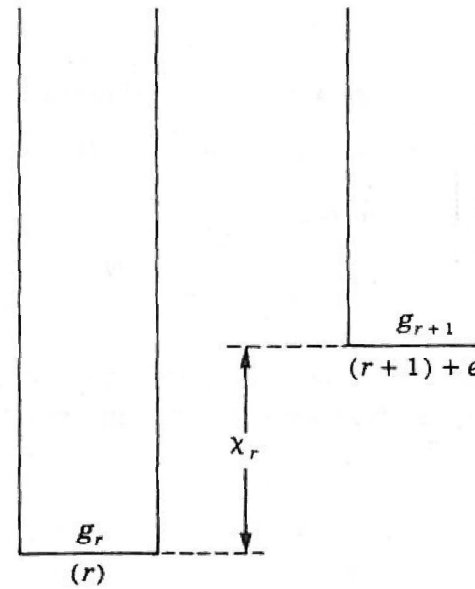
## Σχόλιο από βιβλίο Clayton, Principles of stellar evolution and nucleosynthesis, 1983

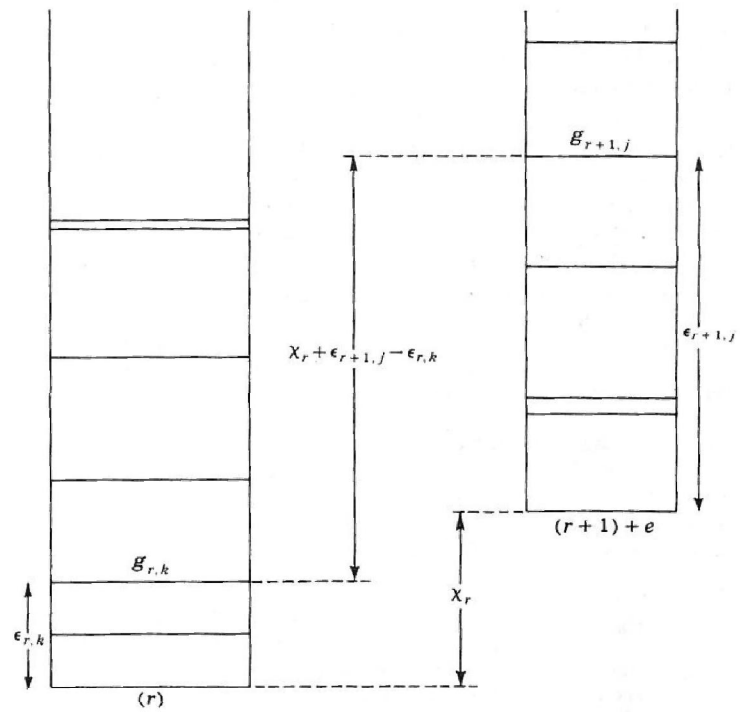
This physical limit to the number of bound states makes the partition function finite. In most applications, in fact, the numerical value of the partition function can be estimated by taking only a few terms (in many cases only one term) of the sum. In the stellar interior this phenomenon becomes quite important. Bound electrons greatly increase the opacity of matter to the thermal radiation, and it becomes necessary to consider the interactions in the gas in order to realistically calculate the number of bound electrons. This problem will be discussed further in Sec. 2-3.

It is therefore common to estimate partition functions by first estimating the temperature and the number of terms of the series that need to be kept to have a good approximation to the answer. It is also fortunate that the number ratios are, in general, considerably more sensitive to the temperature than to the ratio of the partition functions. For this reason, great accuracy in evaluation of the partition functions is often not necessary for astrophysical application. In the Saha equation one of the partition functions, viz., that of the electron, is particularly simple. Since the electron has no excited states, its partition function is just the statistical weight of the electron. Since the electron has a spin equal to  $\frac{1}{2}$ , its statistical weight is  $g_e = 2$ .

The other quantities appearing in the Saha equation have obvious meanings. They are the mass of the electron, the Boltzmann constant, the Planck constant, the temperature, and  $\chi_r$ , which is the ionization energy of species  $r$ .

**Fig. 1-9** An energy-level diagram for the ionization of idealized ions possessing only a single bound state. The  $r$ -times-ionized species must absorb energy greater than or equal to  $x_r$  to make a transition to the  $(r + 1)$ -times-ionized species plus a free electron.





**Fig. 1-10** An energy-level diagram for the ionization of ions possessing their full coterie of bound levels.

Clayton, Principles of Stellar Interiors and nucleosynthesis

➤ Συχνά αντί για την αριθμητική πυκνότητα  $e$ ,  $n_e$ , χρησιμοποιούμε την πίεση των (ελεύθερων) ηλεκτρονίων  $P_e$ , υποθέτοντας ότι το αέριο είναι ιδανικό οπότε

$P_e = n_e kT$  και η εξ. Saha γίνεται

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kTZ_{i+1}}{P_e Z_i} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$$

*Η εξ. Saha σε αυτή τη μορφή είναι σωστή μόνο για μη εκφυλισμένο αέριο*

Θα επανέλθουμε στη χρήση των εξισώσεων αυτών όταν μιλήσουμε για αστρικές ατμόσφαιρες.



## Σχόλια

- Ο Νόμος του Boltzmann και ο νόμος του Saha ισχύουν για Θ.Ι.
- Όταν έχουμε πράγματι Θ.Ι, οι θερμοκρασίες που βρίσκουμε εφαρμόζοντας τον νόμο του Boltzmann σε κατάλληλες γραμμές (μεταβάσεις από διαφορετική αρχική στάθμη σε μία συγκεκριμένη τελική) → θερμοκρασία διέγερσης - excitation temperature ή από τον νόμο του Saha σε γραμμές που προκύπτουν από διαφορετικά ιόντα του ίδιου ατόμου (θερμοκρασία ιονισμού - ionization temperature) **ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ.**

# Αστρικά φάσματα

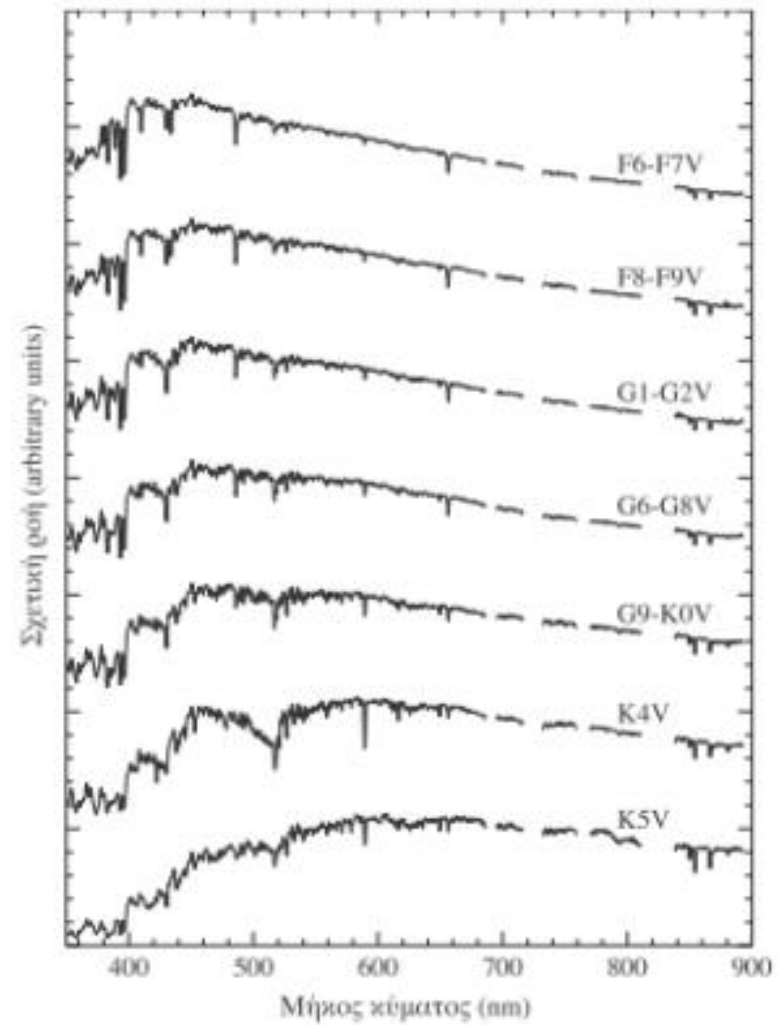
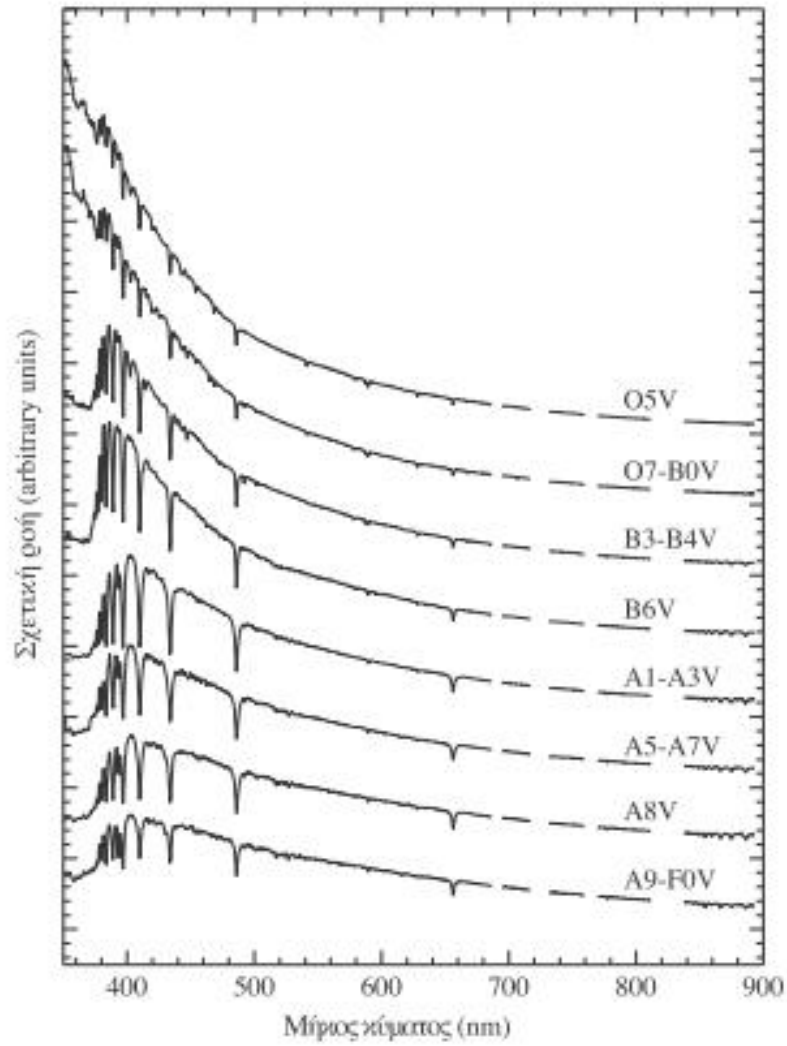
- Ένα από τα πρώιμα αποτελέσματα της παρατηρησιακής αστροφυσικής/αστρονομίας, ήταν το ότι υπάρχει σχέση μεταξύ των ιδιοτήτων της αστρικής επιφάνειας (π.χ. επιφανειακή θερμοκρασία) και της έντασης συγκεκριμένων γραμμών απορρόφησης στα αστρικά φάσματα.
- Ήδη από το 1863 ο Ιησουίτης αστρονόμος Angelo Secchi ταξινόμησε τα άστρα σε 4 κατηγορίες ανάλογα με κάποιες έντονες γραμμές απορρόφησης στα φάσματά τους.
- 2-3 δεκαετίες αργότερα αναπτύχθηκε το σύστημα ταξινόμησης Harvard (Pickering, Fleming, Maury) που χαρακτήριζε τα φάσματα με κεφαλαία γράμματα βάσει της έντασης των γραμμών απορρόφησης του υδρογόνου, ξεκινώντας με το γράμμα A για τις πιο ευρείες γραμμές.
- Το σύστημα αυτό τελειοποιήθηκε και έφτασε στη μορφή που είναι γνωστή σήμερα από την Annie Jump Cannon) που αναδιέταξε την ακολουθία των φασμάτων τοποθετώντας τους τύπους O και B πριν τους τύπους A, προσέθεσε δεκαδικές υποδιαιρέσεις (π.χ. A0–A9) και συγχώνευσε πολλές από τις τάξεις.
- Με αυτές τις αλλαγές, το σύστημα κατηγοριοποίησης του Harvard των «O B A F G K M» μετατράπηκε σε ακολουθία θερμοκρασιών, η οποία εκτείνεται από τα πιο θερμά μπλε άστρα τύπου O έως τα πιο ψυχρά κόκκινα άστρα τύπου M.
- Η κατανόηση της σχέσης μεταξύ φασματικών χαρακτηριστικών και θερμοκρασίας (χρώματος, επήλθε με την ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας, και βασίζεται σχεδόν αποκλειστικά σε συνδυασμό των νόμων Boltzmann και Saha.

- Τα άστρα που βρίσκονται πιο κοντά στην αρχή αυτής της ακολουθίας αναφέρονται ως **προγενέστερου τύπου άστρα**, ενώ αυτά που είναι προς το τέλος, **μεταγενέστερου τύπου** (οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνται και για τους υπο-τύπους, 0-9 σε κάθε τάξη)
- Συμβολισμοί: OI → ουδέτερο άτομο οξυγόνου  
OII → μονά ιονισμένο άτομο οξυγόνου  
OIII → διπλά ιονισμένο άτομο οξυγόνου κ.ο.κ.
- Στο σύστημα του Harvard οι **γραμμές Balmer φτάνουν στη μέγιστη έντασή τους στα φάσματα των άστρων τύπου A0**, τα οποία έχουν ενεργό θερμοκρασία  $T_e = 9520 \text{ K}$ .
- Οι ορατές φασματικές γραμμές του **ουδέτερου ηλίου (He I) είναι ισχυρότερες για τα άστρα τύπου B2** ( $T_e = 22000 \text{ K}$ )
- Οι ορατές φασματικές γραμμές του ασβεστίου που έχει ιονιστεί μία φορά (Ca II) είναι πιο έντονες για άστρα τύπου K0 ( $T_e = 5250 \text{ K}$ ).

| Φασματικός τύπος | Χαρακτηριστικά   |
|------------------|--|
| O                | Τα πιο θερμά μπλε-λευκά άστρα με λίγες γραμμές.<br>Ισχυρές γραμμές απορρόφησης (μερικές φορές και εκπομπής) He II.<br>Οι γραμμές απορρόφησης του He I γίνονται ισχυρότερες.  |
| B                | Θερμά μπλε-λευκά<br>Γραμμές απορρόφησης He I πιο ισχυρές στους τύπους B2.<br>Οι γραμμές απορρόφησης Balmer H I γίνονται ισχυρότερες.   |
| A                | Λευκά<br>Οι γραμμές απορρόφησης Balmer είναι πιο ισχυρές στους A0,<br>γίνονται πιο ασθενείς στους μεταγενέστερους τύπους.<br>Οι γραμμές απορρόφησης του Ca II γίνονται ισχυρότερες.  |
| F                | Κιτρινόλευκα<br>Οι γραμμές απορρόφησης Balmer είναι πιο ισχυρές στους A0,<br>γίνονται πιο ασθενείς στους μεταγενέστερους τύπους.<br>Ουδέτερες μεταλλικές γραμμές απορρόφησης (Fe I, Cr I).   |
| G                | Κίτρινα<br>Φάσματα ηλιακού τύπου.<br>Οι γραμμές Ca II συνεχίζουν να γίνονται ισχυρότερες.<br>Fe I, άλλες ουδέτερες μεταλλικές γραμμές γίνονται ισχυρότερες.  |
| K                | Ψυχρό πορτοκαλί<br>Οι Ca II, H και K είναι ισχυρότερες στους K0,<br>γίνονται πιο ασθενείς αργότερα.<br>Τα φάσματα κυριαρχούνται από μεταλλικές γραμμές απορρόφησης.  |
| M                | Ψυχρό ερυθρό<br>Τα φάσματα κυριαρχούνται από μοριακές ζώνες απορρόφησης,<br>ειδικά του οξειδίου του τιτανίου (TiO) και του οξειδίου του<br>βαναδίου (VO).<br>Οι ουδέτερες μεταλλικές γραμμές απορρόφησης παραμένουν ισχυρές.   |
| L                | Πολύ ψυχρό, σκοτεινό ερυθρό<br>Ισχυρότερα στο υπέρυθρο έναντι του ορατού.<br>Ισχυρές μοριακές ζώνες απορρόφησης των μεταλλικών υδριδίων<br>(CrH, FeH), νερό (H <sub>2</sub> O), μονοξείδιο του άνθρακα (CO), και αλκάλια<br>(Na, K, Rb, Cs). Τα TiO και VO εξασθενούν. |
| T                | Τα πιο ψυχρά, υπέρυθρο<br>Ισχυρές ζώνες μεθανίου (CH <sub>4</sub> ) αλλά εξασθενούσες ζώνες CO.  |

Πίνακας από Carroll και Ostlie



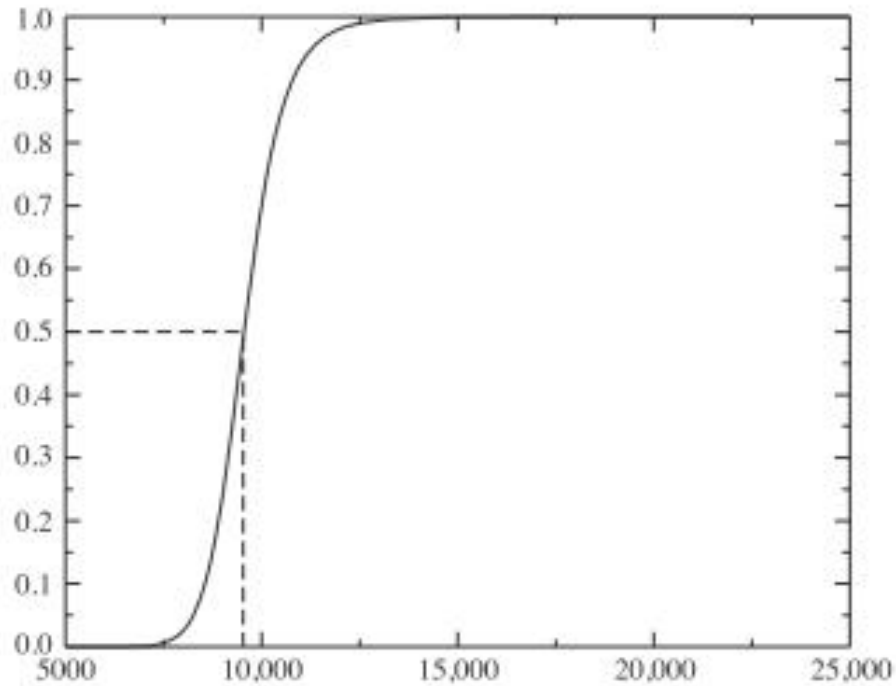


Σχήματα από Carroll και Ostlie

## Παράδειγμα εφαρμογής νόμων Boltzmann και Saha.

- Αέριο που αποτελείται μόνο από υδρογόνο σε  $\Theta I$ , σε θερμοκρασία  $T$  μεταξύ 5000K και 25000K. Έστω ότι η πίεση των ηλεκτρονίων είναι  $P_e = 20\text{Nm}^{-2}$
- Από την εξίσωση Saha υπολογίζουμε τον λόγο των ατόμων που έχουν ιονιστεί προς τον συνολικό αριθμό (ουδέτερων και ιονισμένων ατόμων)  $N_{II}/N_{\text{total}} = N_{II}/(N_I + N_{II})$
- Χρειαζόμαστε τις συναρτήσεις επιμερισμού  $Z_I$  και  $Z_{II}$ .
  - $Z_{II} = 1$  (ιον  $H \rightarrow$  πρωτόνιο)
  - Για τις θερμοκρασίες που μας ενδιαφέρουν ο παράγοντας Boltzmann για τη πρώτη κατάσταση διέγερσης είναι  $e^{-(E_2-E_1)/kT} \ll 1$ , αφού  $E_2 - E_1 = 10.2\text{eV}$ , δηλ. τα περισσότερα άτομα βρίσκονται στη βασική τους στάθμη, άρα  $Z_I \approx g_1 = 2(1)^2 = 2$
- Εισάγουμε στην εξ. Saha  $\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kTZ_{i+1}}{P_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$  τις παραπάνω τιμές και το  $\chi_I = 13.6\text{eV}$  και υπολογίζουμε τον λόγο  $N_{II}/(N_I)$  και από αυτόν, το  $\frac{N_{II}}{N_{\text{total}}} = \frac{N_{II}}{(N_I + N_{II})} = \frac{N_{II}/N_I}{1 + N_{II}/N_I}$

$$\frac{N_{\text{II}}}{N_{\text{total}}}$$



$T$  (K)

- Για  $T \sim 5000\text{K}$  δεν υπάρχουν σχεδόν καθόλου ιονισμένα άτομα H
- Για  $T \sim 8300\text{K}$  το 5% έχει ιονιστεί
- Για  $T \sim 9600\text{K}$  το 50% έχει ιονιστεί → **ζώνη μερικού εκφυλισμού**
- Για  $T \sim 11300\text{K}$  το 95% έχει ιονιστεί

*Ο ιονισμός του H συμβαίνει μέσα σε μία περιοχή θερμοκρασιών εύρους 3000K*

Σχήμα από Carroll και Ostlie

- Η ένταση των γραμμών Balmer εξαρτάται από το λόγο  $N_2/N_{\text{total}}$ , το κλάσμα όλων των ατόμων υδρογόνου που βρίσκονται στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση.
- Αυτό βρίσκεται με τον συνδυασμό των αποτελεσμάτων των εξισώσεων Boltzmann και Saha.
- Επειδή, ουσιαστικά, όλα τα άτομα του ουδέτερου υδρογόνου είναι είτε στη βασική είτε στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση  $N_1 + N_2 \sim N_I$  και να γράψουμε

$$\frac{N_2}{N_{\text{total}}} = \left( \frac{N_2}{N_1 + N_2} \right) \left( \frac{N_I}{N_{\text{total}}} \right) = \left( \frac{N_2/N_1}{1 + N_2/N_1} \right) \left( \frac{1}{1 + N_{II}/N_I} \right)$$

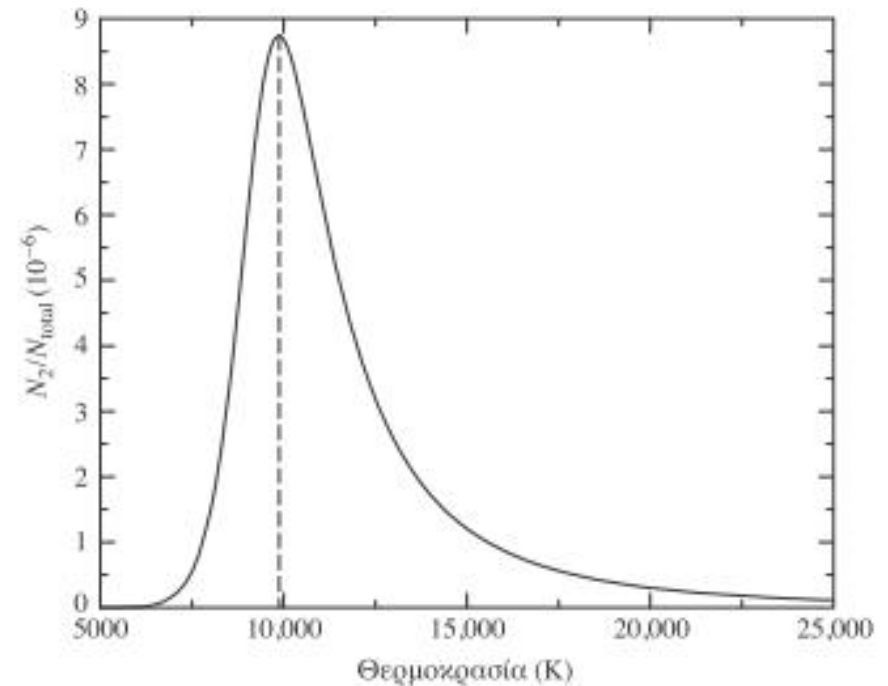
όπου ο λόγος  $N_2/N_1$  προκύπτει από την εξ. Boltzmann.  $\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2 - E_1)/kT}$



$$\frac{N_2}{N_{tot}} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \frac{1}{1 + \frac{N_{II}}{N_I}}$$

➔ Για μικρά T, το  $\frac{N_2}{N_1 + N_2} \rightarrow 0$

➔ Για μεγάλα T, το  $\frac{1}{1 + \frac{N_{II}}{N_I}} \rightarrow 0$



από Carroll και Ostlie

Η μειούμενη ισχύς των γραμμών Balmer στις υψηλότερες θερμοκρασίες οφείλεται στον γρήγορο ιονισμό του υδρογόνου πάνω από τα 10000 K.

## Αστρικές ατμόσφαιρες

- Το φως που παίρνουμε από ένα άστρο έρχεται από την ατμόσφαιρα του άστρου, δηλ. τα στρώματα του αερίου που βρίσκονται πάνω από το αδιαφανές εσωτερικό του άστρου.
- Μια πλημμύρα από φωτόνια διαπερνάει αυτά τα επίπεδα, απελευθερώνοντας την ενέργεια που στο εσωτερικό του άστρου (θα μιλήσουμε για αυτά σε επόμενα κεφάλαια).
- Η θερμοκρασία, η πυκνότητα και η σύνθεση των ατμοσφαιρικών στρωμάτων, από τα οποία τα φωτόνια αυτά διαφεύγουν, καθορίζουν τα χαρακτηριστικά του φάσματος του άστρου.
- Προκειμένου να ερμηνεύσουμε σωστά τις παρατηρούμενες φασματικές γραμμές, πρέπει να περιγράψουμε πώς το φως ταξιδεύει διαμέσου του αερίου που συνιστά το άστρο (το εσωτερικό και την ατμόσφαιρα) → εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας (που έχουμε ήδη συζητήσει)